命题调研

命题研究与备考策略

本辑《试题调研》调研的内容是集合、常用逻辑用语、函数概念与基本初等函数Ⅰ、导数、复数. 通过分析和研究高中数学新课程标准,结合新课标试验地区的教学实际,研究和借鉴近几年高考试题对这些内容的考查形式,总结归纳一线教师多年的高三复习备考经验,特提出以下几点,以供参考.

集合

1. 考查形式与特点

集合是高中数学最基本的概念,集合语言是现代数学的基本语言,因而在每年的高考中都是必考内容. 考查时以选择题、填空题为主,一般难度不大. 考查的热点有以下几个方面:

一是考查具体集合的关系判断和集合的运算,解决这类问题的关键在于正确理解集合元素所具有的属性的含义,弄清集合的元素所具有的形式以及集合中含有哪些元素.

二是考查抽象集合的关系判断以及运算,解决这类问题的关键在于把抽象的集合具体化、形象化.

三是考查集合语言和集合思想的运用(如求函数的定义域、值域、方程或不等式的解集、排列组合等问题),也就是把集合作为一种工具来考查.

2. 命题趋向预测

(1)集合的概念

在高考中集合概念的考查一般有两个方面:一是集合本身的内容,即集合的概念、集合之间的关系,二是考查集合的工具性,即考查集合的应用和集合语言的运用.

【调研1】 **(2006年山东卷)定义集合运算:**$A\oplus B=\{z\mid z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$**,设集合**$A=\{0,1\}$**,**$B=\{2,3\}$**,则集合**$A\oplus B$**的所有元素之和为**

A. 0　　B. 6　　C. 12　　D. 18

解析　**当**$x=0$**时,无论**y**为何值,都有**$z=0$**;当**$x=1,y=2$**时,由题意**$z=6$**;当**$x=1,y$

$=3$ 时,由题意 $z=12$,故集合 $A\oplus B=\{0,6,12\}$,所以所有元素之和等于 18,故选 D.

探究　**求解集合概念方面的问题时,首先要明确集合的元素是什么,有哪些元素,其次要根据集合元素的三个性质(确定性、互异性、无序性)进行检验,特别是集合元素的互异性,常常是作为检验的标准和依据,集合的互异性是指相同的对象在归入一个集合时,只能算作一个元素.**

(2)集合的运算

在高考中,关于集合的运算是考查的重点,特别是以集合为载体考查函数的定义域、值域、方程或不等式的解集、曲线间的相交等问题.

【调研 2】 (2006 年福建卷)已知全集 $U=\mathbf{R}$,且 $A=\{x||x-1|>2\}$,$B=\{x|x^2-6x+8<0\}$,则 $(\complement_U A)\cap B$ 等于

A. $[-1,4)$　　B. $(2,3)$　　C. $(2,3]$　　D. $(-1,4)$

解析　$|x-1|>2\Rightarrow x>3$ 或 $x<-1$,即 $A=\{x|x>3$ 或 $x<-1\}$,

$x^2-6x+8<0\Rightarrow 2<x<4$,即 $B=\{x|2<x<4\}$,$\complement_U A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$,

$\therefore (\complement_U A)\cap B=\{x|2<x\leqslant 3\}$,故选 C.

探究　**在进行集合的运算之前要先对每一个集合进行化简,同时搞清楚集合中元素的特点,掌握好集合运算的顺序,对于集合的交、并、补等运算,应充分结合韦恩图、数轴等工具,使运算更加直观、简洁.**

3. 复习建议及应试对策

(1)对于集合内容的复习,一是要深刻理解并准确掌握集合、元素、子集、真子集、交集、并集、补集等的概念和含义,以便更准确地解答有关集合的概念问题;二是强化数形结合思想,自觉地运用韦恩图、数轴的直观性,帮助分析和理解题意,提高形象思维能力,进一步提高抽象思维能力.

(2)解决集合问题一定要吃透概念,善于推理判断,并掌握集合中元素互异性的利用、对集合为空集的讨论、对特定系数的取舍等,同时要注意集合与函数、不等式、方程、三角函数、解析几何、立体几何等知识的密切联系与综合应用.

(3)要重视对本部分内容中等价转化、分类讨论、数形结合、补集等数学思想方法的复习和运用. 要通过对一些典型问题的分析、研究和解答,从中找到有规律性的一般方法.

常用逻辑用语

1. 考查形式与特点

逻辑是研究思维形式及其规律的一门基础学科. 基本的逻辑知识是认识问题、研

托尔斯泰的分数:"一个人就好像一个分数,他的实际才能好比分子,而他对自己的估价好比分母. 分母越大,则分数的值就越小."

究问题不可缺少的工具,因此也是高考的知识点之一.在高考中对常用逻辑用语的考查主要有两个方面:

一是直接对它考查,主要有命题真假的判断、复合命题的构成、命题的四种形式、充分必要条件的判断、全称量词和存在量词的应用等,其中充要条件的判断和命题真假的判断是高考的热点,这是因为在充要条件和命题真假的判断问题中,都要以其他章节的内容为载体,故更容易实现知识点的交汇和融合.这类题目虽然有一定的综合性,但难度一般不会太大,主要以选择题和填空题的形式考查.

另一方面,就是将逻辑知识作为工具来考查,事实上,高考试题都离不开命题,我们要注重命题的灵活运用,并使之成为我们理解题意、分析解决问题的得力助手.

2. 命题趋向预测

(1)充要条件的判断

充要条件的判断是高考的一个热点题型,因为这种题型一方面可以考查充要条件的概念,另一方面,也能和其他相关数学知识联系起来,所以近几年的高考试题中每年必考.

【调研3】 (2006年陕西卷)"等式 $\sin(\alpha+\gamma)=\sin 2\beta$"是"$\alpha,\beta,\gamma$ 成等差数列"的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分又不必要条件

解析　由 $\sin(\alpha+\gamma)=\sin 2\beta$ 成立,则有 $\alpha+\gamma=2\beta+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,或 $\alpha+\gamma=\pi-2\beta+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以显然 α,β,γ 不构成等差数列;但当 α,β,γ 成等差数列时一定有 $\alpha+\gamma=2\beta$,即 $\sin(\alpha+\gamma)=\sin 2\beta$.故前者是后者的必要不充分条件.故选B.

探究　在进行充分必要条件的推理判断中要注意以下几点:一是要弄清先后顺序,"A 的充分不必要条件是 B"是指 B 能推出 A 且 A 不能推出 B,而"A 是 B 的充分不必要条件"则是指 A 能推出 B 且 B 不能推出 A;二是要善于举出反例,如果从正面判断或证明一个命题的正确或错误不易进行时,可以通过举出恰当的反例来说明一个命题是错误的;三是注意进行转化,根据命题之间的关系我们可知:如果 p 是 q 的充分不必要条件,那么 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件,同理,如果 p 是 q 的必要不充分条件,那么 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件,如果 p 是 q 的充要条件,那么 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充要条件.

(2)命题真假的判断

命题真假的判断可以是单独考查,也有可能和其他知识联系起来,在解答题中出现.一是通过复合命题的真假来得到简单命题的真假,二是通过命题的四种形式之间

的关系考查命题的真假，并与有关数学知识联系.

【调研4】（2006年上海卷）在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A,B 两点.

（1）求证："如果直线 l 过点 $(3,0)$，那么"$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$"是真命题.

（2）写出（1）中命题的逆命题，判断它是真命题还是假命题.

解析　（1）设 l：$x=ty+3$，代入抛物线 $y^2=2x$，消去 x，得 $y^2-2ty-6=0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

$\therefore y_1+y_2=2t$，$y_1y_2=-6$，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=(ty_1+3)(ty_2+3)+y_1y_2=t^2y_1y_2+3t(y_1+y_2)+9+y_1y_2=-6t^2+3t\cdot 2t+9-6=3$，$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$，故为真命题.

（2）（1）中命题的逆命题是：若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$，则直线 l 过点 $(3,0)$，这是一个假命题. 证明如下：

设 l：$x=ty+b$，代入抛物线 $y^2=2x$，消去 x，得 $y^2-2ty-2b=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=2t$，$y_1y_2=-2b$，

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=(ty_1+b)(ty_2+b)+y_1y_2=t^2y_1y_2+bt(y_1+y_2)+b^2+y_1y_2=-2bt^2+bt\cdot 2t+b^2-2b=b^2-2b$，

令 $b^2-2b=3$，得 $b=3$ 或 $b=-1$. 此时直线 l 过点 $(3,0)$ 或 $(-1,0)$，故逆命题为假命题.

探究　本题将命题的有关知识与解析几何交汇在一起考查，这是高考的一个热点题型. 除了直接根据相关的数学知识判断外，还经常用到命题的各种形式之间的等价性，例如：原命题与其逆否命题是等价的，否命题和逆命题也是等价的，在直接判断一个命题不易入手时，可通过判断与其等价命题的真假来得到相应的结论. 另外，对于复合命题真假的判断，一定要牢记各种复合命题的真值表，熟练掌握复合命题的真假与各简单命题之间的关系.

3. 复习建议及应试对策

（1）对常用逻辑用语的复习，应重在掌握命题、四种命题、充要条件、全称量词和存在量词等基本概念和基础知识，熟练掌握命题真假的判断、四种命题的构成、充要条件的判断的基本方法，重在掌握常规的题型.

（2）高考对常用逻辑用语的考查，必然是以其他知识为载体，所以在复习时，除了狠抓基本概念和基本方法的学习，还要重视综合，通过与其他知识进行综合，提高解题能力.

（接上）用"分"来计算时间的人比用"小时"来计算时间的人的时间多59倍."

函数

1. 考查形式与特点

函数是高中数学的核心内容，又是学习高等数学的基础，也是最能够体现学生能力和水平的学习内容，因此历来是高考的重点. 预测在2007年的高考中，对函数知识的考查仍旧会有以下特点：

(1)全方位 近几年全国各地的高考试题中，函数的所有知识点都考过，但每年函数知识点的覆盖率一直没有减小.

(2)多层次 在每年全国各地的高考试题中，函数试题低档、中档、高档难度都有，且选择、填空、解答题型齐全.

(3)巧综合 为了突出函数在中学中的主线地位，高考强化了函数与其他知识的渗透. 加大了以函数为载体的多种方法、多种能力，包括 阅读、理解、表述、信息处理等能力的综合程度.

(4)变角度 处于‘立意’和‘创新’的需要，函数试题设置问题的角度和方式也在不断创新，重视函数思想的考查，加大了函数应用题、探索题和信息迁移题的考查力度，从而使函数考题显得新颖、生动、灵活.

2. 命题趋向预测

(1)函数的概念和性质

函数的概念和基本性质，如 :单调性、奇偶性、周期性等是每年必考的内容，一般在选择题和填空题中出现，既可以是单个性质的考查，也可能是多种性质综合在一起考查.

【调研5】 **(2006年北京卷)已知** $f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a, & x<1,\\ \log_a x, & x\geqslant 1\end{cases}$ **是$(-\infty,+\infty)$上的减函数，那么a的取值范围是**

A. $(0,1)$　　B. $(0,\frac{1}{3})$　　C. $[\frac{1}{7},\frac{1}{3})$　　D. $[\frac{1}{7},1)$

解析　**当$x=1$时，$\log_a x=0$，若为R上的减函数，则$(3a-1)x+4a>0$，在$x<1$上恒成立.**

令$g(x)=(3a-1)x+4a$，则$g(x)>0$，在$x<1$上恒成立，故$3a-1<0$且$g(1)\geqslant 0$，及$\begin{cases}3a-1<0,\\ 3a-1+4a\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow \frac{1}{7}\leqslant a<\frac{1}{3}$**，故选**C.

命题调研

数学格言

华罗庚的减号:“在学习中要敢于做减法，就是减去前人已经解决的部分，看看还有那些问题没有解决，需要我们去探索解决.”

探究　本题考查了分段函数的单调性，判断分段函数的单调性可分段进行，但要注意整个定义域上的单调性，在各段上单调性相同的分段函数，在整个定义域上不一定是单调函数，因此，要特别注意每相邻两段的单调性；另外，求分段函数的单调性时，如能借助函数的图像，则可以更直观地求出函数的单调区间.

(2) 函数综合问题

函数综合问题主要以函数为载体，与方程、不等式的内容相结合，考查学生对函数知识的综合运用能力，其中重点考查逻辑推理能力、抽象思维能力、函数与方程思想、数形结合思想等.

【调研 6】 (2006 年浙江卷) 设 $f(x)=3ax^2+2bx+c$，若 $a+b+c=0$，$f(0)f(1)>0$，求证：

(1) 方程 $f(x)=0$ 有实根；

(2) $-2<\frac{a}{b}<-1$；

(3) 设 x_1,x_2 是方程 $f(x)=0$ 的两个实根，则 $\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant|x_1-x_2|<\frac{2}{3}$.

