重点2　和、差、倍角的三角函数

重点诠释

两角和与差的三角函数公式及二倍角公式是高考的重点内容，它不仅是解决三角恒等变形问题的基础，也是研究三角函数图像与性质的基础，其主要题型有：(1) 三角函数式的化简与求值；(2) 三角函数式的简单证明. 另外在研究三角函数图像与性质时，也常利用它对三角函数进行化简进而研究三角函数的图像与性质. 这部分知识的考查难度已较以前有所降低，复习时也应适当控制其难度.

1. 记忆公式要注意角、三角函数名称的排列以及“+”“−”的变化特点，对一些公式不仅要求会从正面应用，还要会逆用以及变形用.

2. 重视角的变换及角的范围在求三角函数值时所起的重要作用，学会灵活地运用公式.

3. 创造条件使用倍角公式，是活用公式的关键.

典例调研

题型一　基本公式及应用

【调研 1】　已知 A，B 是$\triangle ABC$ 的两个内角.

(1) 若 A、$B\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，求证 $\tan A\tan B>1$；

(2) 若 A、B 满足$\sqrt{3}\cos A=\cos(2B-A)$，求 $\tan(B-A)\tan B$ 的值.

解析　(1) $\tan A\tan B-1=\dfrac{\sin A\sin B-\cos A\cos B}{\cos A\cos B}=\dfrac{-\cos(A+B)}{\cos A\cos B}$，

$\because \frac{\pi}{4}<A<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{4}<B<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \frac{\pi}{2}<A+B<\pi$，

$\therefore -\cos(A+B)>0$，$\cos A>0$，$\cos B>0$，即 $\tan A\tan B-1>0$，

故 $\tan A\tan B>1$.

(2) $\because \sqrt{3}\cos[(B-A)-B]=\cos[(B-A)+B]$，

$\therefore \sqrt{3}\cos(B-A)\cos B+\sqrt{3}\sin(B-A)\sin B$

$=\cos(B-A)\cos B-\sin(B-A)\sin B$，

即 $(1-\sqrt{3})\cos(B-A)\cos B=(\sqrt{3}+1)\sin(B-A)\sin B$，

$\therefore \tan(B-A)\tan B=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2$.

重点突破

【方法探究】 在本题(1)中我们使用了两角和的正切公式 $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$的变形公式 $1-\tan A\tan B=\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan(A+B)}$. 对于一个三角公式,我们不但要掌握这个公式的正用、逆用,还要掌握变形使用. 例如:$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$,这个公式成立的条件是 α 是任意角,2α 是 α 的二倍. 于是,下面公式都成立:

$\sin 4\beta=2\sin 2\beta\cos 2\beta$,$\sin 8\beta=2\sin 4\beta\cos 4\beta$,…,$\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$,$\sin\dfrac{\alpha}{2}=2\sin\dfrac{\alpha}{4}\cos\dfrac{\alpha}{4}$,…,倍角公式的精髓体现在角的倍数关系上.

拓展 1 求$\dfrac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}-4\cos 10^\circ$的值.

【调研 2】 设 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$,$\beta\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$,且 α、β 满足 $5\sqrt{3}\sin\alpha+5\cos\alpha=8$,$\sqrt{2}\sin\beta+\sqrt{6}\cos\beta=2$,求 $\cos(\alpha+\beta)$的值.

分析 若注意到两个等式都具有 $a\sin x+b\cos x$ 的结构,可考虑逆用和角公式,引入辅助角求解.

解析 $\because 5\sqrt{3}\sin\alpha+5\cos\alpha=8$,$\therefore \sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{5}$.

$\because \alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$,$\therefore \left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$,$\therefore \cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$.

又$\because \sqrt{2}\sin\beta+\sqrt{6}\cos\beta=2$,$\therefore \sin\left(\beta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\because \beta\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$,$\therefore \left(\beta+\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right)$,$\therefore \cos\left(\beta+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore \sin\left[\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)+\left(\beta+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]=\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\beta+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\beta+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$,

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

【技巧点拨】 此类型题目需通过模式联想,引入辅助角,技巧性较强,其中辅助角公式 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$(其中 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$)在历年高考中使用频率相当高,应加以关注.

拓展 2 在$\triangle ABC$ 中,已知 A、B、C 成等差数列,求 $\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{C}{2}+\sqrt{3}\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}$的值.

中国最早提出了最小公倍数的概念.

【调研 3】 化简$\dfrac{2\cos^4x-2\cos^2x+\dfrac{1}{2}}{2\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}$.

