三十六技之二十： “空间曲面有方向，两个公式帮忙算”

掌握曲面的定向是正确利用 Guass 公式、Stokes 公式的前提

曲面积分与曲线积分很相似，首先都有二类积分，重点在计算。计算时也有“三个变换”的问题，具体的计算方法是用定义或者用高斯公式两种。计算的难点是要十分小心地处理曲面定向在计算中的反映。斯托克斯公式主要用来计算第二型空间封闭路径的积分，计算更要注意曲线和曲面都是有方向的，两个方向有确定的关系。

例 20-1. 求 $I=\iint\limits_S |z|dS$，$J=\iint\limits_S |z|dxdy$， $S: x^2+y^2+z^2=a^2$，外法线为 S 正向。.

【解】$I=2\pi a^3$； $J=0$。

例 20-1. 求 $I=\iint\limits_S z^2dS$，$J=\iint\limits_S z^2dxdy$， $S: x^2+y^2+z^2=a^2$，外法线为 S 正向。.

【解】$I=\dfrac{4}{3}\pi a^4$ ； $J=0$ 。

例 20-2 求 $F(t)=\iint\limits_{S(t)} f(x,y,z)dS$，其中 $S(t)$： $x^2+y^2+z^2=t^2$

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2 & z\ge\sqrt{x^2+y^2} \\ 0 & z<\sqrt{x^2+y^2} \end{cases},$$

【解】$F(t)=\dfrac{\pi}{6}(8-5\sqrt{2})t^4$。

例 20-3 求第二类曲面积分 $I=\iint\limits_S \dfrac{xdydz+ydydz+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中

（1） $S: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$， $\varepsilon>0$；（2） S 是内不含原点的光滑曲面.

【解】（1） $I=4\pi$；（2） $I=0$。

例 20-4 设 S 为简单闭曲面，**e** 为任意固定方向，则 $I=\iint\limits_S \cos(\vec{\mathrm{n}},\vec{\mathrm{e}})dS=0$

【证】略。

例 20-5 求 $I=\iint\limits_S \left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)dS$， $S: z=\sqrt{x^2+y^2}, (0\le z\le h)$

$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为该曲面的单位外法向量．方向向上.

【解】$I=-\dfrac{\pi}{2}h^4$。

例 20-13. 在半空间 $x>0$，对任何光滑有向曲面 S，有

$$\oiint_S xf(x)dydz - xyf(x)dzdx - e^{2x}zdxdy \equiv 0,$$

其中 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一阶连续可导，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ 求 $f(x)$。

【解】 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}(e^x-1)$ 。

例 20-6 设函数满足条件： $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}=nf(x,y,z)$， n 为正整数，

曲面 S_1： $f(x,y,x)=0$， 与平面 $S_2: ax+by+cz=d$， 所围区域为 Ω，

$\partial\Omega$ 取外法线作正向， 计算： $I=\dfrac{1}{3}\iint\limits_{\partial\Omega} xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy$.

【解】 $I=\dfrac{1}{3}\iint\limits_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{n}_0dS=\dfrac{1}{3}\left(\iint\limits_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}_0dS+\iint\limits_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}_0dS\right)=\dfrac{1}{3}H\cdot S$

这里，H 是原点到平面 S_2 的距离，是曲面 S_1 在平面 S_2 上切下图形的面积. 另一方面，由 Gauss 公式有 ： $I=\dfrac{1}{3}\iint\limits_{\partial\Omega} xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy \quad =|\Omega|$ ， 即所围体积 ： $|\Omega|=\dfrac{1}{3}H\cdot S$。

例 20-7 求 $I=\oint\limits_L ydx+zdy+xdz$， 其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$， 自正 z 轴看去为逆时针方向。

【解】 $I=\oint\limits_L ydx+zdy+xdz -\dfrac{3}{2}a^2$

例 20-8. 计算 $\oint_L x^2yzdx+(x^2+y^2)dy+(x+y+1)dz$, 其中 L: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=5\\ z=1+x^2+y^2\end{cases}$