解析　(1) 若 $a=0$，则 $b=-c$，$f(0)f(1)=c(3a+2b+c)=-c^2\leqslant0$，与已知矛盾，$\therefore a\neq0$. 方程 $3ax^2+2bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=4(b^2-3ac)$，由条件 $a+b+c=0$，消去 b，得 $\Delta=4(a^2+c^2-ac)=4[(a-\frac{1}{2}c)^2+\frac{3}{4}c^2]>0$，故方程 $f(x)=0$ 有实根.

(2) 由 $f(0)f(1)>0$ 得 $c(3a+2b+c)>0$，而 $a+b+c=0$，$\therefore(a+b)(2a+b)<0$，$\because a^2>0$，$\therefore(1+\frac{b}{a})(2+\frac{b}{a})<0$，故 $-2<\frac{a}{b}<-1$.

(3) 由条件，知 $x_1+x_2=-\frac{2b}{3a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{3a}=-\frac{a+b}{3a}$，

$\therefore(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{4}{9}(\frac{b}{a}+\frac{3}{2})^2+\frac{1}{3}$，$\because -2<\frac{b}{a}<-1$，

$\therefore\frac{1}{3}\leqslant(x_1-x_2)^2<\frac{4}{9}$，故 $\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant|x_1-x_2|<\frac{2}{3}$.

探究　本题以二次函数为载体，考查三个"二次"（二次函数、二次方程、二次不等式）的综合问题. 解决这类问题主要以二次函数为主线，寻找问题的突破口，另外还要充分利用一元二次方程根与系数的关系建立参数之间的联系.

3. 复习建议及应试对策

(1) 认真落实本部分的每一个知识点，把握重点. ①对每种基本初等函数的解析

数学格言　爱迪生的加号："天才 $=1\%$ 的灵感 $+99\%$ 的血汗."

式、图像、定义域、值域、单调性、奇偶性等必须在理解的基础上牢固记忆;②掌握函数图像的变换形式:对称变换、平移变换、伸缩变换等;③掌握函数单调性和奇偶性的判断方法和步骤,加强对函数单调性和奇偶性应用的训练;④掌握指数式和对数式大小的比较,简单的指数方程和对数方程以及指数不等式和对数不等式的解法;⑤掌握复合函数的单调性、定义域、值域等的解法;⑥了解常见的函数模型及其在实际问题中的应用.

(2)掌握含有参变量的函数问题的求解,掌握变量的分离、集中、代换、化归、分类等解题方法和技巧.含有参变量的函数问题是高考的重点和热点,要高度重视,加强训练.

(3)以函数知识为依托,强化思想方法训练.①数形结合思想是解决函数问题的重要方法,特别注意利用函数图像解题;②善于转化命题,引进变量建立函数,运用变化的方法、观点解决问题.

(4)注意在实际应用题中建立函数模型或者应用函数思想建立方程与不等式.这就需要对已知条件综合分析、归纳与抽象,并与熟知的函数模型相比较,以确定函数模型的种类,从而建立相关函数模型.

导数

1. 考查形式与特点

导数是高中数学的一个重要内容,导数本身已经成为解决数学问题的重要工具,不论是研究函数的性质,还是解决不等式的证明问题和方程根的判断问题,还是解决曲线的切线问题,导数都发挥着非常重要的作用,所以在近几年的高考中,对导数的考查在逐步加强,从题量上和题目的难度上都有了很大的提高,全国各地的高考试卷中都有关于导数的试题.一般地高考对导数的考查形式多样,难易均有,可以在选择题和填空题中出现,主要以导数的运算、导数的几何意义、导数的应用为主(研究单调性、极值和最值等);也更容易在解答题中出现,有时候作为压轴题,这时主要考查导数的综合应用,往往与函数、方程、不等式、数列、解析几何等联系在一起.

2. 命题趋向预测

(1)导数的运算

由于新课标中对数列极限和函数极限没有专门学习,所以对导数的概念的要求不是很高,因此对导数运算的考查是高考对导数考查的一个重点内容.在导数的运算中,重点考查常见函数的导数、导数的四则运算法则等.

【调研7】 (2006年全国卷Ⅰ)设函数$f(x)=\cos(\sqrt{3}x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$.若$f(x)$

$+f'(x)$是奇函数，则$\varphi=$______.

解析　由于$f'(x)=-\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x+\varphi)$，所以$f(x)+f'(x)=\cos(\sqrt{3}x+\varphi)-\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x+\varphi)=2\sin(\sqrt{3}x+\varphi+\frac{5}{6}\pi)$，若$f(x)+f'(x)$是奇函数，则$f(0)=0$，即$0=2\sin(\varphi+\frac{5}{6}\pi)$，所以$\varphi+\frac{5}{6}\pi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又因为$0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$.

探究　本题主要考查了三角函数的导数运算以及奇函数的性质. 其中能够正确地进行三角函数的求导运算是解决本题的关键，对于三角函数、幂函数、指数函数、对数函数等，要熟练地掌握它们的导数公式，因为导数的运算是导数应用的前提和基础.

（2）导数的应用

导数的应用是高考对导数考查的一个重点内容，也是近几年高考的一个热点内容. 导数的应用主要包括以下几个方面：利用导数研究函数的单调性、研究函数的极值和最值、利用导数的几何意义解决曲线的切线问题、利用导数的物理意义解决简单的物理问题等等.

【调研 8】（2006 年全国卷Ⅰ）已知函数$f(x)=\frac{1+x}{1-x}e^{-ax}$.

（1）设$a>0$，讨论$y=f(x)$的单调性；

（2）若对任意$x\in(0,1)$恒有$f(x)>1$，求a的取值范围.

解析　（1）$f(x)$的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. 对$f(x)$求导数得$f'(x)=\frac{ax^2+2-a}{(1-x)^2}e^{-ax}$.

①当$a=2$时，$f'(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^2}e^{-2x}$，$f(x)$在$(-\infty,0)$，$(0,1)$和$(1,+\infty)$均大于0，$\therefore f(x)$在$(-\infty,1)$和$(1,+\infty)$为增函数

②当$0<a<2$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(-\infty,0)$和$(1,+\infty)$上为增函数.

③当$a>2$时，$0<\frac{a-2}{a}<1$. 令$f'(x)=0$，解得$x_1=-\sqrt{\frac{a-2}{a}}$，$x_2=\sqrt{\frac{a-2}{a}}$.

当x变化时，$f'(x)$和$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-\sqrt{\frac{a-2}{a}})$	$(-\sqrt{\frac{a-2}{a}},\sqrt{\frac{a-2}{a}})$	$(\sqrt{\frac{a-2}{a}},1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	−	+	+
$f(x)$	↗	↘	↗	↗

《试题调研》（第二辑）

$\therefore f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{a-2}{a}}\right)$，$\left(\sqrt{\frac{a-2}{a}},1\right)$，$(1,+\infty)$ 上为增函数. $f(x)$ 在 $\left(-\sqrt{\frac{a-2}{a}},\sqrt{\frac{a-2}{a}}\right)$ 上为减函数.

(2) ①当 $0<a\leqslant 2$ 时，由(1)知，对任意 $x\in(0,1)$ 恒有 $f(x)>f(0)=1$.

②当 $a>2$ 时，取 $x_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-2}{a}}\in(0,1)$，则由(1)知 $f(x)<f(0)=1$.

③当 $a\leqslant 0$ 时，对任意 $x\in(0,1)$，恒有 $\frac{1+x}{1-x}>1$，且 $\mathrm{e}^{-ax}\geqslant 1$，

得 $f(x)=\frac{1+x}{1-x}\mathrm{e}^{-ax}\geqslant\frac{1+x}{1-x}>1$.

综上，当且仅当 $a\in(-\infty,2]$，对任意 $x\in(0,1)$ 恒有 $f(x)>1$.

探究　利用导数研究不等式恒成立问题是导数应用的一个重要方面. 一般地，解决不等式恒成立问题的常用策略是将其转化为求最值问题来解决，一是把要求范围的参数与其他部分分离，求出另一部分的最值，根据不等式的方向建立关于参数的不等式进行求解，二是直接用参数表示出相应函数的最值，建立不等式求其参数范围.

3. 复习建议及应试对策

(1) 对于导数的复习，应抓住两条主线，一是导数的运算，二是导数的应用. 对于导数的运算，要在了解导数概念的基础上，熟练地掌握常见函数的导数公式，掌握导数的四则运算法则，了解简单的复合函数的求导法则，因为导数运算是导数应用的前提，必须要做到非常熟练. 对于导数的应用，应重点掌握利用导数研究函数单调性、极值和最值、曲线的切线等问题的一般方法，在此基础上掌握利用导数研究不等式证明及恒成立、方程根的讨论、函数图像等问题.

(2) 注意在解题中总结规律，一般来说，利用导数解决的问题，其所涉及的函数往往具有明显的特征，例如：三次函数等高次函数，非常规函数(由基本初等函数构成)等，这些函数尤其适合用导数解决.

(3) 在导数的复习中，要特别注意等价转化、分类讨论、数形结合等数学思想方法的训练，在解决导数的综合应用题中，这些思想方法始终贯穿其中，是正确解决问题的关键.

复数

1. 考查形式与特点

从近几年高考试题看，高考对于复数试题的考查要求较低，试题难度不大，均在

“易”或“较易”的层次，相当数量的题来源于教材，多为选择或填空题. 复数的代数运算年年必考，其试题活而不难，主要考查学生灵活运用知识的能力，复数的几何意义也是考查的一个重点. 随着新教材的推广使用，复数在高考中的地位逐渐减弱，一般情况下只考查一个选择题或填空题.

2. 命题趋向预测

(1) 复数的概念与运算

复数的概念是高考对复数考查的一个主要内容，重点是判断一个复数是实数、纯虚数的条件，求所含参数的取值等；复数的运算则以代数运算为主，考查复数的加法、减法、乘法与除法.

【调研9】 (2006年全国卷Ⅰ)如果$(m^2+\mathrm{i})(1+m\mathrm{i})$是实数，则实数$m=$

A. 1　　B. -1　　C. 4　　D. -4

解析一　$(m^2+\mathrm{i})(1+m\mathrm{i})=m^2+m^3\mathrm{i}+\mathrm{i}+m\mathrm{i}^2=m^2-m+(m^3+1)\mathrm{i}$.

$\because$ 其为实数，$\therefore m^3+1=0$，$\therefore m=-1$. 故选B.

解析二　代入验证法. 将$m=-1$代入检验，可知. 故选B.

探究　复数及其相关的概念是高考对复数考查的重点内容，因此要熟练地掌握复数、虚数、纯虚数等的定义，弄清复数$z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$成为实数、虚数、纯虚数的条件，尤其是纯虚数的条件$\begin{cases}x=0,\\y\neq0,\end{cases}$更是考试的热点，也是容易出错的地方.

(2) 复数的几何意义

复数的几何意义也是高考对复数考查的一个重点，要弄清复数与复平面上的点之间的一一对应关系，会判断一个复数对应的点在复平面上的位置. 反之，能够根据复数对应点的位置，得到复数的实部与虚部之间的关系.

【调研10】 (2004年北京卷)满足条件$|z-\mathrm{i}|=|3+4\mathrm{i}|$的复数$z$在复平面上对应点的轨迹是

A. 一条直线　　B. 两条直线　　C. 圆　　D. 椭圆

解析一　设$z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，代入$|z-\mathrm{i}|=|3+4\mathrm{i}|$中，得$|x+(y-1)\mathrm{i}|=|3+4\mathrm{i}|$，$\therefore \sqrt{x^2+(y-1)^2}=5$，即$x^2+(y-1)^2=25$，$\therefore$ 复数z在复平面上对应的点的轨迹是以$(0,1)$为圆心，以5为半径的圆.

解析二　因为$|z-\mathrm{i}|=|3+4\mathrm{i}|=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$，所以复数$z$对应的点与复数$z_1=\mathrm{i}$对应的点之间的距离为5，由圆的定义知，复数$z$在复平面上对应的点的轨迹是圆.

数学格言　芝诺的圆：“如果用小圆代表你们学到的知识，用大圆代表我学到的知识，那么大圆的面积是多一点，

探究 本题中的解析一利用复数的代数形式进行求解,即"化虚为实",解析二则直接利用复数的几何意义求解,关于复数模的问题,一般可化为复平面内两点间的距离来解决.

3. 复习建议及应试对策

(1)由于复数试题多以中低档题出现,难度虽不大,但涉及面广,对基本问题掌握的熟练程度要求较高,所以在复习中对基本问题不能放松要求,诸如:复数是虚数、纯虚数的条件,复数相等条件的运用,复数模的几何性质等都要全面复习.

(2)熟练掌握复数的几何意义,理解复数集合与复平面上的点集、复平面上的向量集合之间的对应关系.

(3)熟练掌握复数问题实数化的基本方法,利用复数相等的概念,可以把复数问题转化为实数问题,这是解决复数问题的常用策略,在复习中要重视这种方法的应用与训练;另外在复数的除法运算中要特别注意分母实数化方法的运用,即将分子和分母同乘以分母上复数的共轭复数,从而将分母化为实数.

(4)对于两个特殊的复数 i 和 ω,要了解它们的运算性质和规律. 对它们幂值的周期性,应熟练掌握,灵活运用.