分析　化简结果究竟是什么,我们不清楚,但化繁为简却是我们不变的目标. 本题中分子是一个完全平方式,分母中$\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\dfrac{\pi}{2}$,这两个特征应成为我们解题的切入点.

解析　原式$=\dfrac{\dfrac{1}{2}(4\cos^4x-4\cos^2x+1)}{2\cdot\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}\cdot\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}=\dfrac{(2\cos^2x-1)^2}{4\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}$

$=\dfrac{\cos^2 2x}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)}=\dfrac{\cos^2 2x}{2\cos 2x}=\dfrac{1}{2}\cos 2x.$

【方法探究】 本题的变形既有变式,又有变角. 变式的常用方法有"常值代换""逆用和变用公式""配方与平方"等. 本题的变式抓住了$4\cos^4x-4\cos^2x+1$是一个完全平方式,变角抓住了$\dfrac{\pi}{4}-x$与$\dfrac{\pi}{4}+x$互余,以及$\dfrac{\pi}{4}-x$的倍角是$\dfrac{\pi}{2}-2x$这些特征.

拓展 3　已知角A、B、C是$\triangle ABC$的内角,$C=\dfrac{\pi}{2}$,$A<B$,向量$\boldsymbol{a}=(2\cos A,1)$,$\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{1}{2},\sin A\right)$且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{7}{5}$. 求$\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{B}{2}\right)+\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$的值.

题型二　三角函数式的求值

【调研 4】 已知关于x的方程$\sqrt{3}\cos x+\sin x+a=0$在区间$(0,2\pi)$上有两个不相等的实数解$\alpha,\beta$,求$\alpha+\beta$的值.

解析　构造关于α,β的方程,借助角的变形解决.

$\because$ α,β是方程$\sqrt{3}\cos x+\sin x+a=0$在区间$(0,2\pi)$上的两个不相等的实数根,

$\therefore$ $\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha+a=0$,(1) $\sqrt{3}\cos\beta+\sin\beta+a=0$,(2)

(1)$-$(2)得$\sqrt{3}(\cos\alpha-\cos\beta)=\sin\beta-\sin\alpha$,

$\therefore$ $\sqrt{3}\left[\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]=\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$,两边展开整理,得$-2\sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=-2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$,

$\therefore$ $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

重点突破

又$\frac{\alpha+\beta}{2}\in(0,2\pi)$，$\therefore \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{6}$或$\frac{7\pi}{6}$，故$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$或$\frac{7\pi}{3}$.

【发散类比】 如果三角函数条件式本身就是方程的形式，那么在进行三角变换时要重视方程思想与方法并会灵活运用. 值得一提的是，凡是求某角，基本上是先求出其三角函数值，再求角. 另外，我们使用角的变换$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}$，$\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}$避免了和差化积！《考试大纲》要求掌握两角和与两角差的正弦、余弦、正切公式，这就要求我们能灵活地运用这些公式来解题，因此我们不仅要能直接运用公式，更要注意创造运用公式的条件.

拓展4 $\triangle ABC$中，内角A、B、C的对边分别是a、b、c. 已知a、b、c成等比数列，且$\cos B=\frac{3}{4}$，求$\cot A+\cot C$的值.

题型三 三角函数综合应用

【调研5】 若$|\log_{\pi}\frac{\alpha}{\pi}|<2$，求使$f(x)=\sin(x+\alpha)+\cos(x-\alpha)\ (x\in\mathbf{R})$为偶函数的实数$\alpha$的个数.

分析 因为$f(x)$为偶函数，所以对于任意的实数x都有$f(-x)=f(x)$，依此建立关于α的方程获解.

解析 $\because f(x)=\sin(x+\alpha)+\cos(x-\alpha)=\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha+\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha=(\sin x+\cos x)\cos\alpha+(\sin x+\cos x)\sin\alpha=(\sin x+\cos x)(\sin\alpha+\cos\alpha)$，

$\because f(x)$为偶函数，$\therefore f(-x)=f(x)$，即对于任意实数x都有$(\sin x+\cos x)(\sin\alpha+\cos\alpha)=(\sin(-x)+\cos(-x))(\sin\alpha+\cos\alpha)\Rightarrow 2\sin x(\sin\alpha+\cos\alpha)=0$，

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=0\Rightarrow\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=0$，$\therefore \alpha=k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

又$|\log_{\pi}\frac{\alpha}{\pi}|<2\Rightarrow-2<\log_{\pi}\frac{\alpha}{\pi}<2$，$\therefore \frac{1}{\pi}<\alpha<\pi^3$，

于是$\frac{1}{\pi}<k\pi-\frac{\pi}{4}<\pi^3\Rightarrow\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4}<k<\pi^2+\frac{1}{4}$，

$\therefore 1\leqslant k\leqslant 9$，

故这样的实数α有9个.

