命题调研

命题研究与备考策略

本辑《试题调研》调研的知识内容是:三角函数、平面向量、不等式. 通过研究近几年高考对这些内容的考查形式,以及对近几届高三备考的调查,总结归纳一线名师多年的高三教学经验,特提出以下几点,以供参考.

三角函数

1. 考查形式与特点

三角函数是中学里重要的基本初等函数之一,它的定义和性质有十分明显的特征和规律性. 它和代数、几何有着密切的联系,是研究其他部分知识的重要工具,在实际问题中也有着极广泛的应用. 因而是高考对基础知识和基本技能考查的重要内容之一. 从近年高考,特别是06年高考来分析,考查本章内容的形式与特点是:

(1)客观题重基础,有关三角函数的小题其考查重点是三角函数的概念、图像与图像变换、定义域与值域、三角函数的四性、三角函数的化简与求值.

(2)解答题重技能. 三角函数解答题是高考命题常考常新的基础性题型,其命题热点是章节内部的三角函数求值问题,如重庆卷(13)题,北京卷(15)题,安徽卷(17)题等;命题的亮点是跨章节的学科综合命题,如全国卷(Ⅱ)17题,四川卷理(17)题,其命题形式是:三角+向量.

(3)对三角函数的应用,既考查解三角形的知识与方法,又考查运用三角公式进行恒等变换的技能. 主要解法是充分利用三角形内角和定理、正(余)弦定理、面积公式等,并结合三角公式进行三角变换. 如安徽卷(11)题,四川卷理(11)题,湖南卷(16)题等.

(4)综合体现三角函数的工具作用. 由于近年高考题突出能力立意,加强对知识性和应用性考查,故常常在知识的交汇点处出题,如江苏卷(18)题.

2. 命题趋向与预测

(1)与三角函数概念有关的问题

三角函数的概念,在近几年的高考中,主要以选择、填空的形式出现. 考查要点主要是:三角函数值的计算、三角函数的符号的判定、角的象限的判断等.

【调研1】 (2006年陕西卷)"等式 $\sin(\alpha+\gamma)=\sin 2\beta$ 成立"是"α,β,γ 成等差数列"的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既不充分又不必要条件

解析　若 $\sin(\alpha+\gamma)=\sin 2\beta$，则角 $\alpha+\gamma$ 与 2β 或 $\pi-2\beta$ 的终边相同，所以 $\alpha+\gamma=k\pi+(-1)^k\cdot 2\beta, k\in\mathbf{Z}$，于是 α,β,γ 不成等差数列.

若 α,β,γ 成等差数列，则 $\alpha+\gamma=2\beta$，所以 $\sin(\alpha+\gamma)=\sin 2\beta$.

综上，"等式 $\sin(\alpha+\gamma)=\sin 2\beta$ 成立"是"α,β,γ 成等差数列"的必要而不充分条件，故选 B.

点拨　通过本题的解答，同学们应自己归纳总结一些常用的小结论，对提高客观题的解答速度非常有效. 如同名三角函数值相等时角之间的关系（$k\in\mathbf{Z}$）：

若 $\sin\alpha=\sin\beta$，则 $\alpha=k\pi+(-1)^k\cdot\beta$；

若 $\cos\alpha=\cos\beta$，则 $\alpha=2k\pi\pm\beta$；

若 $\tan\alpha=\tan\beta$，则 $\alpha=k\pi+\beta$；

若 $\cot\alpha=\cot\beta$，则 $\alpha=k\pi+\beta$.

（2）与三角函数变换有关的问题

关于三角函数恒等变换，是每年高考的必考点之一. 它不仅考查学生对三角公式的掌握程度，更重要的是体现了学生的灵活应变能力，要求学生不仅要能直接运用公式解决相关问题，更要注意创造运用公式的条件.

【调研 2】　（2006 年江苏卷）$\cot 20°\cos 10°+\sqrt{3}\sin 10°\tan 70°-2\cos 40°=$______.