重点突破

重点1　集合与常用逻辑用语

在塞尔维亚的某个小镇上仅有一位理发师，他宣称：他只给所有不给自己刮胡子的人刮胡子，不给那些给自己刮胡子的人刮胡子. 可是当他自己要刮胡子时，却陷入了尴尬境地. 这就是有名的理发师悖论，又称罗素悖论.

重点诠释

本重点调研的内容是：集合与常用逻辑用语. 其中包括集合的概念、集合间的关系、集合的运算、命题、充要条件、全称量词与存在量词等. 由于本部分知识是整个高中数学的基础部分，所以是教学的重要内容，也是高考的考查重点之一. 特别是集合与常用逻辑的知识与其他数学知识的联系非常密切，容易实现知识点的交汇和融合，因此是历年高考命题的热点内容. 高考试题对本部分的考查主要以选择题和填空题的形式出现，考查基础知识，有时也会以新颖的情境命制创新性的题目.

在复习中，一是要准确地掌握本部分的各个概念，二是加强数形结合思想方法的训练，自觉运用韦恩图、数轴的直观性来帮助分析和理解，提高形象思维能力和抽象思维能力.

典例调研

题型一　集合的概念

【调研1】 **给定集合** A,B，**定义** $A*B=\{x\mid x=m-n, m\in A, n\in B\}$. **若** $A=\{4,5,6\}$，$B=\{1,2,3\}$，**则集合** $A*B$ **中的所有元素之和为**

A. 15　　B. 14　　C. 27　　D. -14

解析　**由于** $A=\{4,5,6\}$，$B=\{1,2,3\}$，$\therefore A*B=\{5,4,3,2,1\}$，**故其所有元素和为** $5+4+3+2+1=15$，**故选** A.

数学诗歌

《集合、映射与函数》：

【方法探究】 解答这类信息迁移题，要注意紧扣题目中给出的新定义，将新旧知识联系起来，并用已有的解题方法来分析、解决新的问题. 另外本题在解答中还要注意集合元素的互异性，相同的对象归入同一个集合时，只能算作这个集合的一个元素，如在本题中不能得到 $A*B=\{5,4,4,3,3,3,2,2,1\}$.

拓展1 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，集合 $M=\{a,\frac{b}{a},1\}$，$N=\{a^2,a+b,0\}$，若 $M=N$，则 $a^{2\,007}+b^{2\,007}$ 的值等于

A. ±1　　B. -1　　C. 1　　D. 2

【调研2】 若集合 $A=\{x+y=c\mid c\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x^2+y^2=r^2\mid r\in\mathbf{R}$ 且 $r>0\}$，则集合 $A\cap B$ 的子集的个数是

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 1 或 2 或 4

解析 集合 A 中的元素是直线的方程（或直线），而集合 B 中的元素是圆的方程（或圆），因此两个集合中的元素具有不同的属性，没有公共元素，故 $A\cap B=\varnothing$，因此 $A\cap B$ 只有一个子集 $\varnothing$，故选 A.

【误点警示】 本题容易错误地将 $A\cap B$ 理解为求一条直线和一个圆的公共点的个数，它有 0，1，2 三种情况，故得到 $A\cap B$ 的子集数是 1 或 2 或 4 的错误结果. 这是由于对用描述法表示的集合中其代表元素理解不深而造成的，如果将题目中的两个集合改为：$A=\{(x,y)\mid x+y=c,c\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2=r^2,r\in\mathbf{R}$ 且 $r>0\}$，请同学们思考这时 $A\cap B$ 的子集的个数是什么情况？（答案：D）.

拓展2 设 P,Q 是非空集合，定义 $P\oplus Q=\{x\mid x\in P\cup Q$ 且 $x\notin P\cap Q\}$，现有集合 $P=\{x\mid y=\sqrt{4x-x^2}\}$，$Q=\{y\mid y=4^x(x>0)\}$，则 $P\oplus Q$ 等于

A. $[0,1]\cup(4,+\infty)$　　B. $[0,1)\cup[4,+\infty)$　　C. $[1,4]$　　D. $[0,4]$

题型二 集合间的关系

【调研3】 设 $A=\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y+m\geqslant0\}$，则使 $A\subseteq B$ 成立的实数 m 的取值范围是______.

解析 集合 A 是一个圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上的点的集合，集合 B 是一个不等式 $x+y+m\geqslant0$ 表示的平面区域内的点的集合，要使 $A\subseteq B$，则应使圆被平面区域所包含（如图 2－1－1），即直线 $x+y+m=0$ 应与圆相切或相离（在上方），而当直线与圆相切时有 $\frac{|m+1|}{\sqrt{2}}=1$，$\therefore m=\sqrt{2}-1$，故 m 的取值范围是 $m\geqslant\sqrt{2}-1$.

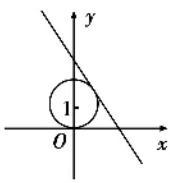


图 2－1－1

日落月出花果香，物换星移看沧桑.

【方法探究】 判断集合与集合之间的关系,常用的方法有:特征分析法,元素分析法,图示法. 特征分析法就是抓住两个集合的元素所具有的特征(或共同属性)进行分析,看一个集合的所有元素是否具有另一个集合所具有的特征. 本例也可用特征分析法来求解. 元素分析法就是求出集合的所有元素,比较两个集合之间的差异,如本例的解答. 图示法就是利用 Venn 图或数轴或平面图形把两个集合表示出来,再判断它们之间的关系. 一般地,元素分析法和图示法能使集合具体化、形象化,从而降低思维难度,简化解题过程.

拓展 3 已知集合 $M=\{0,2\}$,$N=\{y\mid x^2+y^2=4,x\in M\}$,则 M 与 N 的关系

A. $M=N$ B. $M\subset N$ C. $M\supset N$ D. $M\supseteq N$

【调研 4】 若集合 $M=\{x\mid x^2+x-6=0\}$,$N=\{x\mid ax-1=0\}$,且 $N\subseteq M$,求实数 a 的值.

解析 由 $x^2+x-6=0\Rightarrow x=2$ 或 $x=-3$;$\therefore M=\{2,-3\}$,

(1)当 $a=0$ 时,得 $N=\varnothing$,此时,$N\subseteq M$;

(2)当 $a\neq 0$ 时,得 $N=\{\frac{1}{a}\}$,若 $N\subseteq M$,则满足 $\frac{1}{a}=2$ 或 $\frac{1}{a}=-3$,即 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=-\frac{1}{3}$. 故所求实数 a 的值为 0 或 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{3}$.

【领悟整合】 本题主要考查了集合的子集的概念和运算. 由于带有字母 a,导致在解题时,需要分类讨论,特别是集合 N 可以为空集,同时也渗透了一元二次方程的解法. 在解决含有字母的问题时,经常考查分类讨论的思想,再就是涉及子集和真子集问题时,一定不能忘记检验空集是否符合题意.

拓展 4 已知集合 $S=\{x\mid x^2-3x-4\leqslant 0\}$,若集合 T 满足条件:$(S\cap T)\supseteq(S\cup T)$,则集合 T 等于

A. $[-4,1]$ B. $[-1,4]$ C. $[2,4]$ D. $[-1,3]$

题型三 集合的运算

【调研 5】 已知全集 $U=\{0,1,3,5,7,9\}$,$A\cap\complement_U B=\{1\}$,$B=\{3,5,7\}$,那么 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=$

A. $\{0,3,7\}$ B. $\{0,9\}$ C. $\varnothing$ D. $\{7\}$

解析 $A\cap\complement_U B=\{1\}$,$B=\{3,5,7\}$,$\therefore A\cup B=\{1,3,5,7\}$,$\therefore(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)=\{0,9\}$. 故选 B.

【技巧点拨】 解答本题的关键在于灵活运用集合的交、并、补运算的定义及其性质,另外有关集合以及补集的两个运算性质能简化解题过程,应熟练掌握.

性质一:$A\cap B=A\Rightarrow A\subseteq B$,$A\cup B=A\Rightarrow A\supseteq B$;

性质二:$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$,$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

拓展5 设 $S_1=\{x|x^2-4x-5>0\}$，$S_2=\{x||x-a|<4\}$，$S_3=\{a|S_2\subseteq S_1\}\neq\varnothing$，则下列判断正确的是

A. $S_2\cap S_3=\varnothing$　　B. $(\complement_{\mathbf{R}}S_1)\cap S_2=\varnothing$

C. $\complement_{\mathbf{R}}S_2=\varnothing$　　D. $(\complement_{\mathbf{R}}S_2)\cup S_3=\mathbf{R}$

题型四　四种命题与充要条件

【调研6】 给出以下4个命题：①若 $ab\leqslant0$，则 $a\leqslant0$ 或 $b\leqslant0$；②若 $a>b$，则 $am^2>bm^2$；③在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A=\sin B$，则 $A=B$；④在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，若 $b^2-4ac<0$，则方程有实数根. 其中原命题、逆命题、否命题、逆否命题全都是真命题的是

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

分析　对每一个命题逐一进行判断，注意利用原命题和逆否命题，否命题和逆命题之间的等价性.

解析　对命题①，其原命题和逆否命题为真，但逆命题和否命题为假；对命题②，其原命题和逆否命题为假，但逆命题和否命题为真；对命题③，其原命题、逆命题、否命题、逆否命题全部为真；对命题④，其原命题、逆命题、否命题、逆否命题全部为假，故选C.

【方法探究】 判断四种命题真假的常用途径：一是先分别写出四种命题，再分别判断每个命题的真假，二是利用互为逆否命题是等价命题这一关系来判断它的逆否命题的真假，这种方法有时能够简化解题过程. 另外还要注意原命题与其否命题并不总是真假性相反的.

【知识链接】 命题是可以判断真假的语句，命题是由题设和结论两部分组成的，用"或""且""非"等逻辑联结词和简单命题构成的命题是复合命题，判断复合命题的真假关键是抓住它的真值表，可简记为："p 且 q"一假必假，"p 或 q"一真必真，"$\neg p$"真假相反. 本题中利用真值表由"$p\vee q$"为真命题，"$\neg p\vee\neg q$"为真命题，推断"p 和 q"中有且只有一个真命题. 另外，解答这类命题与其他知识的综合问题，首先要利用其他知识简化命题，特别是像本题这样的每个命题含有相应参数时，则应先确定使每个命题为真的参数取值范围，然后利用命题的有关知识来求解.

重点突破

拓展6 已知命题 P：集合 $\{x|x=\mathrm{i}^{2n+1},n\in\mathbf{N},\mathrm{i}$ 为虚数单位$\}$ 只有3个真子集；Q：集合 $\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$ 与集合 $\{x|y=\sqrt{x}+11\}$ 相等. 则下列复合命题：①P 或 Q；②P 且 Q；③非 P；④非 Q 中真命题有

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

【调研7】 在下列电路图中，分别指出闭合开关 A 是灯泡 B 亮的什么条件：

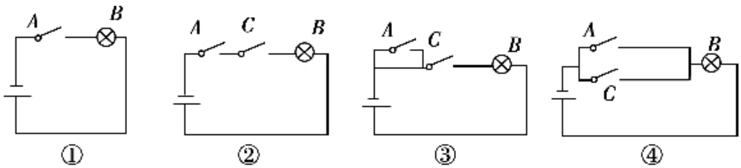


图 2－1－2

①中，开关 A 闭合是灯泡 B 亮的______条件；

②中，开关 A 闭合是灯泡 B 亮的______条件；

③中，开关 A 闭合是灯泡 B 亮的______条件；

④中，开关 A 闭合是灯泡 B 亮的______条件.

分析　首先根据电路的串联、并联知识，分析开关 A 闭合是否有灯泡 B 亮，然后根据充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件的含义作答.

解析　①开关 A 闭合，灯泡 B 亮；反之，灯泡 B 亮，开关 A 闭合，于是开关 A 闭合是灯泡 B 亮的充要条件. ②仅当开关 A、C 都闭合时，灯泡 B 才亮；反之，灯泡 B 亮，开关 A 必须闭合，故开关 A 闭合是灯泡 B 亮的必要不充分条件. ③开关 A 不起作用，故开关 A 闭合是灯泡 B 亮的既不充分又不必要条件. ④开关 A 闭合，灯泡 B 亮；但灯泡 B 亮，只需开关 A 或 C 闭合，故开关 A 闭合是灯泡 B 亮的充分不必要条件.

【知识链接】　本题在判断充要条件时，利用了定义法，即先确定条件和结论分别是什么，再找推式，是"条件⇒结论"还是"结论⇒条件"，最后下结论.

【技巧点拨】　若 p 以集合 A 的形式出现，q 以集合 B 的形式出现，即 $A=\{x|p(x)\}$，$B=\{x|q(x)\}$，则有：

①若 A 包含于 B，则 p 是 q 的充分条件；

②若 B 包含于 A，则 p 是 q 的必要条件；

③若 A 等于 B，则 p 是 q 的充要条件；

④若 A 真包含于 B，则 p 是 q 的充分不必要条件；

⑤若 B 真包含于 A，则 p 是 q 的必要不充分条件；

⑥若 A 不包含于 B 且 B 不包含于 A，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

因此在解题时，运用集合思想来判断充分条件和必要条件，也是一种行之有效的好办法.