从 oz 轴正方向看进去为顺时针

【解 1】直接化为定积分 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=-\sin t\,dt\\ dy=\cos t\,dt\\ dz=0\end{cases}$，

$$\oint_L x^2yzdx+(x^2+y^2)dy+(x+y+1)dz=\frac{\pi}{2}$$

【解 2】投影到坐标面上转化为平面上的曲线积分，……。

【解 3】斯托克斯公式……。

例 20-9 计算 $I=\oint\limits_L ydx+zdy+xdz$，其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=4z$ 与平面 $x+z=2$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向。

【解】$I=\oint\limits_L ydx+zdy+xdz=-4\sqrt{2}\pi$

例 20-10 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上具有二阶连续偏导数，n 是 D 的边界 ∂D 的外向单位法向量。

（1）证明：

$$\int\limits_{\partial D} f(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial n}dl$$

$$=\iint\limits_D f(x,y)\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right]dxdy+\iint\limits_D f(x,y)\left[\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

（2）当 $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=0,(x,y)\in D,$ 且 $f(x,y)=0,(x,y)\in\partial D$ 时，证明：

$f(x,y)=0,(x,y)\in D$

【证】 略。

例 20-11 计算 $I=\iint\limits_S xyz\left(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2\right)dS$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 在第一卦限的部分。

【解】$I=\iint\limits_S xyz\left(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2\right)dS=\dfrac{a^9}{32}$

[特别提示] 本解法利用了两类曲面积分之间的关系。

例 20-12 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中 S 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 介于 $z=0$ 和 $z=1$ 之间的部分，上侧为正。

【解】$I=\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy=-\dfrac{1}{2}\pi$

例 20-13 计算曲面积分 $I=\oiint\limits_S \dfrac{\cos(r,n)}{r^2}dS$，其中 $r=\{x,y,z\},r=|r|,S$ 为椭球面

$x^2+2y^2+3z^2=1, n$ 为 S 的外向单位法向量。

【解】 $I=\oiint\limits_S \frac{\cos(r,n)}{r^2}dS=4\pi$ 。

[特别提示]

（1）由于在椭球体 $x^2+2y^2+3z^2\le 1$ 内不满足高斯公式的条件，所以不能对原曲面积分直接运用高斯公式；

（2）对于曲面积分 $\oiint\limits_{S_\varepsilon}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ 首先利用了点的坐标满足球面方程 $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ 的事实，又对积分 $\oiint\limits_{S_\varepsilon}xdydz+ydzdx+zdxdy$ 运用了高斯公式，这里的符号是最容易出错的地方；

（3）S_ε 为球面 $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$，主要是由于分母在此球面上可以化简

（4）当本题中的 S 改为任意不经过原点的光滑曲面时，可以用类似的方法求解。

例 20-14 设 $L(x,y,z)$ 表示原点到椭球面 $S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上点 (x,y,z) 处的切平面的距离，求证 $\oiint\limits_S\frac{dS}{L(x,y,z)}=\frac{4\pi}{3abc}\left(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\right)$

【证】 略。

[特别提示] 将第一型曲面积分转化为第二型曲面积分是本题的的关键，也是本题的难点。

场论初步的基本要求是什么？需要掌握一些什么基本运算？

解答与引导 了解三度（梯度，散度、旋度）的概念，掌握三度的计算就是场论初步的基本要求。

了解梯度与方向导数、散度与通量以及旋度与环流量之间的关系是对三度概念的基本要求；掌握三度的计算指的是掌握它们在直角坐标系下的计算公式，即要掌握：

$$\mathrm{grad}f(x,y,z)=\left\{\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x},\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y},\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right\}$$

$$\mathrm{div}F(x,y,z)=\frac{\partial X(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial Y(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial Z(x,y,z)}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}F(x,y,z)=\begin{vmatrix} i & j & z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=\left\{\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial z},\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x},\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right\}$$

其中 $F(x,y,z)=\{X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z)\}$，函数 $X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z)$ 均具有一阶连续偏导数。

例 20-15 设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=2x$，外侧为正；L 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2x \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ 方向为从 x 轴正向看是逆时针，求向量场 $F(x,y,z)=\{xz^2,yz^2zy^2\}$ 通过曲面 S 的通量 Φ 和沿曲线 L 的环量 I。

【解】 $I=0$。