分析　三角式子中既有切函数，又有弦函数，因此先将切函数化为弦函数. 又注意到题中所涉及角均非特殊角，因此可考虑用和（差）角公式将其变化为特殊角或者通分后相约消去. 化简 $\cos 10°+\sqrt{3}\sin 10°$ 是本题的关键.

解析　$\cot 20°\cos 10°+\sqrt{3}\sin 10°\tan 70°-2\cos 40°=\cot 20°\cos 10°+\sqrt{3}\sin 10°\cot 20°-2\cos 40°=\cot 20°(\cos 10°+\sqrt{3}\sin 10°)-2\cos 40°=2\cot 20°\sin(10°+30°)-2\cos 40°=2\cot 20°\sin 40°-2\cos 40°=4\cos^2 20°-2\cos 40°=2+2\cos 40°-2\cos 40°=2$.

点拨　本题属于给定非特殊角求值，解决这类问题的基本思路有：

①化为特殊角的三角函数值，此法关键在于找出所给非特殊角与特殊角的关系；

②化为正负相消的项，消去非特殊角之后再求值；

③化分子、分母，使之出现公约数进行约分之后再求值.

（3）与三角函数图像、性质有关的问题

三角函数的图像和性质是三角函数的重点内容，学生应在掌握函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的图像和性质的基础上，进一步理解并掌握 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像和性质，除此之外，也应学会在一个周期内确定 ω,φ,A 的方法. 学会建立 $y=\sin x$ 与 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的对应关系并进一步理解其变换过程，以加深对 ω,φ 的理解.

【调研 3】　（2006 年山东卷）已知函数 $f(x)=A\sin^2(\omega x+\varphi)$（$A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}$），且 $y=f(x)$ 的最大值为 2，其图像相邻两对称轴间的距离为 2，并过点（1，2）.

（1）求 φ；

(2)计算$f(1)+f(2)+\cdots+f(2\,008)$.

解析 (1)$y=A\sin^2(\omega x+\varphi)=\frac{A}{2}-\frac{A}{2}\cos(2\omega x+2\varphi)$.

$\because y=f(x)$的最大值为2,$A>0$,$\therefore \frac{A}{2}+\frac{A}{2}=2\Rightarrow A=2$.

又$\because$ 其图像相邻两对称轴间的距离为2,$\omega>0$,

$\therefore \frac{1}{2}(\frac{2\pi}{2\omega})=2$,解得$\omega=\frac{\pi}{4}$.

$\therefore f(x)=\frac{2}{2}-\frac{2}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x+2\varphi)=1-\cos(\frac{\pi}{2}x+2\varphi)$.

$\because y=f(x)$过$(1,2)$点,$\therefore \cos(\frac{\pi}{2}+2\varphi)=-1$.

$\therefore \frac{\pi}{2}+2\varphi=2k\pi+\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$,

又$\because 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,$\therefore \varphi=\frac{\pi}{4}$.

(2)$\because A=2$,$\omega=\varphi=\frac{\pi}{4}$,$\therefore y=1-\cos(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2})=1+\sin\frac{\pi}{2}x$.

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=2+1+0+1=4$.

又$\because y=f(x)$的周期为4,$2\,008=4\times502$,

$\therefore f(1)+f(2)+\cdots+f(2\,008)=4\times502=2\,008$.

点拨 函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$解析式的确定,其关键在于参数$A,\omega,\varphi$的确定.其中,$A$可由图像的最高(低)点确定;$\omega$一般通过周期公式$T=\frac{2\pi}{\omega}$来求解,因而要求出$\omega$,关键在于求出周期.求$\varphi$的方法有:①代入法,即把图像上一个已知点代入$y=A\sin(\omega x+\varphi)$(此时$A,\omega$已知)求解,此时要注意这个已知点是最值点还是零点,如果是零点还要看清它是在递增区间上还是在递减区间上;②五点法,即令$\omega x+\varphi=0$,$\frac{\pi}{2}$,π,$\frac{3\pi}{2}$,2π中的某一个,然后把相应的x值代入即可.注意在求φ的值时要看清题目条件对φ的范围的限制.