【技巧点拨】 本题将三角函数求值、化简、绝对值不等式的解法融于一体，很好地考查了学生潜在学习的能力. 求值、化简、证明是三角函数中最常见的题型，其一般的解题思路为"五遇六想"，即 遇切割，想化弦 遇多元，想消元 遇差异，想联系 遇高次，想降次 遇特角，想求值 想消元，引辅角."五遇六想"作为解题经验的总结和概括，操作简便，十分有效！其中蕴含了一个变换思想（找差异，抓联系，促进转化），两种数学思想（转化思想和方程思想），三个追求目标（化为特殊角的三角函数值，使之出现相消项或相约项），四种变换方法（切割化弦法、消元降次法、辅助元素法及特殊值法）.

拓展5 已知三角函数$f(x)=\sin(x+\varphi)\cos x$的图像关于原点$O(0,0)$对称，试求函数$f(x)$的解析式.

【调研6】 已知向量$\boldsymbol{a}_n=(\sin n\theta,\cos 3n\theta)$，$\boldsymbol{b}_n=(\cos n\theta,\sin 3n\theta)$ $(n\in\mathbf{N}^*,\theta\in\mathbf{R})$，求动点$M(\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{b}_n,\boldsymbol{b}_n^2-\sin 2n\theta\sin 4n\theta)$的轨迹.

分析 欲求动点M的轨迹，根据题设，选取角变量θ为参数，建立M的参数方程即可. 特别注意变量x,y的取值范围.

解析 设动点$M(x,y)$，则$x=\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{b}_n=\sin n\theta\cos n\theta+\sin 3n\theta\cos 3n\theta=\dfrac{1}{2}(\sin 2n\theta+\sin 6n\theta)=\dfrac{1}{2}[\sin(4n\theta-2n\theta)+\sin(4n\theta+2n\theta)]=\sin 4n\theta\cos 2n\theta=2\sin 2n\theta\cos^2 2n\theta$，

于是$x^2=4\sin^2 2n\theta(1-\sin^2 2n\theta)^2=2\times 2\sin^2 2n\theta(1-\sin^2 2n\theta)(1-\sin^2 2n\theta)\leqslant 2\times\left(\dfrac{2\sin^2 2n\theta+1-\sin^2 2n\theta+1-\sin^2 2n\theta}{3}\right)^3=\dfrac{16}{27}$，当且仅当$2\sin^2 2n\theta=1-\sin^2 2n\theta$时，等号成立，

$\therefore -\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\leqslant x\leqslant\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$，

$y=\boldsymbol{b}_n^2-\sin 2n\theta\sin 4n\theta=\cos^2 n\theta+\sin^2 3n\theta-\sin 2n\theta\sin 4n\theta=\dfrac{1+\cos 2n\theta}{2}+\dfrac{1-\cos 6n\theta}{2}-\sin 2n\theta\sin 4n\theta=1+\dfrac{\cos 2n\theta-\cos 6n\theta}{2}-\sin 2n\theta\sin 4n\theta=1$，

所以M的轨迹是一条线段：$y=1\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\leqslant x\leqslant\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\right)$.

【考向预测】 由于近年高考命题突出以能力立意，加强对知识综合性和应用性的考查，故常常在知识的交汇点处命题，因而对三角函数知识的考查总是与平面向量、数列、不等式、解析几何、导数等综合在一起来考查，突出三角函数的工具性作用. 本题就具有这一典型特征，是不可多得的好题.

拓展6 已知$f(x)=\left[\sin\left(x+\dfrac{\theta}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(x+\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\cdot\cos\left(x+\dfrac{\theta}{2}\right)$，若$\theta\in[0,\pi]$且$f(x)$为偶函数，求$\theta$的值.

强化闯关

1. 函数$f(x)=\sqrt{3}\cos(3x-\theta)-\sin(3x-\theta)$是奇函数，则$\theta$等于

A. $k\pi$　　B. $k\pi+\dfrac{\pi}{6}$　　C. $k\pi+\dfrac{\pi}{3}$　　D. $k\pi-\dfrac{\pi}{3}$

2. 已知$\cos 2\theta=\dfrac{7}{25}$，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$. 求：

(1) $\tan\theta$；

(2) $\dfrac{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin\theta}{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

3. 已知 $6\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha=0$，$\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$，求 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值.

4. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(x+\dfrac{\theta}{2}\right)+2\sqrt{3}\cos^2\left(x+\dfrac{\theta}{2}\right)-\sqrt{3}$，$x\in\mathbf{R}$，$\theta$ 为常数.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值；

(2) 当 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 时，求函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\geqslant 1$ 的 x 的集合.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，a,b,c 分别为角 A,B,C 的对边，且满足 $4\cos^2\dfrac{A}{2}-\cos 2(B+C)=\dfrac{7}{2}$.

(1) 求角 A 大小；

(2) 若 $b+c=3$，当 a 取最小值时，判断 $\triangle ABC$ 的形状.

参考答案

【拓展】

1. $\dfrac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}-4\cos 10^\circ=\dfrac{\cos 10^\circ-4\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}$

$=\dfrac{\sin 80^\circ-2\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}=\dfrac{\sin(60^\circ+20^\circ)-2\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ-\dfrac{3}{2}\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}$

$=\dfrac{\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}\cos 20^\circ-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ\right)}{\sin 10^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}\cos(60^\circ+20^\circ)}{\sin 10^\circ}=\sqrt{3}$.

2. $\because A,B,C$ 成等差数列，$\therefore B=60^\circ$，$A+C=120^\circ$，$\dfrac{A+C}{2}=60^\circ$，

由 $\tan\left(\dfrac{A}{2}+\dfrac{C}{2}\right)=\dfrac{\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{C}{2}}{1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}}$ 得 $\sqrt{3}\left(1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}\right)=\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{C}{2}$，

$\therefore \tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{C}{2}+\sqrt{3}\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\sqrt{3}$.

3. $\because$ 向量 $\boldsymbol{a}=(2\cos A,1)$，$\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{1}{2},\sin A\right)$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{7}{5}$，

$\therefore \sin A+\cos A=\dfrac{7}{5}$，①

又$\because \sin^2 A+\cos^2 A=1$， ②

由①②得 $\sin^2 A-\frac{7}{5}\sin A+\frac{12}{25}=0$，解得 $\sin A=\frac{3}{5}$ 或 $\sin A=\frac{4}{5}$，

又 $C=\frac{\pi}{2}$，$A<B$，则 $A<\frac{\pi}{4}$，$\therefore \sin A<\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $\sin A=\frac{3}{5}$，

$\because A+B=\frac{\pi}{2}$，$\therefore \cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\cos^2\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}+\frac{\sin A}{2}=\frac{6}{5}$.

4. 解法一　由 $\cos B=\frac{3}{4}$ 得 $\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$，由 $b^2=ac$ 得 $\sin^2 B=\sin A\cdot\sin C$，

于是 $\cot A+\cot C=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\sin C\cos A+\cos C\sin A}{\sin A\sin C}=\frac{\sin(A+C)}{\sin^2 B}=\frac{\sin B}{\sin^2 B}=\frac{1}{\sin B}=\frac{4}{7}\sqrt{7}$.

解法二　由 $\cos B=\frac{3}{4}$ 得 $\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\frac{\sqrt{7}}{4}}$，

即 $\sin A=\frac{\sqrt{7}a}{4b}$，$\sin C=\frac{\sqrt{7}c}{4b}$. 由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

$\therefore \cot A+\cot C=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{2(b^2+c^2-a^2)}{\sqrt{7}ac}+\frac{2(a^2+b^2-c^2)}{\sqrt{7}ac}=\frac{4b^2}{\sqrt{7}ac}$，

由 a、b、c 成等比数列可得 $\cot A+\cot C=\frac{4\sqrt{7}}{7}$.

5. $f(x)=\sin(x+\varphi)\cos x=\sin x\cos x\cos\varphi+\cos^2 x\sin\varphi=\frac{1}{2}\sin 2x\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2x\sin\varphi+\frac{1}{2}\sin\varphi=\frac{1}{2}\sin(2x+\varphi)+\frac{1}{2}\sin\varphi$.

$\because$ 函数 $f(x)$ 的图像关于原点 $O(0,0)$ 对称，$\therefore f(-x)=-f(x)$，

即等式 $\frac{1}{2}\sin(-2x+\varphi)+\frac{1}{2}\sin\varphi=-\left[\frac{1}{2}\sin(2x+\varphi)+\frac{1}{2}\sin\varphi\right]$ 对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，

$\therefore \sin(-2x+\varphi)+\sin(2x+\varphi)+2\sin\varphi=0$，

即 $(\cos 2x+1)\sin\varphi=0$，对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，从而只能有 $\sin\varphi=0$，

解得 $\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

故所求函数的解析式为 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ 或 $f(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x$.

