重点突破

重点1 同角间三角函数基本关系、诱导公式

重点诠释

本重点所涉及的知识，在近几年的高考中，主要是以选择题，填空题的形式出现. 集中考查以下内容 :任意角的概念、任意角三角函娄的定义、同角间三角函数的基本关系、诱导公式. 复习本节内容要注意如下几点：

1. 由于本专题基础知识部分主要在客观题中出现，因此复习这部分内容时，对一些题目在熟悉常规解法的前提下，重在灵、巧、活上下工夫，做到少时省力，以适应考场的需要.

2. 等价转化应突出等价性.

(1) 每次用公式，都应注意认真思考公式成立的条件.

(2) 公式应用过程中，要认真对待符号的取舍，很多试题都把这类问题作为考查的重点.

(3) 熟练掌握公式的正用、逆用、变形用或在特定条件下用，它可以提高思维的起点，缩短思维路线，从而使运算流畅自然.

3. 重视解题方法的复习.

由于本部分试题多以选择题，填空题的形式出现，因此，复习中要重视选择题、填空题的一些特殊解题方法，如数形结合法、代入检验法、特殊值法、待定系数法、排除法等.

典例调研

题型一 三角函数的概念

【调研1】 已知$\frac{\sin\alpha+\csc\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}<0$，求角$\alpha$所在的象限.

分析 如果从化简不等式入手，必然要判定四个三角函数值的正负，也就是要确定α所在的象限. 怎么办？回归三角函数值定义！请看解析.

解析 设$P(x,y)$是角α终边上异于原点的任意一点，且$|OP|=r(r>0)$，由已知

$\frac{\sin\alpha+\csc\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}<0$，得$\frac{\frac{y}{r}+\frac{r}{y}}{\frac{y}{x}+\frac{x}{y}}<0$，$\because r>0$，$\therefore x<0$，

故 $\cos\alpha<0$，且 $y\neq0$，所以 α 是第二或第三象限的角.

【知识链接】 三角函数的定义有代数表示和几何表示两种形式，利用代数形式可以通过设角终边上一点的坐标，计算出它到原点的距离，从而可求得角的三角函数值.利用几何表示中的单位圆、三角函数线可以用来求解一些简单的三角不等式.在判断角的象限时，要灵活地选取方法，如取特殊值法对解选择题、填空题来说更好，不仅可以节省更多的时间，还提高了准确率.

拓展 1 若角 α 满足条件 $\sin2\alpha<0$，$\cos\alpha-\sin\alpha<0$，则 α 在

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

【调研 2】 使 $\sin x\leqslant\cos x$ 成立的 x 的一个变化区间是

A. $[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$　　B. $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$　　C. $[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$　　D. $[0,\pi]$

解析一 画出角 x 的正弦线、余弦线，如图 2－1－1，若 $\sin x\leqslant\cos x$，显然应是图中阴影部分，故选 A.

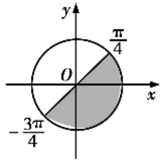

图 2－1－1

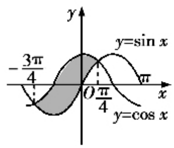

图 2－1－2

解析二 设 $y=\sin x$，$y=\cos x$.在同一坐标系中作出两函数图像，如图 2－1－2，观察知答案为 A.

解析三 由已知得 $\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})\leqslant0$，所以

$2k\pi+\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant2k\pi+2\pi$，$2k\pi+\frac{5\pi}{4}\leqslant x\leqslant2k\pi+\frac{9\pi}{4}$，令 $k=-1$ 得 $-\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，故选 A.

解析四 取 $x=\frac{2\pi}{3}$，有 $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，排除 C、D，取 $x=\frac{\pi}{3}$，有 $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，排除 B，故选 A.

【技巧点拨】 比较三角函数值的大小时，常用的方法有：

(1)借助单位圆中的三角函数线；

(2)借助三角函数图像；

(3)利用诱导公式转化为同名函数，进而利用单调性比较函数值大小；

(4)利用结论 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$ 比较大小.例如，当 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ 时，比较 $\sin\alpha$，$\sin(\sin\alpha)$，$\sin(\tan\alpha)$ 的大小.