(4)三角形中的三角函数问题

三角形中的三角函数既考查解三角形的知识与方法,又考查运用三角公式进行恒等变换的技能.

【调研4】 (2006年四川卷)设a、b、c分别是$\triangle ABC$的三个内角A、B、C所对的边,则$a^2=b(b+c)$是$A=2B$的

A. 充要条件　　B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件　　D. 既不充分又不必要条件

解析 若$a^2=b(b+c)$,则由正弦定理得$\sin^2A=\sin B(\sin B+\sin C)$,则

$\frac{1-\cos 2A}{2}=\frac{1-\cos 2B}{2}+\sin B\sin C$,

$\therefore \frac{1}{2}(\cos 2B-\cos 2A)=\sin B\sin C$,$\sin(B+A)\sin(A-B)=\sin B\sin C$,

又 $\sin(A+B)=\sin C>0$,$\therefore \sin(A-B)=\sin B$,$\therefore A-B=B$,$A=2B$.

若$\triangle ABC$中,$A=2B$,同理可得 $a^2=b(b+c)$,所以 $a^2=b(b+c)$是 $A=2B$ 的充要条件,故选 A.

(注:$\cos\theta-\cos\varphi=-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$.)

点拨　三角形中三角函数问题主要是围绕三角形的边和角的三角函数展开的,从某种意义上来看,这类问题就是有了目标的含边和角的式子的化简问题.解决这种问题通常有两种途径:一是把角的关系转化成边的关系;二是把边的关系转化成角的关系.

(5)用三角函数作工具的问题

由于近年高考题突出能力立意,加强对知识性和应用性考查,故常常在知识的交汇点处出题.用三角函数作工具解答的应用性问题虽然在高考命题中不多见,但在备考时也需要同学们去认真研究.

3. 复习建议及应试对策

①要立足课本,紧扣考纲,夯实基础,突出重点

全国 18 套试卷中的三角函数试题,源于课本,多数题目是课本例题、习题的变式题、组合题.这就启示我们,复习三角函数要坚持源于课本,高于课本,以考纲为纲的原则.复习的重点应是三角函数的性质;并突出把握两个重点,一是三角恒等变形及其应用,二是三角函数的图像与性质,在全面复习的基础上,查找自己的薄弱环节,有针对性地查漏补缺,完善知识网络.

②要重视数学思想方法的复习与应用

对三角函数试题中的选择、填空题,复习中要掌握其常用方法,如数形结合法、验证法、特例法、淘汰法与直接法.充分运用数形结合的思想,把图形和数有机地结合起来,一方面利用函数图像与三角函数线,加深对三角函数性质的理解;另一方面利用三角函数的性质描绘图像,揭示图形的代数本质.对于课本典型例题与习题,重视领悟其蕴含的思想方法,做完题后,要仔细进行反思,就能体会到三角恒等变形的主要途径——变角、变函数、变结构,这样进行以点带面的复习,做一题便将关联的知识与基本方法重温一遍,重点的知识更为突出,知识间的联系更为清晰,掌握的数学思想方法更为完善,日积月累,自己的水平与能力就会逐步得到提高.

平面向量

1. 考查形式与特点

在高考试题中,对平面向量的考查主要体现在三个方面:

(1)主要考查平面向量的概念、性质和运算法则,理解和运用其直观的几何意义,

并能正确地进行计算. 如2006年全国高考山东、四川、河南、河北、江西、安徽等数学试卷中都有这方面的考题.