拓展 7　已知 p：$5x^2-4x-1>0$，q：$\frac{1}{x^2+4x-5}>0$，试判断 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的什么条件.

题型五 全称量词与存在量词

【调研8】 若 $r(x)$：$\sin x+\cos x>m$，$s(x)$：$x^2+mx+1>0$，如果对 $\forall x\in\mathbf{R}$，$r(x)$ 为假命题且 $s(x)$ 为真命题，求实数 m 的取值范围.

解析 由于 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，所以如果对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$r(x)$ 为假命题，即对任意的 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $\sin x+\cos x>m$ 恒不成立，则 $m\geqslant\sqrt{2}$；

又对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$s(x)$ 为真命题，即对任意的 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $x^2+mx+1>0$，所以 $\Delta=m^2-4<0$，即 $-2<m<2$. 故对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$r(x)$ 为假命题且 $s(x)$ 为真命题，应有 $\sqrt{2}\leqslant m<2$.

【知识链接】 所谓全称量词，就是在命题中用来表示完全概括的逻辑用语，用符号 $\forall$ 表示，含有全称量词的命题叫做全称命题；所谓存在量词，就是用来表示部分概括的逻辑用语，用符号 $\exists$ 表示，含有存在量词的命题叫做特称命题. 要特别注意全称命题和特称命题的否定，一般地，全称命题的否定变为特称命题，而特称命题的否定变为全称命题.

拓展8 (1)给出以下命题：① $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $x^4>x^2$；② $\exists\alpha\in\mathbf{R}$，使 $\sin 3\alpha=3\sin\alpha$；③ $\exists a\in\mathbf{R}$，对 $\forall x\in\mathbf{R}$，使 $x^2+2x+a<0$. 其中的假命题是______.

(2)已知 $p(x)$：$x^2+2x-m>0$，如果 $p(1)$ 是假命题，$p(2)$ 是真命题，则实数 m 的取值范围是______.

强化闯关

1. 设 $A=\{x\mid|x-2|\leqslant2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=-x^2,-1\leqslant x\leqslant2\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$ 等于

A. $\mathbf{R}$ B. $\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq0\}$ C. $\{0\}$ D. $\varnothing$

2. 已知 a,b 为正实数，则命题 p："$a=b$"是命题 q："$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$"成立的

A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

3. 集合 $A=\{x\mid-2<x<-1$ 或 $x>1\}$，$B=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$，若 $A\cup B=\{x\mid x>-2\}$，$A\cap B=\{x\mid1<x\leqslant3\}$，则 $a=$______，$b=$______.

4. 已知 $A=\{y\mid y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2},0\leqslant x\leqslant3\}$，$B=\{y\mid y^2-(a^2+a+1)y+a(a^2+1)>0\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

重点突破

数学诗歌

《指数函数、对数函数和幂函数》：

5. 已知命题 p：$|x-1|<c,(c>0)$；命题 q：$|x-5|>2$，且 p 是 q 的既不充分也不必要条件，求 c 的取值范围.

参考答案

【拓展】

1. B　由 $M=N$ 及集合元素的无序性可得 $a=a^2$ 或 $a=a+b$ 或 $a=0$，又由集合元素的互异性知只能 $a=a+b$，故 $b=0$，易得 $a=-1$，所以 $a^{2007}+b^{2007}=-1$. 故选 B.

2. A　由于 $P=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，$Q=\{y|y>1\}$，$\therefore P\oplus Q=\{x|0\leqslant x\leqslant 1$ 或 $x>4\}$. 故选 A.

3. B　由 $M=\{0,2\}$ 得 $N=\{2,-2,0\}$，故有 $M\subset N$. 故选 B.

4. B　对任意非空集合 S,T，应有 $(S\cap T)\subseteq(S\cup T)$，又知 $(S\cap T)\supseteq(S\cup T)$，所以有 $(S\cap T)=(S\cup T)$，由于 S,T 非空，$\therefore S=T$，即 $T=S=[-1,4]$. 故选 B.

5. B　$S_1=\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$，$S_2=\{x|a-4<x<a+4\}$，$S_3=\{a|a<-5$ 或 $a>9\}$，显然有 $(\complement_{\mathbf{R}}S_1)\cap S_2=\varnothing$. 故选 B.

6. C　命题 P 中的集合即为 $\{i,-i\}$，只有 2 个元素，有 3 个真子集，故 P 正确，Q 中的两个集合不相等，故 Q 假，因此有 2 个复合命题为真. 故选 C.

7. 由 $5x^2-4x-1>0$ 得 $x<-\frac{1}{5}$ 或 $x>1$，即 p：$x<-\frac{1}{5}$ 或 $x>1$；由 $\frac{1}{x^2+4x-5}>0$ 得 $x<-5$ 或 $x>1$，即 q：$x<-5$ 或 $x>1$，容易判断 p 是 q 的必要不充分条件，从而 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件.

8. (1)①③　(2) $3\leqslant m<8$

因为 $p(1)$ 是假命题，$p(2)$ 是真命题，所以 $\begin{cases}3-m\leqslant 0,\\ 8-m>0\end{cases}$，解得 $3\leqslant m<8$.

【强化闯关】

1. B　$A=[0,4]$，$B=[-4,0]$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=\complement_{\mathbf{R}}\{0\}=\{x|x\in\mathbf{R},x\neq 0\}$，故选 B.

2. A　命题 p 成立，则 q 一定成立，但 q 成立时，p 不一定成立.

3. $-1,3$　$\because A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}$，$\therefore B$ 可能是 $\{x|-1<x\leqslant 3$ 或 $x\leqslant -2\}$，又 $A\cup B=\{x|x>-2\}$，$\therefore B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，故 $a=-1$，$b=3$.

4. 在 B 中：$[y-(a^2+1)](y-a)>0$，则 $y>a^2+1$ 或 $y<a$. 在 A 中：$y=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$. $\because 0\leqslant x\leqslant 3$，$\therefore 2\leqslant y\leqslant 4$. $\because A\cap B=\varnothing$，$\therefore \begin{cases}a\leqslant 2,\\ a^2+1\geqslant 4\end{cases}$，即 $a\leqslant -\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 2$.

5. 由 $|x-1|<c$，得 $1-c<x<1+c$，$\therefore$ 命题 p 对应的集合 $A=\{x|1-c<x<1+c,c>$

$0\}$,$\therefore$ 同理,命题 q 对应集合 $B=\{x\mid x>7$ 或 $x<3\}$,若 p 是 q 的充分条件,则 $1+c\leqslant 3$ 或 $1-c\geqslant 7$,$\because$ $c\leqslant 2$ 或 $c\leqslant -6$,又 $c>0$,$\therefore$ $0<c\leqslant 2$. 又 q 不可能是 p 的充分条件,$\therefore$ p 不可能是 q 的充要条件,$\therefore$ 如果 p 是 q 的既不充分也不必要条件,应有 $c>2$.

重点2　函数与反函数

将一枚骰子投掷 10 次,并将每次骰子向上的点数记录在下表中. 规定对应法则 f 为:对每一投掷序号 $n(n=1,2,\cdots,10)$,对应到该次骰子向上的点数. 请你判断:这样的对应 f 是否为函数?若是函数,该函数的值域一定是集合 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 吗?若不是函数,为什么?你能解释原因吗?

投掷序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
向上点数										

重点诠释

本部分调研的内容是映射、函数、反函数等,其中重点是函数的概念. 由于函数的概念是学习函数知识的基础,在整个高中数学中也有重要的地位,因此是教学的重要内容,也是高考的热点内容. 对函数概念的考查,既可以单独命题,也可以和其他知识融合起来进行考查. 若单独考查,一般以选择题和填空题出现,若和其他知识融合在一起考查,通常会出现在解答题中.

对于本部分的复习,一是要深入领会映射、函数等的定义,并善于运用定义进行解题;二是重视数形结合的渗透,充分利用图形的直观性挖掘解题信息;三是要特别注意对函数定义域的学习,一方面要熟练掌握函数定义域的各种求法,另一方面在解题中要始终具有"定义域优先考虑"的意识,因为许多问题的解答必须以定义域为前提.

典例调研

题型一　映射

【调研 1】 已知集合 $P=\{a,b,c,d,e\}$,$Q=\{-2,-1,1,2\}$,现建立从集合 P 到 Q 的映射 f,若规定 $f(a)=-2$,$f(e)=2$,则这样的映射 f 有多少个?

分析　集合 P 中的元素 a 和 e 的象已经确定,只需根据映射的定义确定元素 b,c,d 的象即可.

解析　符合要求的映射 f 的个数,就是集合 P 中元素与 Q 中元素不同的对应方法的种数. 由于 $f(a)=-2$,$f(e)=2$,因此只需探讨 P 中元素 b,c,d 在 Q 中有多少种

对应的方法. 根据映射的定义，b 可以有 4 种对应方法，c 和 d 也都是 4 种对应方法，所以一共有 $4\times4\times4=64$ 种不同的对应方法，即符合要求的映射 f 一共有 64 个.

【知识链接】 映射是一种特殊的对应. 学习这一定义时，应注意如下几点；

①映射是由集合 A，B 以及从 A 到 B 的对应法则 f 所确定的.

②在映射中，集合 A 中的"任一元素"在集合 B 中都有"惟一"的象，即不会存在集合 A 中的某一元素 a 在集合 B 中没有象，或者不止一个象的情况.

③在映射中，集合 A 与 B 的地位是不对等的. 一般地，在映射中我们并不要求 B 中的每一个元素都与 A 中的每一元素相对应. 因此，从 A 到 B 的映射与从 B 到 A 的映射是具有不同的要求，即具有方向性.

④集合 A，B 也可以是同一个集合，可以是数集、点集或其他.

【方法探究】 映射中的计数问题是高考对映射问题的一个常考的重要题型. 解决这类问题的出发点仍然是映射的定义，同时要结合映射的特征，即从 A 到 B 的映射 f 中，A 中的元素必须都有象，不能有剩余，但象是惟一的，而 B 中的元素则可以有剩余，在此基础上，运用排列组合相关知识进行求解.

拓展 1 设集合 A 和 B 都是实数集 $\mathbf{R}$，映射 $f:A\to B$ 把 A 中的元素 x 映射到 B 中的元素 x^3-x+2，则在映射 f 下，象 2 的原象组成的集合是

A. $\{1\}$　　B. $\{0,1,-1\}$　　C. $\{0\}$　　D. $\{0,-1,-2\}$

题型二 函数的概念

【调研 2】 已知集合 $M=\{-1,1,2,4\}$，$N=\{0,1,2\}$，给出以下四个对应法则：①$y=x^2$；②$y=x+1$；③$y=2^x$；④$y=\log_2|x|$，其中能构成从 M 到 N 的函数的是

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

分析 函数是一种特殊的映射，对照函数的定义进行判断.

解析 由函数概念知，对于集合 M 中的任一元素，在集合 N 中都有惟一确定的元素与之对应，而对于集合 M 中的元素 4，按照对应法则①②③，N 中都没有元素与之对应，不能构成函数. 故选 D.

【知识链接】 函数是一种特殊的映射(即函数是从非空数集到非空数集的映射)，所以在判断一个对应是否是函数时，应首先判断两个集合是否都是非空数集，然后再判断是否满足映射的定义.

拓展 2 (1)如图 2－2－1 所示，①，②，③三个图像各表示两个变量 x，y 的对应关系，则有

 指数对数相辉映，立方平方看对称；

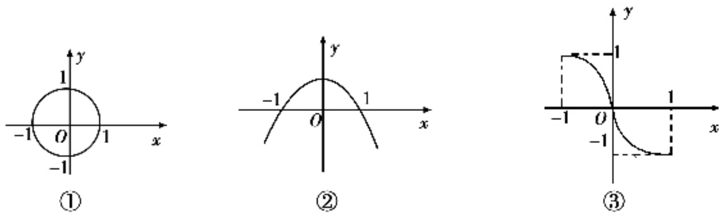


图 2-2-1

A. 都表示映射，且①③表示 y 为 x 的函数；

B. 都表示 y 是 x 的函数；

C. 仅②③表示 y 是 x 的函数；

D. 都不能表示 y 是 x 的函数.

（2）下列函数组中表示同一函数的是

A. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$

B. $y=\log_2 2^x$ 与 $y=\sqrt[3]{x^3}$

C. $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$

D. $y=\ln\dfrac{x-2}{x+2}$ 与 $y=\ln(x-2)-\ln(x+2)$

题型三 函数的定义域

【调研 3】 函数 $y=\dfrac{\sqrt{2+x-x^2}}{\log_2(|x|-x)}$ 的定义域是____________.

解析 由题意得 $\begin{cases}2+x-x^2\geqslant 0,\\ |x|-x>0,\\ |x|-x\neq 1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 2,\\ x<0,\\ x\neq -\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

解得 $-1\leqslant x<0$ 且 $x\neq -\dfrac{1}{2}$，所以函数定义域是 $\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant x<-\dfrac{1}{2}\text{或}-\dfrac{1}{2}<x<0\right\}$.