拓展 2 若 A、B、C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角，且 $A<B<C$ $(C\neq\frac{\pi}{2})$，则下列结论中正确的是

A. $\sin A<\sin C$　　B. $\cot A<\cot C$　　C. $\tan A<\tan C$　　D. $\cos A<\cos C$

题型二　同角三角函数的基本关系式

【调研 3】 已知 $\tan\theta=\sqrt{2}$，求(1) $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$；(2) $\sin^2\theta-\sin\theta\cdot\cos\theta+2\cos^2\theta$

读者心语　既然选择重新开始，就要尽力而为，不求别的，但求问心无愧，拼过，就不说成败.
——悟空婆婆　河北省邯郸市一中

的值.

分析 本题所求式子具有齐次式的结构特征,进行弦、切互化,就会使解题过程简化.

解析 (1)$\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=-3-2\sqrt{2}$.

(2)$\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta=\frac{\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+2}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1}=$

$\frac{2-\sqrt{2}+2}{2+1}=\frac{4-\sqrt{2}}{3}$.

【方法探究】 这是一组在已知 $\tan\theta=m$ 的条件下,求关于 $\sin\theta,\cos\theta$ 的齐次式的问题,解这类问题有两个方法:一是直接求出 $\sin\theta,\cos\theta$ 的值,再代入求解,但这种方法较繁琐.二是将所求式转化为只含 $\tan\theta$ 的代数式,再代入求解,如本题解法.

拓展3 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5},\theta\in(0,\pi)$,求 $\tan\theta$ 的值.

【调研4】 已知:$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=1$,求 $\sin\alpha+\cos\alpha$;$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$;$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$ 的值.

分析 从 $\sin x+\cos x$ 与 $\sin x\cos x$ 的关系 $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$ 入手,采用换元法求解.

解析一 令 $\sin\alpha+\cos\alpha=t$,则 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{t^2-1}{2}$,

$\therefore \sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)=t\cdot\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=1$,

整理得 $t^3-3t+2=0\Rightarrow(t-1)^2(t+2)=0$.

$\because t\neq-2$,$\therefore t=\sin\alpha+\cos\alpha=1$,且 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{t^2-1}{2}=0$,

$\therefore \sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2\cdot0=1$;

$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=1$.

解析二 $\because \sin^3\alpha\leqslant\sin^2\alpha,\cos^3\alpha\leqslant\cos^2\alpha$,$\therefore \sin^3\alpha+\cos^3\alpha\leqslant\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,当且仅当 $\begin{cases}\sin^3\alpha=\sin^2\alpha,\\ \cos^3\alpha=\cos^2\alpha\end{cases}$ 时等号成立,$\therefore \begin{cases}\sin\alpha=0,\\ \cos\alpha=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\cos\alpha=0,\\ \sin\alpha=1,\end{cases}$

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1$.

【知识链接】 (1)凡是遇到 $\sin x+\cos x$ 与 $\sin x\cos x$ 之类的问题,均应采用换元法,令 $\sin x+\cos x=t$,得 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

重点突破

浪花因撞击而美丽,人生因拼搏而精彩.

——常帅 河南省辉县高级中学

读者心语

(2)本题还可推广到一般情形:若 $k\geqslant 2$ 且 $\sin^{2k-1}\alpha+\cos^{2k-1}\alpha=1$,则 $\sin\alpha=1$, $\cos\alpha=0$ 或 $\sin\alpha=0$, $\cos\alpha=1$ 若 $\sin^{2k}\alpha+\cos^{2k}\alpha=1$,则 $\sin\alpha=\pm1$, $\cos\alpha=0$ 或 $\sin\alpha=0$, $\cos\alpha=\pm1$.

拓展 4　已知 $\sin\alpha>\sin\beta$,那么下列命题成立的是

A. 若 α、β 是第一象限角,则 $\cos\alpha>\cos\beta$

B. 若 α、β 是第二象限角,则 $\tan\alpha>\tan\beta$

C. 若 α、β 是第三象限角,则 $\cos\alpha>\cos\beta$

D. 若 α、β 是第四象限角,则 $\tan\alpha>\tan\beta$

题型三　诱导公式

【调研 5】　化简:$\sin 420°\cos 330°+\sin(-690°)\cos(-660°)$.