6. $f(x)=[\sin(x+\frac{\theta}{2})+\sqrt{3}\cos(x+\frac{\theta}{2})]\cos(x+\frac{\theta}{2})$

$=\sin(x+\frac{\theta}{2})\cdot\cos(x+\frac{\theta}{2})+\sqrt{3}\cos^2(x+\frac{\theta}{2})$

$=\frac{1}{2}\sin(2x+\theta)+\frac{\sqrt{3}}{2}[1+\cos(2x+\theta)]=\sin(2x+\theta+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\because f(x)$为偶函数，$\therefore f(-x)=f(x)$，

即 $\sin(-2x+\theta+\frac{\pi}{3})=\sin(2x+\theta+\frac{\pi}{3})$，得 $\sin 2x\cdot\cos(\theta+\frac{\pi}{3})=0$，

$\therefore \cos(\theta+\frac{\pi}{3})=0$，

又 $\theta\in[0,\pi]$，$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}.$

【强化闯关】

1. D　$\because f(x)=\sqrt{3}\cos(3x-\theta)-\sin(3x-\theta)$为奇函数，$\therefore f(0)=0$，即$\sqrt{3}\cos(-\theta)-\sin(-\theta)=0\Rightarrow\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=0\Rightarrow\tan\theta=-\sqrt{3}.\ \therefore \theta=k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，故选 D.

2. (1)由 $\cos 2\theta=\frac{7}{25}$，得 $1-2\sin^2\theta=\frac{7}{25}$，$\therefore \sin^2\theta=\frac{9}{25}$，

$\because \frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\therefore \sin\theta=\frac{3}{5}$，$\cos\theta=-\frac{4}{5}.$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{3}{4}.$

(2)$\dfrac{2\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin\theta}{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}=\dfrac{\cos\theta+1-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{-\frac{4}{5}+1-\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}-\frac{4}{5}}=2.$

3. 由已知得$(3\sin\alpha+2\cos\alpha)(2\sin\alpha-\cos\alpha)=0$，

则 $3\sin\alpha+2\cos\alpha=0$ 或 $2\sin\alpha-\cos\alpha=0$，

所以 $\cos\alpha\neq0$，$\sin\alpha\neq0$，即 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，

从而 $\tan\alpha<0$，有 $\tan\alpha=-\frac{2}{3}$，

$\sin(2\alpha+\frac{\pi}{3})=\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{3}=\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=$

$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$，

将 $\tan\alpha=-\frac{2}{3}$ 代入上式，得 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{(-\frac{2}{3})}{1+(-\frac{2}{3})^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1-(-\frac{2}{3})^2}{1+(-\frac{2}{3})^2}=-\frac{6}{13}+\frac{5}{26}\sqrt{3}$.

4. (1) $f(x)=\sin(2x+\theta)+\sqrt{3}[2\cos^2(x+\frac{\theta}{2})-1]=\sin(2x+\theta)+\sqrt{3}\cos(2x+\theta)=2\cos(2x+\theta-\frac{\pi}{6})$ (或 $f(x)=2\sin(2x+\theta+\frac{\pi}{3})$)，

$\therefore y_{\min}=-2, y_{\max}=2$.

(2) $\because y=2\cos(2x+\theta-\frac{\pi}{6})$ 及 $\theta=\frac{\pi}{3}$，又 $f(x)\geqslant1$，可得 $2\cos(2x+\frac{\pi}{6})\geqslant1$，$\therefore \cos(2x+\frac{\pi}{6})\geqslant\frac{1}{2}$，$\therefore 2k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore$ 所求 x 的集合是 $\{x\mid k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12}, k\in\mathbf{Z}\}$.

5. (1) $\because A+B+C=\pi$，$\therefore 4\cos^2\frac{A}{2}-\cos2(B+C)=2(1+\cos A)-\cos2A=-2\cos^2A+2\cos A+3=\frac{7}{2}$，

$\therefore 2\cos^2A-2\cos A+\frac{1}{2}=0$，$\therefore \cos A=\frac{1}{2}$，

$\because 0<A<\pi$，$\therefore A=60^\circ$.

(2) 由余弦定理 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，得 $bc=b^2+c^2-a^2$，

$\therefore a^2=(b+c)^2-3bc=9-3bc\geqslant9-3(\frac{b+c}{2})^2=\frac{9}{4}$，$\therefore a\geqslant\frac{3}{2}$，

$\therefore a$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$，当且仅当 $b=c=\frac{3}{2}$ 时取等号，此时 $\triangle ABC$ 为正三角形.

重点突破

在中国，“等积原理”是南北朝时的杰出数学家祖冲之和他的儿子祖暅共同研究的成果. 这一发现，要比西方卡瓦列利发现这个原理时，大约早一千一百多年.

中国数学