【方法探究】 1. 确定函数定义域的原则是：

（1）当函数 $y=f(x)$ 用表格给出时，函数的定义域是指表格中实数 x 的集合；

（2）当函数 $y=f(x)$ 用图像给出时，函数的定义域是指图像在 x 轴上投影所覆盖的实数的集合；

（3）当函数 $y=f(x)$ 用解析式给出时，函数的定义域是指使解析式有意义的实数的集合；

重点突破

(4)当函数 $y=f(x)$ 由实际问题给出时,函数的定义域由实际问题的意义确定.

2. 当函数是用解析式给出时,其定义域确定的依据有:

(1)若 $f(x)$ 是整式,则定义域为全体实数;

(2)若 $f(x)$ 是分式,则定义域为使分式的分母不为零的全体实数;

(3)若 $f(x)$ 是偶次方根,则定义域为使被开方式为非负的全体实数;

(4)函数 $f(x)=x^0$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

3. 一般地,有解析式的函数的定义域,就是使函数解析式有意义的自变量 x 的取值范围,一般是列出不等式(组),通过解不等式(组),借助数轴,求出定义域,定义域一般用集合或区间表示.

拓展3　已知函数 $f(x)=\sqrt{x-1}$,则函数 $y=f[f(x)]+f(\frac{4}{x})$ 的定义域是____.

【调研4】　已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+ax+3}}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,求实数 a 的取值范围.

分析　函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+ax+3}}$ 的定义域,就是不等式 $ax^2+ax+3>0$ 的解集.函数以 $\mathbf{R}$ 为定义域,即不等式 $ax^2+ax+3>0$ 的解集是 $\mathbf{R}$,亦即不等式 $ax^2+ax+3>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

解析　函数的定义域为 $\mathbf{R}$,就是不等式 $ax^2+ax+3>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

(1)若 $a=0$,不等式变为 $3>0$,恒成立,故 $a=0$ 符合题意;

(2)若 $a<0$,不等式 $ax^2+ax+3>0$ 不可能对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立;

(3)若 $a>0$,则应有 $\Delta<0$,即 $\begin{cases}a>0,\\a^2-12a<0\end{cases}$,解得 $0<a<12$.

综上知 a 的取值范围是 $0\leqslant a<12$.

【方法探究】　这是已知函数的定义域,求其中所含参数取值范围,属于逆向思维问题,是高考中常考的题型之一.解决这类问题的方法是进行等价转化,由函数定义域问题转化为不等式恒成立问题进行求解.

【误点警示】　注意不能忽视对参数 a 的讨论,尤其是 $a=0$ 这种情况,一般地,当一个方程(或函数或不等式)的最高次数项前面的系数含有参数时,应讨论系数等于零的情形是否符合题意.

拓展4　已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(mx^2-4mx+m^2+m-3)$ 在区间 $[0,1]$ 上有意义,求实数 m 的取值范围.

题型四 函数的解析式

【调研 5】 设 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的函数，满足 $f(0)=1$，且对任意实数 a，b，有 $f(a-b)=f(a)-b(2a-b+1)$，求 $f(x)$.

解析 在 $f(a-b)=f(a)-b(2a-b+1)$ 中，$a,b\in\mathbf{R}$，故令 $a=b=x$，得 $f(0)=f(x)-x(2x-x+1)$，又 $\because f(0)=1$，$\therefore f(x)=x^2+x+1$.

【方法探究】 函数的解析式问题也是高考的一个热点问题. 求函数解析式的常用方法有:代入法，用 $g(x)$ 代入 $f(x)$ 中的 x，即得到 $f[g(x)]$ 的解析式;拼凑法，对 $f[g(x)]$ 的解析式进行拼凑变形，使它能用 $g(x)$ 表示出来，再用 x 代替两边的所有"$g(x)$"即可;换元法，设 $t=g(x)$，解出 x，代入 $f[g(x)]$，得 $f(t)$ 的解析式即可;待定系数法，若已知 $f(x)$ 的解析式的类型，设出它的一般形式，根据特殊值，确定相关的系数即可;赋值法，给变量赋予某些特殊值，从而求出其解析式.

拓展 5 已知 $2f(x)+f(-x)=3x+2$，求 $f(x)$.

【调研 6】 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=3f(x)$，当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x^2-2x$，试求当 $x\in[-4,-2]$ 时，$f(x)$ 的解析式.

分析 从已给出解析式的区间 $[0,2]$ 与未知解析式的区间 $[-4,-2]$ 的关系入手，结合条件 $f(x+2)=3f(x)$ 进行求解.

解析 设 $x\in[-4,-2]$，则 $x+4\in[0,2]$，

依题意有 $f(x+4)=(x+4)^2-2(x+4)=x^2+6x+8$，又由于 $f(x+2)=3f(x)$，

$\therefore f(x+4)=f[(x+2)+2]=3f(x+2)=3[3f(x)]=9f(x)$，

即 $9f(x)=x^2+6x+8$，$\therefore f(x)=\dfrac{1}{9}x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{9}$.

故当 $x\in[-4,-2]$ 时，$f(x)$ 的解析式是 $f(x)=\dfrac{1}{9}x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{9}$.

【技巧点拨】 本题利用了区间变换法求解析式. 所谓区间变换法求函数的解析式，就是设自变量 x 属于欲求解析式的区间，然后对 x 进行适当的变换，使其取值属于已知解析式的区间，代入得到一个与解析式有关的式子，再根据已知的函数性质，转化为欲求区间上的函数的解析式.

拓展 6 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且满足 $f(x+3)+f(x)=2$，又当 $x\in[-3,0]$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，则 $f(5)=$ ______.

题型五 反函数

【调研 7】 下表给出了函数 $y=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的一部分自变量与函数值，试求出函数的反函数 $f^{-1}(x)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

分析　由表格中的数据求出 $y=a^x$ 的解析式,然后求其反函数.

解析　取表中的一组数据,如 $x=1,y=\frac{1}{3}$代入 $y=a^x$ 中得 $\therefore a^1=\frac{1}{3},\therefore a=\frac{1}{3}$,即 $y=(\frac{1}{3})^x$,这是一个指数函数,它的反函数是对数函数 $f^{-1}(x)=\log_{\frac{1}{3}}x$.

【知识链接】　新课标对反函数的要求不高,只要简单了解反函数的概念,知道指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数,并且这两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称. 对于给定的指数函数或对数函数,能够求出其反函数.

拓展 7　已知对数函数 $f(x)=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 满足 $f(\frac{a}{4})=0$,则函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$______.

【调研 8】　已知函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=g(x)$,若 $f(3)=-1$,则函数 $y=g(x-1)$ 的图像一定经过的一个点是

A. $(-2,3)$　　B. $(2,-1)$　　C. $(0,3)$　　D. $(4,-1)$

分析　可根据互为反函数的两个函数的图像之间的关系进行求解.

解析　$\because f(3)=-1,y=g(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数,所以 $g(-1)=3$,而由 $x-1=-1$ 知 $x=0$,故 $y=g(x-1)$ 的图像一定过定点 $(0,3)$,故选 C.

【技巧点拨】　函数与反函数的关系实质上是自变量与因变量的地位互换,即原函数的自变量和因变量分别为其反函数的因变量和自变量. 本题就是利用这个地位互换的关系,由 $f(3)=-1$ 得出 $g(-1)=3$ 这一结论的.

拓展 8　求函数 $f(x)=\frac{x}{2x-1}$的反函数.

强化闯关

1. 已知函数 $f(x)$,则集合 $\{(x,y)\mid y=f(x)\}\cap\{(x,y)\mid x=m\}$ 的元素个数是

A. 0　　B. 1　　C. 0 或 1　　D. 以上都不对

2. 函数 $y=\log_2\frac{1}{x}(x>0)$ 的反函数是

A. $y=-2^x$　　B. $y=-2^{-x}$　　C. $y=2^x$　　D. $y=(\frac{1}{2})^x$

3. 函数 $f(x)=\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x}}+\lg(3x+1)$ 的定义域是

A. $(-\frac{1}{3},+\infty)$　　B. $(-\frac{1}{3},1)$　　C. $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$　　D. $(-\infty,-\frac{1}{3})$

4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,2]$，那么函数 $f(x+1)+f(x^2-1)$ 的定义域是______.

5. 函数 $f(x)$ 对任意实数 x 满足 $f(x+2)=\dfrac{1}{f(x)}$，若 $f(1)=-5$，则 $f[f(5)]$ 的值等于______.

6. 已知函数 $f(x)$ 对任意的实数 x,y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2y(x+y)+1$ 且 $f(1)=1$，

(1) 若 $x\in\mathbf{N}^*$，试求 $f(x)$ 的表达式；

(2) 若 $x\in\mathbf{N}^*$ 且 $x\geqslant 2$，不等式 $f(x)\geqslant(a+7)x-(a+10)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

参考答案

【拓展】

1. B　由 $x^3-x+2=2$，得 $x^3-x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=\pm1$，故选 B.

2. (1) C　在 3 个图像中，①不能表示映射，也不能表示 y 是 x 的函数，故选 C.

(2) B　D、A 中两函数定义域不同，C 中两函数的值域不同，而 B 中的两函数定义域、值域、对应法则都完全相同，表示同一函数，故选 B.

3. $[2,4]$　$\because f(x)=\sqrt{x-1}$，则函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x\mid x\geqslant1\}$，对于 $f[f(x)]$，应有 $\sqrt{x-1}\geqslant1$，$\therefore x\geqslant2$；又对于 $f(\frac{4}{x})$ 应有 $\frac{4}{x}\geqslant1$，$\therefore 0<x\leqslant4$，$\therefore x$ 的取值范围是 $2\leqslant x\leqslant4$，即函数的定义域是 $[2,4]$.

4. 依题意知，当 $x\in[0,1]$ 时，$g(x)=mx^2-4mx+m^2+m-3>0$ 恒成立.

若 $m=0$，则 $g(x)=-3<0$，不合题意，故 $m\neq0$.

①当 $m>0$ 时，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上递减，$\therefore g(1)=m^2-2m-3>0$，即 $m>3$ 或 $m<-1$（舍去），故 $m>3$；

②当 $m<0$ 时，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上递增，所以 $g(0)=m^2+m-3>0$，即 $m>\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$ 或 $m<\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$，$\therefore m<\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$.

故所求 m 的取值范围是 $m>3$ 或 $m<\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$.

5. 因为 $2f(x)+f(-x)=3x+2$，以 $-x$ 代 x，则有 $2f(-x)+f(x)=-3x+2$，解关于 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的方程组 $\begin{cases}2f(x)+f(-x)=3x+2,\\2f(-x)+f(x)=-3x+2\end{cases}$，得解析式 $f(x)=3x+\dfrac{2}{3}$.

6. $\frac{1}{2}$ $\because f(x+3)+f(x)=2$，$\therefore f(x+3)=2-f(x)$，

$\therefore f(x+6)=f[(x+3)+3]=2-f(x+3)=2-[2-f(x)]=f(x)$，

$\therefore f(5)=f(5-6)=f(-1)=\frac{1}{(-1)^2+1}=\frac{1}{2}$.

7. 4^x 由$f(\frac{a}{4})=0$得$\log_a\frac{a}{4}=0$，$\frac{a}{4}=1$，$a=4$，因此$f(x)=4^x$，故其反函数$f^{-1}(x)=4^x$.

8. 由$y=\frac{x}{2x-1}$得$x=\frac{y}{2y-1}$，所以函数$f(x)$的反函数$f^{-1}(x)=\frac{x}{2x-1}(x\neq\frac{1}{2})$.

【强化闯关】

1. C 由函数定义可知应选 C.

2. D 由$y=\log_2\frac{1}{x}$得$y=-\log_2 x$，$\therefore x=2^{-y}$，所以反函数是$y=2^{-x}$. 故选 D.

3. B 依题意有$\begin{cases}1-x>0,\\3x+1>0\end{cases}\Rightarrow -\frac{1}{3}<x<1$. 故选 B.

4. $[-\sqrt{3},1]$ 依题意应有$\begin{cases}-1\leqslant x+1\leqslant 2,\\-1\leqslant x^2-1\leqslant 2\end{cases}$，解得$-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 1$，所以定义域是$[-\sqrt{3},1]$.

5. $-\frac{1}{5}$ 由$f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$得$f(x+4)=\frac{1}{f(x+2)}=f(x)$，所以$f(5)=f(1)=-5$，

$\therefore f[f(5)]=f(-5)=f(-1)=\frac{1}{f(-1+2)}=-\frac{1}{5}$.

6. (1)令$y=1$，则$f(x+1)=f(x)+f(1)+2(x+1)+1$，$\therefore f(x+1)-f(x)=2x+4$，

$\therefore$ 当$x\in\mathbf{N}^*$，$f(3)-f(2)=2\times2+4$，$f(4)-f(3)=2\times3+4$，

$\therefore f(x)-f(x-1)=2(x-1)+4$，将上面各式相加得$f(x)=x^2+3x-3(x\in\mathbf{N}^*)$.