分析　应用诱导公式将任意角的三角函数转化成锐角三角函数即可化简.

解析　原式 $=\sin(360°+60°)\cos(360°-30°)+\sin(-2\times360°+30°)\cos(-2\times360°+60°)=\sin 60°\cos 30°+\sin 30°\cos 60°=\sin(60°+30°)=\sin 90°=1$.

【知识链接】　诱导公式可简记为"奇变偶不变,符号看象限",即公式左边的角可写成 $k\cdot 90°\pm\alpha$ 的形式,当 k 为奇数时,正弦和余弦互变,正切和余切互变;当 k 为偶数时,三角函数名称不变. 公式右端的符号由左边的角 $k\cdot 90°\pm\alpha$(把 α 看作锐角)所在的象限及其在该象限的符号来确定.

拓展 5　角 α 终边上有一点 M 满足 $|OM|=2$,2α 终边上有一点 N 满足 $|ON|=4$, P 为线段 MN 的中点.

(1)求以 OP 为终边的角 θ 的正切值(用 α 的函数表示);

(2)若 $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$,求 $\tan\theta$.

【调研 6】　若 $n\in\mathbf{Z}$,在:(1) $\sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)$,(2) $\sin\left(2n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}\right)$,(3) $\sin\left[n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{3}\right]$,(4) $\cos\left[2n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}\right]$ 中,与 $\sin\dfrac{\pi}{3}$ 相等的是

A. (1)和(2)　　B. (3)和(4)　　C. (1)和(4)　　D. (2)和(3)

解析　$\sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{3}, n\text{ 为偶数},\\ \sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right), n\text{ 为奇数}\end{cases}=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{3}, n\text{ 为偶数},\\ -\sin\dfrac{\pi}{3}, n\text{ 为奇数},\end{cases}$

$\sin\left(2n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)=\pm\sin\dfrac{\pi}{3}$,

$\sin\left[n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{3}\right]=\begin{cases}\sin\left[(-1)^n\dfrac{\pi}{3}\right], n\text{ 为偶数},\\ \sin\left[\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{3}\right], n\text{ 为奇数}\end{cases}=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{3}, n\text{ 为偶数},\\ \sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}, n\text{ 为奇数}\end{cases}$

$=\sin\frac{\pi}{3}$，

$\cos[2n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}]=\cos[(-1)^n\frac{\pi}{6}]=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$，

故(3)(4)与$\sin\frac{\pi}{3}$相等，故选B.

【知识链接】 对于$n\pi+\alpha$，若n是偶数，则角$n\pi+\alpha$的三角函数值等于角α的同名三角函数值 若n是奇数，则角$n\pi+\alpha$的三角函数值等于角$\pi+\alpha$的同名三角函数值.

拓展6 已知定义在$\mathbf{R}$上的奇函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上是单调递增的，若$f(\frac{1}{2})=0$，$\triangle ABC$的内角A满足$f(\cos A)<0$，则A的取值范围是

A. $(\frac{2\pi}{3},\pi)$ B. $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ C. $(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ D. $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})\cup(\frac{2\pi}{3},\pi)$

【调研7】 已知函数$f(n)=\sin\frac{n\pi}{6}(n\in\mathbf{N}^*)$，求$f(1)\cdot f(3)\cdot f(5)\cdot\cdots\cdot f(101)$的值.

分析 注意到函数$f(2n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$是周期为6的周期函数，再结合诱导公式不难求解.

解析 $\because f(2n-1)=\sin\frac{(2n-1)\pi}{6}=\sin(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{6})(n\in\mathbf{N}^*)$，

$\therefore f(2n-1)$是周期$T=6$的周期函数.

$f(1)\cdot f(3)\cdot f(5)\cdot\cdots\cdot f(11)=\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{3\pi}{6}\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\sin\frac{7\pi}{6}\cdot\sin\frac{9\pi}{6}\cdot\sin\frac{11\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{6}(-\sin\frac{\pi}{6})\sin\frac{3\pi}{2}(-\sin\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2^4}$，

又$\because$ 从1到101有51个奇数，而$51=8\times6+3$，

$\therefore f(1)\cdot f(3)\cdot f(5)\cdot\cdots\cdot f(101)=(-\frac{1}{2^4})^8\cdot f(1)\cdot f(3)\cdot f(5)=\frac{1}{2^{32}}\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{34}}$.