（2）考查以向量为工具，利用向量的坐标表示、线性运算和数量积等相关知识解决向量、非向量问题中所涉及的长度、角度、垂直、平行（共线）问题. 如2006年全国高考云南、吉林和黑龙江等省的数学试卷中都有这方面的体现.

（3）向量及其运算是新课程的新增内容，由于向量融数、形于一体，具有代数形式和几何形式的双重身份，这使它成为中学数学知识的一个交汇点，成为联系多项内容的媒介. 平面向量与函数、三角函数、数列、不等式、解析几何、立体几何等知识结合的试题成为2006高考试卷的一大亮点. 这充分体现了《考试大纲》要求的‘在知识网络交汇点处命题’的精神，如在2006年山东、陕西高考第21题.

2. 命题趋向与预测

（1）平面向量学科内整合

此类题经常出现在选择题与填空题中，主要考查平面向量的有关概念与性质.

【调研5】（2006年福建卷）已知$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，点$C$在$\angle AOB$内，且$\angle AOC=30°$，设$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$（$m$、$n\in\mathbf{R}$），则$\frac{m}{n}$等于

A. $\frac{1}{3}$　　B. 3　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

分析　由$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0\Rightarrow\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，联想向量的坐标运算，引入直角坐标系化难为易.

解析一　以直线OA、OB分别为x轴、y轴建立直角坐标系，

则$A(1,0)$，$B(0,\sqrt{3})$.

设$\overrightarrow{OC}=\lambda(\cos 30°,\sin 30°)=(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{1}{2}\lambda)$，

由题意$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}=m(1,0)+n(0,\sqrt{3})=(m,\sqrt{3}n)$，

$\therefore\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda=m,\\ \frac{1}{2}\lambda=\sqrt{3}n,\end{cases}$ 解得$\frac{m}{n}=3$，故选B.

解析二　由于$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$，所以可从建立$|\overrightarrow{OC}|$与$|\overrightarrow{OA}|$和$|\overrightarrow{OB}|$的关系来获得结果.

$\because\overrightarrow{OC}^2=(m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB})^2=m^2\overrightarrow{OA}^2+2mn\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+n^2\overrightarrow{OB}^2$，又$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，

$\therefore|\overrightarrow{OC}|^2=m^2|\overrightarrow{OA}|^2+n^2|\overrightarrow{OB}|^2=m^2+3n^2\Rightarrow|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{m^2+3n^2}$.

$\because\angle AOC=30°$，在等式$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$（$m,n\in\mathbf{R}$）的两边同乘以$\overrightarrow{OA}$得，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=m\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}\Rightarrow m=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{m^2+3n^2}$，

$\therefore m^2=9n^2$，由题意 $m>0$，$n>0$，所以 $\frac{m}{n}=3$，故选 B.

点拨 解析一在引入直角坐标系后，利用向量的坐标表示，简洁、明快地得到解答. 解析二引入方程思想，使我们的解题工作一气呵成. 函数法、坐标法、向量法是研究现代数学的重要思想方法. 因此，高考命题者常以它们为载体来命制高考题，且常在同一份高考卷中反复出现，这也就不足为奇了.

（2）平面向量与其他知识相结合

当平面向量给出的形式中含有未知数时，由向量平行或垂直的充要条件可以得到关于该未知数的关系式. 在此基础上，可以设计出有关函数、不等式、三角函数、数列的综合问题.

用向量知识解证立体几何问题，常常比用几何法简便，其优点在于：向量可以使立体几何问题代数化，简单的代数运算取代了复杂的几何证明；此法解题的方向明确，可避免做辅助线及用繁多的定理、公理等进行推理的思维过程. 利用平面向量的知识解决立体几何中求空间角、空间距离及处理垂直关系等问题尤为方便.