(2)$\because$ 当$x\in\mathbf{N}^*$且$x\geqslant 2$时，$f(x)=x^2+3x-3$，

$\therefore$ 不等式$f(x)\geqslant(a+7)x-(a+10)$恒式成立，

$\therefore$ 当$x\in\mathbf{N}^*$且$x\geqslant 2$时，不等式$x^2+3x-3\geqslant(a+7)x-(a+10)$恒成立，

即$x^2-4x+7\geqslant a(x-1)$恒成立.

$\because x\geqslant 2$，$\therefore \frac{x^2-4x+7}{x-1}\geqslant a$恒成立，

又$\frac{x^2-4x+7}{x-1}=(x-1)+\frac{4}{x-1}-2\geqslant 2$(当且仅当$x-1=\frac{4}{x-1}$，即$x=3$时取等号).

$\therefore \frac{x^2-4x+7}{x-1}$的最小值是2，故$a\leqslant 2$.

重点 3 函数的性质和图像

传说'唐宋八大家'之一的苏轼与学友去江西九江二门赶考，因中途突降暴雨，河水急涨，坐船耽误了时间. 当他们急急忙忙赶到考场时，考试已经开始了一阵子，主考官不准苏轼入场，但他早就听说了苏轼很有才华，便出了一个刁钻古怪的上联，要求苏轼对出下联 如果对得好，仍可进考场. 上联是：

一叶小舟，载二三位考生，行了四五六日水程，七颠八倒到九江，十分来迟.

苏轼沉思片刻，吟出了下联：

十年寒窗，读九八卷诗书，赶过七六五个考场，四次三番来二门，一定要进.

苏轼的下联中的数字与考官上联的数字恰好是倒过来的，读来音韵回肠，别有洞天. 主考官非常欣赏，欣然同意苏轼进了考场.

如果从函数性质的角度去看上下联，你能和函数的哪些性质联系起来？

重点诠释

函数的图像和性质是研究函数的重要方面，是函数学习的重点内容，因此也是高考考查的一个重点内容，在历年的高考试题中都有关于函数图像和性质的试题，一般以选择题和填空题的形式考查. 对函数性质的考查主要包括函数的单调性、奇偶性、周期性等方面，有时单个考查，有时综合在一起考查 对函数图像的考查一是函数图像的变换、识图等，二是函数图像的应用等，有时也会与函数的性质综合在一起考查. 有关函数图像和性质的题目大多为容易题和中档题.

尽管函数图像和性质的题目大多为容易题和中档题，但鉴于函数内容在高中数学中的重要地位，所以这方面的题目经常以新颖的材料和背景呈现，更容易出现创新性的题目，更能突出对考生能力的考查，所以在复习中，应狠抓基础知识，以达到非常熟练的程度 同时，注意开阔视野，加强数学思想方法的训练，提高解决问题的能力.

典例调研

题型一 函数的奇偶性

【调研 1】 已知 $f(x)$，$g(x)$ 分别是定义在 R 上的奇函数和偶函数，且 $f(x)-g(x)=(\frac{1}{2})^x$，试比较 $f(1)$，$g(0)$，$g(-1)$ 的大小.

分析 可以根据函数 $f(x)$，$g(x)$ 的奇偶性，再建立一个关于 $f(x)$，$g(x)$ 的关系式，求出两个函数的解析式，然后比较大小.

解析 在 $f(x)-g(x)=(\frac{1}{2})^x$ 中，令 $x=-x$，得 $f(-x)-g(-x)=2^x$，由于

重点突破

$f(x)$,$g(x)$分别是奇函数和偶函数,所以$f(-x)=-f(x)$,$g(-x)=g(x)$,因此得$-f(x)-g(x)=2^x$.

于是解得$f(x)=\frac{2^{-x}-2^x}{2}$,$g(x)=-\frac{2^{-x}+2^x}{2}$,

于是$f(1)=-\frac{3}{4}$,$g(0)=-1$,$g(-1)=-\frac{5}{4}$,故$f(1)>g(0)>g(-1)$.

【发散类比】 本题在解答过程中充分利用了奇偶函数的定义. 事实上,从本题的解答过程我们可以得到结论:任何一个函数都可以表示为一个奇函数和一个偶函数之和. 对于任意函数$f(x)$,有$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$,其中$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$是偶函数,$h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$是奇函数.

拓展1 已知$f(x)$是奇函数,当$x\geqslant 0$时,$f(x)=x(1+x)$,则函数$f(x)$的解析式是______.

题型二 函数的单调性

【调研2】 已知函数$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$,求$f(x)$的单调区间.

解析 由于$f(x)$是奇函数,只需研究函数在$[0,+\infty)$上的单调性即可.

任取$x_1,x_2\in[0,+\infty)$,且$x_1<x_2$,则$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1^2+1}-\frac{x_2}{x_2^2+1}=\frac{(x_2-x_1)(x_1x_2-1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$,

$\because x_1^2+1>0$,$x_2^2+1>0$,$x_2-x_1>0$,

而$x_1,x_2\in[0,1]$时,$x_1x_2-1<0$,$x_1,x_2\in[1,+\infty)$时,$x_1x_2-1>0$,

$\therefore$当$x_1,x_2\in[0,1]$时,$f(x_1)-f(x_2)<0$,函数$y=f(x)$是增函数;

当$x_1,x_2\in[1,+\infty)$时,$f(x_1)-f(x_2)>0$,函数$y=f(x)$是减函数.

又$f(x)$是奇函数,$\therefore f(x)$在$[-1,0]$上是增函数,在$(-\infty,-1]$上是减函数,

又当$x\in[0,1]$,$\mu\in[-1,0]$时恒有$f(x)\geqslant f(\mu)$,故$f(x)$在$[-1,1]$上是增函数,

$\therefore$函数在$[-1,1]$上是增函数,在$(-\infty,-1]$和$[1,+\infty)$上是减函数.

【知识链接】 判断函数的单调性或求函数的单调区间的一般方法有:(1)定义法;(2)图像观察法;(3)利用已知函数的单调性;(4)利用复合函数的单调性法则;(5)利用导数法. 利用定义法的关键是对$f(x_1)-f(x_2)$的整理、化简、变形和符号的判断,其中变形的策略有因式分解、配方、分子(分母)有理化等.

拓展2 已知 $f(x)=ax+\frac{1-x}{ax}(a>0)$，判断 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性.

【调研3】 求下列函数的单调区间.

(1) $y=a^{1-x^2}(a>0,a\neq1)$；(2) $y=\log_3(4x-x^2)$.

分析 由于是复合函数，所以应先确定定义域，然后再根据复合函数单调性的规则进行求解.

解析 (1)函数定义域为R，令 $t=1-x^2$，则 t 的递减区间是 $[0,+\infty)$，递增区间是 $(-\infty,0]$，

又当 $a>1$ 时，$y=a^t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数，当 $0<a<1$ 时，$y=a^t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数，

所以当 $a>1$ 时，原函数的递增区间是 $(-\infty,0]$，递减区间是 $[0,+\infty)$；

当 $0<a<1$ 时，原函数的递增区间是 $[0,+\infty)$，递减区间是 $(-\infty,0]$.

(2)由 $4x-x^2>0$ 解得函数的定义域是 $(0,4)$. 令 $t=4x-x^2$，由于 $t=4x-x^2=-(x-2)^2+4$，所以 t 的递减区间是 $[2,4)$，递增区间是 $(0,2]$，又因为 $y=\log_3 t$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，所以函数的单调递增区间是 $(0,2]$ 递减区间是 $[2,4)$.

【方法探究】 复合函数的单调性法则是‘同增异减”，即当内函数与外函数的单调性相同时，复合函数为增函数，当内函数与外函数的单调性相反时，复合函数为减函数. 所以在判断复合函数单调性或求其单调区间时，首先求出函数的定义域，然后将复合函数分解为基本函数，再根据上述法则进行求解. 在解决这类问题时，最容易忽视和出错的地方是函数的定义域，一定要先求出函数的定义域，再求单调区间，其次对于有指数函数和对数函数参与的复合函数，还要注意对底数进行研究，注意分类讨论.

拓展3 若 $f(x)=-x^2+2ax$ 与 $g(x)=\frac{a}{x+1}$ 在区间 $[1,2]$ 上都是减函数，求 a 的取值范围.

题型三 函数的周期性

【调研4】 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=\frac{1}{f(x)}$，且 $f(x)$ 是偶函数，当 $x\in[3,4]$ 时，$f(x)=\log_3 x$，试求当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)$ 的解析式.

分析 依题意推出函数是周期函数，然后通过区间变换求出相应区间上的解析式，注意分段讨论.

解析 由 $f(x+1)=\frac{1}{f(x)}$ 得 $f(x+2)=f(x+1+1)=\frac{1}{f(x+1)}=f(x)$，

$\therefore f(x)$是周期为 2 的周期函数.

当 $x\in[-1,0)$时,$x+4\in[3,4)$,$\therefore f(x+4)=\log_3(x+4)$,

而$f(x+4)=f(x)$,所以$f(x)=\log_3(x+4)$;

又当 $x\in[0,1]$时,$-x\in[-1,0]$,$\therefore f(-x)=\log_3(-x+4)$,而$f(x)$是偶函数,

$\therefore f(-x)=f(x)$即$f(x)=\log_3(4-x)$,

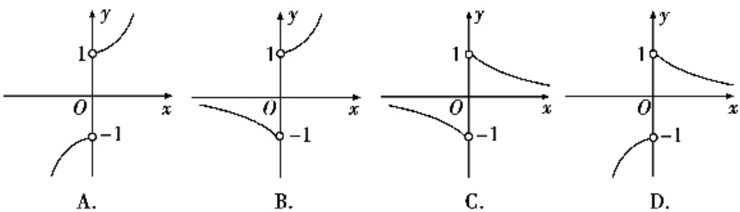
因此$f(x)=\begin{cases}\log_3(x+4),-1\leqslant x<0,\\ \log_3(4-x),0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

【3 方法探究】 利用函数周期性求函数解析式的关键仍然是区间变换,即把欲求解析式的区间通过周期性转化到已知解析式的区间上,此外还要注意函数周期的给出形式.

拓展 4 已知 R 上的函数$f(x)$是奇函数,且以 2 为周期,则$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)$的值是______.

题型四 函数的图像

【调研 5】 函数 $y=\dfrac{xa^x}{|x|}(0<a<1)$的图像的大致形状是



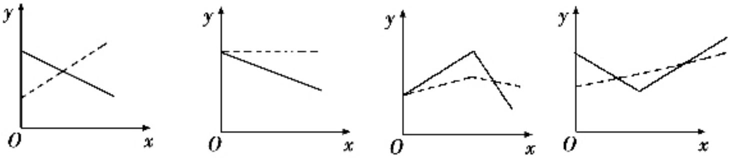
分析 由于函数解析式中含有绝对值,所以应先将函数化为分段函数,再分段进行判断.

解析 函数定义域为 $\{x|x\in\mathbf{R},x\neq 0\}$,且 $y=\dfrac{xa^x}{|x|}=\begin{cases}a^x,x>0,\\ -a^x,x<0\end{cases}$. 当 $x>0$ 时函数是一个指数函数,且$0<a<1$,所以函数递减;当 $x<0$ 时,$y=-a^x$ 的图像与指数函数 $y=a^x$ 的图像关于 x 轴对称,函数递增,故选 D.

【技巧点拨】 已知函数解析式研究函数图像问题,主要是将解析式进行恰当的化简,然后与一些熟知函数的图像相联系,通过各种图像变换(平移变换、伸缩变换、对称变换)等得到要求的函数图像,另外,还要善于借助解析式发现函数的性质(奇偶性、单调性、周期性等),以此帮助分析函数图像特征.

拓展 5 在股票买卖过程中,经常用到两种曲线,一种是即时价格曲线 $y=f(x)$,另一种是平均价格曲线 $y=g(x)$(如$f(2)=3$ 是指开始买卖后二个小时的即时价格

为 3 元；$g(2)=3$ 表示二个小时内的平均价格为 3 元），下面给出的四个图像，其中实线表示 $y=f(x)$，虚线表示 $y=g(x)$，其中可能正确的是



A. B. C. D.

【调研 6】 已知关于 x 的方程 $\sqrt{1-x^2}=x+m$ 有两个不相等的实数根，求实数 m 的取值范围.

分析 方程的根可以理解为两个函数图像交点的横坐标，所以可以通过函数图像进行求解.

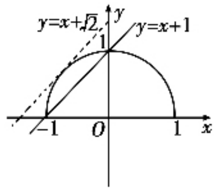


图 2－3－1

解析 设函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，$g(x)=x+m$，则函数 $f(x)$ 的图像是半个圆，函数 $g(x)$ 的图像是一条直线，m 恰好是它在 y 轴上的截距（如图 2－3－1）. 要使方程 $\sqrt{1-x^2}=x+m$ 有两个不相等的实数根，则应使两个函数的图像有两个不同交点. 由于直线斜率为 1，所以和半圆相切时 $m=\sqrt{2}$. 故实数 m 的取值范围是 $1\leqslant m<\sqrt{2}$.