【知识链接】 一般地，若函数$f(x)$对定义域内的任意x，满足$f(x+T)=f(x)$ $(T>0)$，则称$f(x)$为周期函数，其周期为T. $f(x+T)=f(x)$的变式有：$f(x-a)=f(x+a)$或$f(x+b)=f(x+a)(a\neq b)$，其中周期分别为$|2a|$，$|b-a|$.

值得一提的是，若函数$f(x)$对定义域内的任意x，满足$f(x+2a)=f(-x)$，$f(a+x)=f(a-x)$或$f(a+x)=f(b-x)$，则说明函数$f(x)$的图像分别关于直线$x=a$，$x=a$，$x=\frac{a+b}{2}$对称.

拓展7 设 $f(n)=\cos\left(\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$，求 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\,006)$ 的值.

强化闯关

1. 在△ABC 中，若 $\tan A+\tan B>\tan(A+B)$，则△ABC 的形状是

   A. 正三角形　B. 直角三角形　C. 锐角三角形　D. 钝角三角形

2. 设 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$，且 $\sqrt{1-\sin 2x}=\sin x-\cos x$，则

   A. $0\leqslant x\leqslant\pi$　B. $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{4}$　C. $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}$　D. $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$

3. 若函数 $f(x+2)=\begin{cases}\tan x, x\geqslant 0,\\ \lg(-x), x<0,\end{cases}$ 则 $f\left(\frac{\pi}{4}+2\right)\cdot f(-98)=$______.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin \pi x, x<0,\\ f(x-1)+1, x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}\cos \pi x, x<\frac{1}{2},\\ g(x-1)+1, x\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$ 求 $g\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+g\left(\frac{5}{6}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)$ 的值.

5. 在△ABC 中，若 $\tan A$、$\tan B$ 满足等式 $\tan A\tan B=\tan A+\tan B+3$，求角 C 的取值范围.

6. 在△ABC 中，$A(\cos x,\cos 2x)$，$B(-\sqrt{3}\sin x,-\cos x)$，$C(\lambda,1)$，$0\leqslant x\leqslant\pi$，若△$ABC$ 的重心在 y 轴的负半轴上，求实数 λ 的取值范围.

7. 是否存在角 α,β，$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in(0,\pi)$，使得等式 $\sin(3\pi-\alpha)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$，$\sqrt{3}\cos(-\alpha)=-\sqrt{2}\cos(\pi+\beta)$ 同时成立. 存在，求出 α,β 的值，若不存在，请说明理由.

参考答案

【拓展】

1. B　$\because \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha<0$，$\therefore \sin\alpha\cos\alpha<0$，即 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 异号，$\therefore \alpha$ 在二、四象限，又 $\cos\alpha-\sin\alpha<0$，$\therefore \cos\alpha<\sin\alpha$，由图 2－1－3 知，满足题意的角 α 应在第二象限，故选 B.

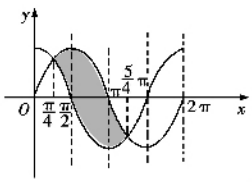

图 2－1－3

2. A　利用特殊情形. 因为 A、B、C 为△ABC 的三个内角，因此，存在 C 为钝角的可能，而 A 必为锐角. 此时结论仍然正确. 而 $\cos A$、$\tan A$、$\cot A$ 均为正数，$\cos C$、$\tan C$、$\cot C$ 均为负数. 因此 B、C、D 均可排除. 故选 A.

3. 在 $\theta\in(0,\pi)$ 时，$\tan\theta$ 的符号不确定，故需要由条件进一步明确 θ 的取值范围，同时求出 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 的值，从而可求得 $\tan\theta$ 的值.