【调研 6】（2006 年天津卷）设函数 $f(x)=\frac{1}{x+1}$，点 A_0 表示坐标原点，点 $A_n(n,f(n))(n\in\mathbf{N}^*)$. 若向量 $\boldsymbol{a}_n=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$，$\theta_n$ 是 $\boldsymbol{a}_n$ 与 $\boldsymbol{i}$ 的夹角（其中 $\boldsymbol{i}=(1,0)$），设 $S_n=\tan\theta_1+\tan\theta_2+\cdots+\tan\theta_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$ ______.

分析 解答本题的突破口是：$\tan\theta_n=$ 直线 A_0A_n 的斜率 $=\frac{1}{n(n+1)}$.

解析 由已知向量 $\boldsymbol{a}_n=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_0A_n}=(n,f(n))=(n,\frac{1}{n+1})$，$\therefore$ 点 $A_n(n,\frac{1}{n+1})(n\in\mathbf{N}^*)$，

$\because \boldsymbol{i}=(1,0)$，$\therefore \tan\theta_n=$ 直线 A_0A_n 的斜率 $=\frac{\frac{1}{n+1}-0}{n-0}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

$\therefore S_n=\tan\theta_1+\tan\theta_2+\cdots+\tan\theta_n=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$=1-\frac{1}{n+1}$，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1.$

点拨 本题将向量、函数、数列、极限等知识有机地结合在一起，新颖别致，是不可多得的好题，也是天津卷中的闪光点之一. 题目很好地体现了《考试大纲》在知识的交汇点处命题的原则.

【调研 7】（2006 年北京卷）平面 α 的斜线 AB 交 α 于点 B，过定点 A 的动直线 l 与 AB 垂直，且交 α 于点 C，则动点 C 的轨迹是

A. 一条直线　　B. 一个圆　　C. 一个椭圆　　D. 双曲线的一支

解析一 如图1－1－1所示，设点A在平面α内的射影为O，过O点建立如图所示的空间坐标系，并记$\angle ABO=\theta$，$|AB|=l$，则有$A(0,0,l\sin\theta)$，$B(0,l\cos\theta,0)$，设动点C为$(x,y,0)$，则有：

$\overrightarrow{AC}=(x,y,-l\sin\theta)$，$\overrightarrow{AB}=(0,l\cos\theta,-l\sin\theta)$，

由$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，即$(x,y,-l\sin\theta)\cdot(0,l\cos\theta,-l\sin\theta)=0$，所以$yl\cos\theta+l^2\sin^2\theta=0$，这是一个直线方程. 故选A.

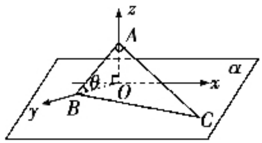

图1－1－1

解析二 ∵过定点A的动直线l与AB垂直，∴直线l在过A点且垂直于直线AB的平面β内，∵α,β的交线为一条直线，∴动点C的轨迹是一条直线. 故选A.

点拨 求解以空间图形为载体的轨迹问题的基本思路是：要善于把立体几何问题转化到平面上，再联合运用平面几何、立体几何、解析几何和向量等知识去求解，实现立体几何到解析几何的过渡.

3. 复习建议及应试对策

本章考题大多数是课本的变式题，因此，掌握双基、精通课本是本章关键. 同时有两点应注意：

(1)在解决关于向量的问题时，一是要善于运用向量的平移、伸缩、合成、分解等变换，正确地进行向量的各种运算，并从中体会用向量处理问题的优越性；二是向量的坐标运算体现了数与形的密切结合和互相转化的思想，所以要通过向量法和坐标法的运用，进一步体会用数形结合思想解决数学问题的便利.

(2)要在回顾和梳理基础知识的基础上，突出平面向量与其他知识的综合运用，渗透用向量解决问题的思想方法，提高分析问题与综合运用知识解决问题的能力，从而站在新的高度来认识和理解向量.

不等式

1. 考查形式与特点

纵观近年来的高考试题，单独考不等式的题目占分不多，但涉及不等式的知识、方法和技巧的问题往往占有较大的比例，其中不等式常常与下列知识相结合考查.