【方法探究】 函数图像的应用非常广泛，它既可以用来研究函数的有关性质，也可以用来研究方程根的问题、不等式解的问题等. 在通过图像研究函数性质时，应重点抓住图像的对称性、增减性以及所经过的特殊点等方面. 在研究方程和不等式问题时，应结合图像的交点，变化趋势等进行分析.

拓展 6 （1）函数 $y=f(x)$ 的图像是圆心在原点的单位圆的两段弧（如图 2－3－2），则不等式 $f(x)<f(-x)+x$ 的解集为

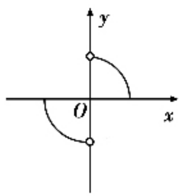


图 2－3－2

A. $\{x\mid -\frac{2\sqrt{5}}{5}<x<0$ 或 $\frac{2\sqrt{5}}{5}<x\leqslant 1\}$

B. $\{x\mid -1\leqslant x<-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}<x\leqslant 1\}$

C. $\{x\mid -1\leqslant x<-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{2\sqrt{5}}{5}<x\leqslant 1\}$

D. $\{x\mid -\frac{2\sqrt{5}}{5}<x<\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 且 $x\neq 0\}$

（2）已知定义在区间 $[0,1]$ 上的函数 $y=f(x)$，图像如图 2－3－3 所示. 对满足 0

重点突破

$<x_1<x_2<1$ 的任意 x_1,x_2,给出下列结论:

①$f(x_1)-f(x_2)>x_1-x_2$;

②$x_2f(x_1)>x_1f(x_2)$;

③$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f(\frac{x_1+x_2}{2})$.

其中正确结论的序号是______(把所有正确结论的序号都填上).

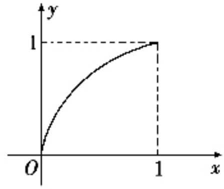


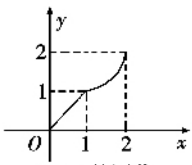
图 2-3-3

强化闯关

1. 已知函数 $f(x+1)$ 为奇函数,函数 $f(x-1)$ 为偶函数,且 $f(0)=2$,则 $f(4)=$

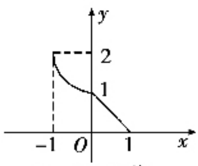
A. 2　　B. -2　　C. 4　　D. -4

2. 已知 $f(x)=\begin{cases}x+1, x\in[-1,0),\\ x^2+1, x\in[0,1]\end{cases}$,则下图所示函数的图像错误的是



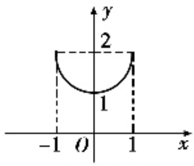
$f(x-1)$ 的图像

A.



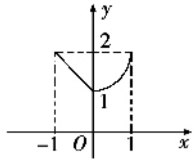
$f(-x)$ 的图像

B.



$f(|x|)$ 的图像

C.



$|f(x)|$ 的图像

D.

3. 方程 $\frac{2x+1}{x^2+2}=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的解所在的区间是

A. $(0,\frac{1}{3})$　　B. $(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$　　C. $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$　　D. $(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

4. 已知 $f(x)$ 为奇函数,且当 $x<0$ 时,$f(x)=x^2+3x+2$,若当 $x\in[1,3]$ 时,$n\leqslant f(x)\leqslant m$ 恒成立,则 $m-n$ 的最小值为

A. 2　　B. $\frac{9}{4}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{1}{4}$

5. 已知 $f(x)=\log_4(4^x+1)+kx(k\in\mathbf{R})$ 是偶函数.

(1)求 k 的值;

(2)证明 对任意实数 b,函数 $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 最多只有一个交点;

(3)设 $g(x)=\log_4(a\cdot 2^x-\frac{4}{3}a)$,若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有且只有一个公共点,求实数 a 的取值范围.

参考答案

【拓展】

1. 设 $x<0$，则 $-x>0$，于是 $f(-x)=-x(1-x)$，而 $f(x)$ 是奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$，故有 $-f(x)=-x(1-x)$，得 $f(x)=x(1-x)$，因此函数解析式 $f(x)=\begin{cases}x(1+x),x\geqslant 0,\\ x(1-x),x<0.\end{cases}$

2. 由于 $f'(x)=a-\dfrac{1}{ax^2}$，令 $f'(x)=a-\dfrac{1}{ax^2}>0$，由于 $a>0$，所以解得 $x>\dfrac{1}{a}$，即函数的递增区间是 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$；$f'(x)=a-\dfrac{1}{ax^2}<0$，解得 $0<x<\dfrac{1}{a}$，又 $\because f'(x)=0$ 时，$x=\dfrac{1}{a}$，$\therefore$ 函数的递减区间是 $(0,\dfrac{1}{a}]$.

3. 由 $g(x)=\dfrac{a}{x+1}$ 在区间 $[1,2]$ 上是减函数，得 $a>0$，又 $f(x)=-x^2+2ax$ 在区间 $[1,2]$ 上是减函数，$\therefore$ 对称轴 $x=a\leqslant 1$，故 $0<a\leqslant 1$.

4. $\because f(x)$ 是 R 上的奇函数，$\therefore f(0)=0$，又以 2 为周期，$\therefore f(2)=f(4)=f(6)=f(0)=0$，又 $f(-1)=-f(1)=f(1)$，$\therefore f(1)=0$，于是 $f(3)=f(5)=f(7)=0$，因此 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=0$.

5. C　选项 A 中，即时价格越来越低，那么平均价格不可能越来越高，所以错误；同理可知 B、D 都不符合实际情况，故选 C.

6. (1) A　由图像可知函数 $y=f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$. 于是不等式 $f(x)<f(-x)+x$ 等价于 $f(x)<\dfrac{x}{2}$. 又 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2},1\geqslant x>0,\\ -\sqrt{1-x^2},-1\leqslant x<0\end{cases}$，于是可解得 $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}<x<0$ 或 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}<x\leqslant 1$，故选 A.

(2) ②③　图像上任意两点 x_1,x_2 所在直线的斜率的变化范围为 $(0,+\infty)$，故①错；考查两点 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$ 连线的斜率，从图像上容易得出当 $0<x_1<x_2<1$ 时，应用斜率关系为 $\dfrac{f(x_1)}{x_1}>\dfrac{f(x_2)}{x_2}$，即 $x_2f(x_1)>x_1f(x_2)$，所以②正确；在区间 $[0,1]$ 上任取两点 A、B，过 A、B 分别作 x 轴的垂线，与曲线交点分别为 M、N，取 AB 中点 C，过 C 作 x 轴的垂线，与曲线交点为 P，与线段 MN 交点为 Q，则 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=CQ$，$f(\dfrac{x_1+x_2}{2})=CP$，从图像易知 $CP>CQ$，故有 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$，所以

重点突破

③正确.

【强化闯关】

1. B　依题意有 $2=f(0)=f(1-1)=f(-1-1)=f(-2)=f(-3+1)=-f(3+1)=-f(4)$，所以 $f(4)=-2$.

2. D　根据函数图像的变换规则可知只有 D 选项错误.

3. C　由题意知 $0<x<1$. 设 $y=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$，则 $y'=\dfrac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}>0$，

$\therefore y=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$ 在 $(0,1)$ 内为增函数，$\therefore y\in(\dfrac{1}{2},1)$，$\therefore \dfrac{1}{2}<\log_{\frac{1}{2}}x<1$，解得 $\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. B　当 $x\in[-3,-1]$ 时，可求得函数 $f(x)=x^2+3x+2$ 的最大值和最小值分别是 $2,-\dfrac{1}{4}$，由于函数是奇函数，所以函数在 $x\in[1,3]$ 时的最小值和最大值分别是 $-2,\dfrac{1}{4}$，所以 $m-n=\dfrac{9}{4}$.

5. (1) $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow f(-1)=f(1)\Rightarrow k=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow f(x)=\log_4(4^x+1)-\dfrac{1}{2}x$.

(2) 证法一　$f(x)=\dfrac{1}{2}x+b\Rightarrow 4^x+1=4^{x+b}$. 假定存在 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1\neq x_2$，使得 $4^{x_1}+1=4^{x_1+b}$，$4^{x_2}+1=4^{x_2+b}$，则两式相减得 $4^{x_1}-4^{x_2}=4^b(4^{x_1}-4^{x_2})\Rightarrow b=0$，但当 $b=0$ 时，$4^x+1=4^x$ 不成立，故假定为假，命题为真.

证法二　$f(x)=\dfrac{1}{2}x+b\Rightarrow b=\log_4(4^x+1)-x$，①

令 $g(x)=\log_4(4^x+1)-x$，则 $g'(x)=-\dfrac{1}{4^x+1}<0$，所以函数 $g(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是减函数，因此，对任意实数 b，方程①最多只有一个实数解，亦即函数 $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=\dfrac{1}{2}x+b$ 最多只有一个交点.

(3) $f(x)=g(x)\Rightarrow 4^x+1=a(4^x-\dfrac{4}{3}\cdot 2^x)$. 令 $2^x=t>0$，则原问题等价于关于 t 的方程 $(a-1)t^2-\dfrac{4}{3}at-1=0$ 只有一个正实根，从而有：

①若 $a-1=0$，即 $a=1$，则 $t=-\dfrac{3}{4}$，不合题意，舍去；

②若 $\Delta=\dfrac{16}{9}a^2+4(a-1)=0$，即 $a=\dfrac{3}{4}$ 或 $a=-3$，经检验，$a=-3$ 符合题意；

③方程有一个正根和一个负根，即$\frac{-1}{a-1}<0$，即 $a>1$ 符合题意.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\{-3\}\cup(1,+\infty)$.

重点 4　指数函数与对数函数

在物理中，我们知道，声强是表示声波强度的物理量，可用公式 $I=\frac{1}{2}\rho vA^2\omega$表示，其中，$v$ 表示声速，ω 和 A 分别是声波的频率和振幅，ρ 是媒质的密度. 由于声强的变化范围非常大，数量级可以相差很多，因此常采用对数标度，这就引入了声强级的概念，规定声强级 $L=\lg\frac{I}{I_0}$. 通常规定$I_0=10^{-20}$ w/m^2（相当于频率为 1 000 Hz 时能够引起听觉的最弱的声强），这时计算出来的 L 就是声强 I 的量度，式中声强级的单位为贝尔. 实际上，由于贝尔这个单位太大，通常采用贝尔的$\frac{1}{10}$作单位，这就是分贝.

现在请你计算当被测量的声强 I 为声强 I_0 的 100 倍时，声强级 L 为多少分贝？

重点诠释

本部分调研的内容是指数函数与对数函数，重点是指数函数和对数函数的图像和性质，作为两种常见的函数模型，指数函数和对数函数也是考查学生基本知识、基本能力的重要载体，同时由于对数问题一直是高中数学的一个难点内容，所以高考对本部分的考查注重基础性，即以考查基本知识、基本方法为主，题型主要是以选择题和填空题的形式出现，也可能以解答题的形式出现.

对本部分内容的复习一定要重视基础性，对基本的定义、公式、法则、性质等要熟练掌握，通过常见题型的训练，掌握一些常见问题的处理方法. 另外在本部分内容的复习中，还要特别重视图像和性质之间的对应关系，既要善于运用图像解决性质问题，又要善于通过性质研究图像特征. 另外，在解决对数问题时，一定要优先考虑其定义域，在定义域的前提下解决问题，否则非常容易出现错误结果.

典例调研

题型一　指数式与对数式

【调研 1】　设 $60^a=3$，$60^b=5$，试求 $12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}$的值.

解析　$\because 60^a=3$，$\therefore a=\log_{60}3$，又$\because 60^b=5$，$\therefore b=\log_{60}5$，

$\therefore 1-b=1-\log_{60}5=\log_{60}12$，$1-a-b=1-\log_{60}3-\log_{60}5=\log_{60}4$，

$\therefore \dfrac{1-a-b}{2(1-b)}=\dfrac{\log_{60}4}{2\log_{60}12}=\dfrac{2\log_{60}2}{2\log_{60}12}=\log_{12}2$,

故 $12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}=12^{\log_{12}2}=2.$

【方法探究】 指数式与对数式的化简、计算与证明问题历来是学习的难点，解决这类问题首先要熟练掌握指数式与对数式之间的关系，能进行互化；其次要掌握对数的常用的运算法则如：$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$，$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$，$\log_a M^n=n\log_a M$，对数恒等式 $a^{\log_a N}=N$（其中 $M>0$，$N>0$，$a>0$ 且 $a\neq 1$），以及换底公式 $\log_a b=\dfrac{\log_c a}{\log_c b}$（$a$，$b$，$c$ 均大于 0 且均不等于 1）等，而且还要善于逆用、变形用这些公式.

拓展 1 已知 $a+b=\lg^3 2+\lg^3 5+3\lg 2\lg 5$，则 a^3+b^3+3ab 的值等于______.

【调研 2】 设 $\log_a c$，$\log_b c$ 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的两根，求 $\log_{\frac{b}{a}} c$ 的值.