$\because \sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$,两边平方,得

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$,

$\therefore 2\sin\theta\cos\theta=-\frac{24}{25}$,

又$\because \theta\in(0,\pi)$,$\therefore \sin\theta>0$,$\cos\theta<0$,

$\therefore \theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$,且 $\sin\theta-\cos\theta>0$,

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{1+\frac{24}{25}}=\frac{7}{5}$, ①

又$\because \sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$,②

由①②得 $\sin\theta=\frac{4}{5}$,$\cos\theta=\frac{-3}{5}$,

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{4}{3}$.

4. D 当 $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$时,由 $\sin\alpha>\sin\beta$ 得 $\alpha>\beta$,此时 $\cos\alpha<\cos\beta$ 当 $\alpha,\beta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$时,由 $\sin\alpha>\sin\beta$得 $\alpha<\beta$,此时 $\tan\alpha<\tan\beta$ 当 $\alpha,\beta\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$时,由 $\sin\alpha>\sin\beta$ 得 $\alpha<\beta$,此时 $\cos\alpha<\cos\beta$ 而对于 α,β 是第四象限角,由 $\sin\alpha>\sin\beta\Rightarrow\sin^2\alpha<\sin^2\beta\Rightarrow1-\cos^2\alpha<1-\cos^2\beta\Rightarrow\cos^2\alpha>\cos^2\beta\Rightarrow\frac{1}{\cos^2\alpha}<\frac{1}{\cos^2\beta}\Rightarrow\tan^2\alpha<\tan^2\beta$,

$\because \tan\alpha<0$,$\tan\beta<0\Rightarrow\tan\alpha>\tan\beta$. 故选 D.

5. (1) M 点坐标为$(2\cos\alpha,2\sin\alpha)$,$N$ 点坐标为$(4\cos2\alpha,4\sin2\alpha)$,$P$ 点坐标为$(\cos\alpha+2\cos2\alpha,\sin\alpha+2\sin2\alpha)$,则 $\tan\theta=\frac{\sin\alpha+2\sin2\alpha}{\cos\alpha+2\cos2\alpha}$.

(2) $\tan\alpha=\frac{3}{4}$,若 α 属于第一象限,则 $\sec\alpha=\sqrt{1+\tan^2\alpha}=\frac{5}{4}$,$\cos\alpha=\frac{4}{5}$,$\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\sin2\alpha=\frac{24}{25}$,$\cos2\alpha=\frac{7}{25}$,$\tan\theta=\frac{63}{34}$,

若 α 属于第三象限,则 $\sec\alpha=-\frac{5}{4}$,同理有 $\tan\theta=-\frac{11}{2}$.

6. D $f(x)$为奇函数,且在$(0,+\infty)$上单调递增,则在$(-\infty,0)$上也单调递增,当 $\cos A>0$ 时,$f(\cos A)<0=f(\frac{1}{2})$,则 $0<\cos A<\frac{1}{2}$,$\frac{\pi}{3}<A<\frac{\pi}{2}$ 当 $\cos A<0$ 时,$f(\cos A)<0=f(-\frac{1}{2})$,$\cos A<-\frac{1}{2}$,$\frac{2\pi}{3}<A<\pi$. 综上有 $A\in(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})\cup(\frac{2\pi}{3},\pi)$,

重点突破

故选 D.

7. $\because f(n+4)=\cos(\frac{n+4}{2}\pi+\frac{\pi}{4})=\cos[(\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4})+2\pi]=\cos(\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4})=f(n)$，

且 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})+\cos(\pi+\frac{\pi}{4})+\cos(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{4})+$

$\cos(2\pi+\frac{\pi}{4})=-\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=0$，

$\therefore$ 原式 $=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\ 006)=501[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+$

$f(1)+f(2)=-\sqrt{2}$.

【强化闯关】

1. C　由题设知 $\tan A+\tan B>-\tan C$，即 $\tan A+\tan B+\tan C>0$，

而 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan(A+B)\cdot(1-\tan A\cdot\tan B)+\tan C=\tan(\pi-C)\cdot(1-\tan A\cdot\tan B)+\tan C=-\tan C(1-\tan A\cdot\tan B)+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$，

故 $\tan A\tan B\tan C>0$，

从而 $\tan A$、$\tan B$、$\tan C$ 都为正值，故选 C.