(1)不等式性质常与指数函数、对数函数、三角函数性质相结合，进行综合考查，一般多以选择题的形式出现，有时也与充要条件、函数单调性等知识结合，一般试题难度不大.

(2)不等式的解法往往与函数结合，考查学生的运算能力、等价转换的思想、数形结合和分类讨论的思想.

(3)证明不等式是理科考查的重点，经常与函数、数列、导数、向量等知识结合在一起进行考查. 主要考查学生对不等式的证明方法，尤其是数学归纳法、比较法、综合法和放缩法的掌握情况.

2. 命题趋向与预测

(1)与不等式及其基本性质有关的问题

此类考题要求学生会利用不等式的性质结合已知条件比较式子大小,判断与不等式有关结论是否成立或利用不等式研究变量范围等.

(2)与不等式解法有关的问题

此类题目主要考查学生的运算能力、等价转化思想、数形结合思想、分类讨论思想以及分析、解决问题的能力,要求学生熟悉非整式不等式转化方法和简单高次不等式解法.

【调研8】 (2006年湖南卷)设函数$f(x)=\frac{x-a}{x-1}$,集合$M=\{x|f(x)<0\}$,$P=\{x|f'(x)>0\}$,若$M\subsetneqq P$,则实数a的取值范围是

A. $(-\infty,1)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

分析　利用导数化简集合$P=\{x|f'(x)>0\}$是本题的突破口.

解析　若$a>1$时,$M=\{x|1<x<a\}$;若$a<1$时,$M=\{x|a<x<1\}$;$a=1$时,$M=\varnothing$.

$\because f(x)=\frac{x-a}{x-1}$,$\therefore f'(x)=\frac{(x-1)-(x-a)}{(x-1)^2}>0$,$\therefore a>1$时,$P=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$;$a<1$时,$P=\varnothing$. 所以$M\subsetneqq P$的充要条件是$a>1$,故选C.

点拨　解决这类集合综合问题,要透过现象看本质,利用不等式、导数等知识,弄清集合中到底含有哪些元素,再利用集合知识求解即可.

(3)与不等式的证明有关的问题

不等式证明经常与函数、数列、导数、向量等知识结合起来考查,综合性较强,灵活性较大,具有较好的区分度.

【调研9】 (2006年福建卷)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,$a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)证明:$\frac{n}{2}-\frac{1}{3}<\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

分析　第(2)问用放缩法找出下列关系,是问题得以解决的突破口,

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^k}\leqslant\frac{a_k}{a_{k+1}}<\frac{1}{2}$,$k=1,2,\cdots,n$.

解析　(1)$\because a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$,$\therefore a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,

$\therefore \{a_n+1\}$是以$a_1+1=2$为首项,2为公比的等比数列.

$\therefore a_n+1=2^n$,即$a_n=2^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)$\because \frac{a_k}{a_{k+1}}=\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}=\frac{2^k-1}{2(2^k-\frac{1}{2})}<\frac{1}{2}$,$k=1,2,\cdots,n$.

$\therefore \frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{2}$.

$\because \frac{a_k}{a_{k+1}}=\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2^{k+1}-1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\times2^k+2^k-2}\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^k}$,$k=1$,

$2,\cdots,n$.

$$\therefore \frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}\geqslant\frac{n}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{n}{2}-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)>\frac{n}{2}-\frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{n}{2}-\frac{1}{3}<\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{2}\left(n\in\mathbf{N}^*\right).$$

点拨　不等式与数列的综合问题在近年的高考中时有出现,近两年更是经常以压轴题形式出现,因此不等式与数列的综合题是高考的重点和难点.数列中的不等式证明常用的方法是:比较法、数学归纳法和放缩法等.

(4)与不等式应用有关的问题

这类考题通常与函数、导数和向量等知识结合,考查学生综合运用数学基本知识解决问题的能力.题型通常为运用不等式确定函数性质、运用不等式求参数范围、运用不等式性质判断大小等.

【调研10】　(2006年福建卷)统计表明,某种型号的汽车在匀速行驶中每小时的耗油量y(升)关于行驶速度x(千米/小时)的函数解析式可以表示为:$y=\frac{1}{128\ 000}\cdot x^3-\frac{3}{80}x+8\ (0<x\leqslant120)$.已知甲、乙两地相距100千米.

(1)当汽车以40千米/小时的速度匀速行驶时,从甲地到乙地要耗油多少升;

(2)当汽车以多大的速度匀速行驶时,从甲地到乙地耗油最少?最少为多少升?

分析　将实际问题转化为数学问题时,"每小时的耗油量"与"从甲地到乙地的耗油量"是不同的概念不能混淆.

解析　(1)当$x=40$时,汽车从甲地到乙地共行驶了$\frac{100}{40}=2.5$小时,$\therefore$要耗油$\left(\frac{1}{128\ 000}\times40^3-\frac{3}{80}\times40+8\right)\times2.5=17.5$(升).

(2)当速度为x千米/小时,汽车从甲地到乙地行驶了$\frac{100}{x}$小时,设耗油量为$h(x)$升,依题意得:

$$h(x)=\left(\frac{1}{128\ 000}x^3-\frac{3}{80}x+8\right)\cdot\frac{100}{x}=\frac{1}{1\ 280}x^2+\frac{800}{x}-\frac{15}{4}\ (0<x\leqslant120),$$

$$=\frac{1}{1\ 280}x^2+\frac{400}{x}+\frac{400}{x}-\frac{15}{4}\geqslant3\sqrt[3]{\frac{1}{1\ 280}x^2\cdot\frac{400}{x}\cdot\frac{400}{x}}-\frac{15}{4}=\frac{45}{4},$$

当且仅当$\frac{1}{1\ 280}x^2=\frac{400}{x}$,即$x=80$时取等号.

所以当$x=80$时,$h(x)$取得最小值11.25.

$\therefore$当汽车以80千米/小时的速度匀速行驶时,从甲地到乙地耗油最少,最少为

命题调研

11.25 升.

点拨　考查应用意识与建模能力已是高考命题改革的新方向，其中应用题与不等式相结合是高考的热点，解答数学应用问题的关键在于建立数学模型.

3. 复习建议及应试对策

(1)重视数学思想方法的复习

根据本章命题趋向来看，我们应该加强对数学思想方法的复习.

在复习不等式的解法时，加强等价转化思想的训练力度. 由于解不等式的过程实质就是一个等价转化的过程，通过等价转化可以将复杂的不等式(组)转化为简单的不等式(组)，从而快速、准确求解.

加强分类讨论思想的复习. 在解不等式或证不等式的过程中，如遇含有参数的问题，这时可能要对参数进行分类讨论. 在讨论的过程中，要合理分类，做到不重不漏.

加强函数与方程思想在不等式中的应用训练. 不等式、函数、方程三者密不可分，相互联系，相互转化. 如求参数的取值范围问题，函数与方程思想是解决这类问题的重要方法.

在不等式的证明中，要加强化归思想的复习. 证明不等式的过程是一个把已知条件转化为要证结论的过程，它既可考查学生的基础知识，又可考查学生分析问题和解决问题的能力. 正因为证明不等式是高考考查学生代数推理能力的重要素材，所以在复习中应特别加以关注.

(2)强化不等式的应用

不等式单独命题较少，常在函数、数列、立几、解几和实际应用问题的试题的解题过程中涉及. 加强不等式应用能力，是提高解综合问题能力的关键，因此，在复习时应加强这方面知识和能力的训练，提高应用意识，总结不等式的应用规律，如在实际问题应用中，主要有构造不等式求解或构造函数求函数最值等方法，在求最值时要注意等号成立的条件，避免不必要的错误.