2. C　取特殊值. 取 $x=0$ 排除 A，取 $x=\frac{3\pi}{2}$，排除 B、D，故选 C.

3. 2　$\because f(x+2)=\begin{cases}\tan x, x\geqslant 0,\\ \lg(-x), x<0,\end{cases}$ $\therefore f(\frac{\pi}{4}+2)\cdot f(-98)=\tan\frac{\pi}{4}\cdot\lg[-(-100)]$

$=1\times\lg 100=2$.

4. $g(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{3})+g(\frac{5}{6})+f(\frac{3}{4})=\cos\frac{\pi}{4}+[f(\frac{1}{3}-1)+1]+[g(\frac{5}{6}-1)+1]+$

$[f(\frac{3}{4}-1)+1]=\frac{\sqrt{2}}{2}+f(-\frac{2}{3})+g(-\frac{1}{6})+f(-\frac{1}{4})+3=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin(-\frac{2\pi}{3})+$

$\cos(-\frac{\pi}{6})+\sin(-\frac{\pi}{4})+3=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+3=3$.

5. 设 $\tan A\tan B=m$，则 $\tan A+\tan B=m-3$，即 $\tan A$、$\tan B$ 是关于 x 的方程 $x^2-(m-3)x+m=0$ 的两个实数根，故 $\Delta=(m-3)^2-4m\geqslant 0\Rightarrow m\leqslant 1$ 或 $m\geqslant 9$.

在 $\triangle ABC$ 中，$\tan A$、$\tan B$ 至多有一个为负值且都不为零，从而分两类：

若 $\tan A$、$\tan B$ 都为正，则 $\begin{cases}m-3>0,\\ m>0\end{cases}\Rightarrow m>3$；

若 $\tan A$、$\tan B$ 一正一负，则 $m<0$；

综上可得 $m<0$ 或 $m\geqslant 9$.

$\because \tan C=-\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}=\frac{m-3}{m-1}=1-\frac{2}{m-1}$，

$\therefore$ 由 m 的取值范围可得 $\frac{3}{4}\leqslant\tan C<1$ 或 $1<\tan C<3$，

故角 C 的取值范围是：$\left[\arctan\frac{3}{4},\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},\arctan 3\right)$.

6. 依题意得 $\begin{cases}\dfrac{\cos 2x-\cos x+1}{3}<0, ① \\ \dfrac{\cos x-\sqrt{3}\sin x+\lambda}{3}=0, ②\end{cases}$

由①得 $2\cos^2 x-\cos x<0$，$\therefore 0<\cos x<\frac{1}{2}$，

$\because 0\leqslant x\leqslant\pi$，$\therefore \frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$；

由②得 $\lambda=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，

$\because \frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \frac{\pi}{6}<x-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，

$\therefore \frac{1}{2}<\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即 λ 的取值范围是 $(1,\sqrt{3})$.

7. 由 $\sin(3\pi-\alpha)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$，

$\sqrt{3}\cos(-\alpha)=-\sqrt{2}\cos(\pi+\beta)$ 化简得：

$\begin{cases}\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\beta, ① \\ \sqrt{3}\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\beta, ②\end{cases}$

则①^2 + ②^2 得 $\sin^2\alpha+3(1-\sin^2\alpha)=2$，即 $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$，

$\therefore \sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \alpha=-\frac{\pi}{4}$ 或 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，

当 $\alpha=-\frac{\pi}{4}$ 时，由②得 $\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $0<\beta<\pi$，$\therefore \beta=\frac{\pi}{6}$；

当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，由②得 $\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $0<\beta<\pi$，$\therefore \beta=\frac{\pi}{6}$；

于是存在 $\alpha=-\frac{\pi}{4},\beta=\frac{\pi}{6}$ 或 $\alpha=\frac{\pi}{4},\beta=\frac{\pi}{6}$，使两等式同时成立.

因为第一组解与①矛盾，故舍去，所以 $\alpha=\frac{\pi}{4},\beta=\frac{\pi}{6}$.

重点突破

中国的数学专著《九章算术》，是世界杰出的古典数学著作之一，这本书中已引入了负数的概念.

中国数学