分析 条件中给出的对数的底数不同，但真数相同，可利用换底公式转化为底数相同的对数.

解析 $\because \log_a c$，$\log_b c$ 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的两根，

$\therefore \begin{cases}\log_a c+\log_b c=3,\\ \log_a c\cdot\log_b c=1,\end{cases}$ 由换底公式得 $\begin{cases}\dfrac{1}{\log_c a}+\dfrac{1}{\log_c b}=3,\\ \dfrac{1}{\log_c a}\cdot\dfrac{1}{\log_c b}=1,\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}\log_c a\cdot\log_c b=1,\\ \log_c a+\log_c b=3,\end{cases}$ $\therefore |\log_c a-\log_c b|=\sqrt{(\log_c a+\log_c b)^2-4\log_c a\cdot\log_c b}=\sqrt{5}$，

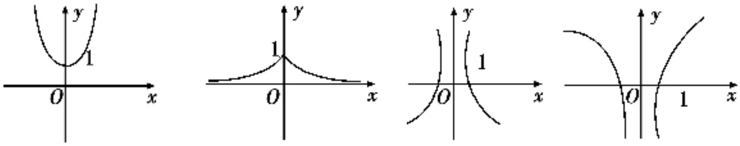
即 $|\log_c \dfrac{a}{b}|=\sqrt{5}$，$\therefore |\log_c \dfrac{b}{a}|=\sqrt{5}$，$|\log_{\frac{b}{a}} c|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\therefore \log_{\frac{b}{a}} c=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

【技巧点拨】 对数的换底公式在对数的计算、化简和证明问题中具有非常重要的应用，当题目中对数的底数不同时，可以利用换底公式转化为底数相同的对数，再进行求解. 特别地，由换底公式可得 $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$，利用这个公式可以将对数的底数和真数互换. 此外在本题的解答中还充分利用了韦达定理，使问题的求解得以简化.

拓展 2 若 $\lg a$，$\lg b$ 是方程 $2x^2-4x+1=0$ 的两个实根，试求 $\lg(ab)\cdot(\log_a b+\log_b a)$ 的值.

题型二 指数函数与对数函数的图像

【调研 3】 设 $a>1$，对于实数 x，y 满足：$|x|-\log_a \dfrac{1}{y}=0$，则 y 关于 x 的函数图像为



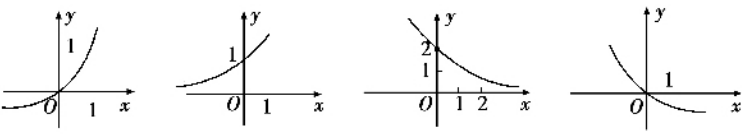
A.　　B.　　C.　　D.

解析　由 $|x| - \log_a \frac{1}{y} = 0$ 得 $y = a^{-|x|} = \left(\frac{1}{a}\right)^{|x|} = \begin{cases} \left(\frac{1}{a}\right)^{x}, x \geqslant 0, \\ \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}, x < 0, \end{cases}$

由于 $a > 1$，所以函数在 $[0, +\infty)$ 上应是减函数，经过 $(0,1)$ 点，且函数为偶函数，图像关于 y 轴对称，故选 B.

【知识链接】　一般地，函数 $y = f(|x|)$ 是一个偶函数，它的图像与函数 $y = f(x)$ 的图像有着密切的联系，函数 $y = f(|x|)$ 在 x 轴右边的图像与函数 $y = f(x)$ 的图像相同，而左边的图像与右边的图像关于 y 轴对称. 应注意区分函数 $y = f(|x|)$ 与函数 $y = |f(x)|$ 图像的不同，函数 $y = |f(x)|$ 的图像是把函数 $y = f(x)$ 图像在 x 轴上方的部分不变，在 x 轴下方的部分关于 x 轴对称到 x 轴上方而得到的.

拓展 3　已知函数 $y = \log_2 x$，其反函数是 $y = f^{-1}(x)$，则函数 $y = f^{-1}(1 - x)$ 的图像是



A.　　B.　　C.　　D.

【调研 4】　若 $\log_m 2 > \log_n 2$ $(m > 0, m \neq 1, n > 0, n \neq 1)$，则下列不等式中可能成立的是

A. $2^m > 2 > 2^n$　　　　B. $2^n > 2 > 2^m$

C. $2^m > 2^n > 2$　　　　D. $2 > 2^m > 2^n$

解析　由于 $\log_m 2 > \log_n 2$ 所以根据对数函数的图像可得 m, n 的取值有以下 3 种情况：

(1) $n > m > 1$；(2) $0 < m < n < 1$；(3) $m > 1 > n$，于是可能有 $2^m > 2 > 2^n$，而 $2^n > 2 > 2^m$，$2^m > 2^n > 2$，$2 > 2^m > 2^n$ 均不可能，故选 A.

【方法探究】 指数函数与对数函数的图像是分析、解决与指数函数和对数函数有关的问题，以及理解和记忆指数函数和对数函数性质的关键，因此我们必须熟练地掌握它们. 首先，要抓住底数对它们的图像的制约作用，把握它们图像的特征：(1) 底数与 1 的大小关系决定了图像的升降，即 $a>1$ 时，图像上升；$0<a<1$ 时，图像下降；(2) 底数的大小决定了图像的高低，即在 y 轴右边，指数函数 $y=a^x$ 的图像"底大图高"，在 x 轴上方，对数函数 $y=\log_a x$ 的图像"底大图右".

拓展 4 (1) 方程 $\log_2(x+4)=3^x$ 的实根的个数是

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(2) 若 $f(x)=|\lg x|$ 且当 $0<a<b<c$ 时有 $f(a)>f(c)>f(b)$，则下列关系式正确的是

A. $ac+1<a+c$　　B. $ac+1>a+c$

C. $ac+1=a+c$　　D. $ac>1$

题型三 指数函数与对数函数的性质

【调研 5】 设 $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{a}+\dfrac{a}{e^{-x}}$ 是定义在 **R** 上的函数.

(1) $f(x)$ 可能是奇函数吗；

(2) 当 $a=1$ 时，试研究 $f(x)$ 的单调性.

解析 (1) 假设 $f(x)$ 是奇函数，

由于定义域是 **R**，$\therefore f(-x)=-f(x)$ 对任意 x 都成立，

即 $\dfrac{e^x}{a}+\dfrac{a}{e^x}=-\left(\dfrac{e^{-x}}{a}+\dfrac{a}{e^{-x}}\right)$，整理得 $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)(e^x+e^{-x})=0$.

即 $a+\dfrac{1}{a}=0$，即 $a^2+1=0$，显然该方程无解，

$\therefore f(x)$ 不可能是奇函数.

(2) 当 $a=1$ 时，$f(x)=e^{-x}+e^x$，以下讨论其单调性：

任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=e^{x_1}+e^{-x_1}-e^{x_2}-e^{-x_2}=\dfrac{(e^{x_1}-e^{x_2})(e^{x_1+x_2}-1)}{e^{x_1}\cdot e^{x_2}}$，

其中 $e^{x_1}\cdot e^{x_2}>0$，$e^{x_1}-e^{x_2}<0$，当 $e^{x_1+x_2}-1>0$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$，$f(x)$ 为增函数，

此时需要 $x_1+x_2>0$，即增区间为 $[0,+\infty)$，反之 $(-\infty,0]$ 为减区间，即函数在区间 $[0,+\infty)$ 上是增函数，在 $(-\infty,0]$ 上为减函数.

【方法探究】 判断一个函数是否是奇偶函数，一般要利用奇偶函数的定义，若已知一个函数的奇偶性求参数的取值范围，也要用到奇偶函数的定义，也可以采用取特殊值的办法进行判断. 另外若一个函数是奇函数，且在 $x=0$ 处有定义，则必有 $f(0)=0$，例如：上述问题中的(1)就可用这种方法求解，由于 $f(x)=\frac{e^{-x}}{a}+\frac{a}{e^{-x}}$ 是定义在 R 上的函数，若它是奇函数，则必有 $f(0)=\frac{1}{a}+a=0$，这显然无解，即不存在实数 a，使得函数是奇函数.

拓展 5 (1)若 $a>1$，且 $a^{-m}+\log_a n<a^{-n}+\log_a m$，则 m,n 的关系是

A. $m>n>0$　　B. $m=n>0$　　C. $n>m>0$　　D. 不确定

(2)设偶函数 $f(x)=\log_a|x+b|$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则 $f(b-2)$ 与 $f(a+1)$ 的大小关系是

A. $f(b-2)=f(a+1)$　　B. $f(b-2)>f(a+1)$

C. $f(b-2)<f(a+1)$　　D. 不能确定

【调研 6】 函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且对任意实数 x，都有 $f(x+1)=f(x-1)$ 成立. 已知当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=\log_a x$.

(1)求 $x\in[-1,1]$ 时，函数 $f(x)$ 的表达式；

(2)求 $x\in[2k-1,2k+1]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式；

(3)若函数 $f(x)$ 最大值为 $\frac{1}{2}$，在区间 $[-1,3]$ 上，解关于 x 的不等式 $f(x)>\frac{1}{4}$.

解析 (1)$\because f(x+1)=f(x-1)$，且 $f(x)$ 是 R 上的偶函数，

$$\therefore f(x+2)=f(x)=\begin{cases}\log_a(2+x), & x\in[-1,0],\\ \log_a(2-x), & x\in(0,1].\end{cases}$$

(2)当 $x\in[2k-1,2k]$ 时，$f(x)=f(x-2k)=\log_a(2+x-2k)$，

同理当 $x\in(2k,2k+1]$ 时，$f(x)=\log_a(2-x+2k)$，

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\log_a(2+x-2k), & x\in[2k-1,2k],\\ \log_a(2-x+2k), & x\in(2k,2k+1]\end{cases}(k\in\mathbf{Z}).$$

(3)由于函数以 2 为周期，故考查区间 $[-1,1]$，

若 $a>1$ 时，由 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$ 知 $f(0)=f(x)_{\max}=\log_a 2=\frac{1}{2}$，即 $a=4$，

若 $0<a<1$，则当 $x=1$ 或 -1 时 $f(x)$ 有最大值，即 $\log_a(2-1)=\frac{1}{2}$，矛盾舍去，

$\therefore$ 综上可得，$a=4$.

当 $x\in[-1,1]$ 时,若 $x\in[-1,0]$,则 $\log_4(2+x)>\frac{1}{4}$,$\therefore 0\geqslant x>\sqrt{2}-2$.

若 $x\in(0,1]$,则 $\log_4(2-x)>\frac{1}{4}$,$\therefore 0<x<2-\sqrt{2}$,

$\therefore$ 此时满足不等式的解集为$(\sqrt{2}-2,2-\sqrt{2})$.

$\because f(x)$是以 2 为周期的周期函数,

$\therefore$ 当 $x\in(1,3]$ 时,$f(x)>\frac{1}{4}$的解集为$(\sqrt{2},4-\sqrt{2})$.

综上可知,所求不等式的解集为$(-2+\sqrt{2},2-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},4-\sqrt{2})$.

【方法探究】 指数函数与对数函数的性质是每年高考必考内容之一,其中它们的单调性和对数函数的定义域问题是热点. 指数函数与对数函数的单调性取决于底数与'1'的大小关系,即 $0<a<1\Rightarrow$递减,$a>1\Rightarrow$递增. 利用它们的单调性可以解决有关的大小比较问题,进而可解指数、对数不等式和方程,解指数、对数不等式和方程的基本方法是'同底法",即将不等式和方程两边化为同底的指数式(或对数式),然后利用指数函数和对数函数的单调性脱去幂的形式(或对数符号),得出自变量的不等关系(或相等关系),从而把问题转化为熟悉的不等式(或方程)来解决.

拓展 6 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 有最小正周期 2,且 $x\in(0,1)$ 时,$f(x)=\frac{2^x}{4^x+1}$,

(1)求 $f(x)$ 在$[-1,1]$上的解析式;

(2)判断 $f(x)$ 在$(0,1)$上的单调性,并给予证明;

(3)当 λ 为何值时,关于 x 的方程 $f(x)=\lambda$ 在 $x\in[-1,1]$ 上有实数解.

题型四 指数函数与对数函数的综合应用

【调研 7】 已知函数 $f(x)=\lg\frac{kx-1}{x-1}$,$(k\in\mathbf{R}$ 且 $k>0)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域;

(2)若函数 $f(x)$ 在$[10,+\infty)$上单调递增,求 k 的取值范围.

解析 (1)$\because \frac{kx-1}{x-1}>0$ 及 $k>0$,$\therefore \frac{x-\frac{1}{k}}{x-1}>0$,

①当 $0<k<1$ 时,得 $x<1$ 或 $x>\frac{1}{k}$;

②当 $k=1$ 时,由$\frac{x-1}{x-1}>0$ 可得 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq1$;

③当 $k>1$ 时，得 $x<\frac{1}{k}$ 或 $x>1$. 故 $f(x)$ 的定义域为：

当 $0<k<1$ 时，定义域为 $(-\infty,1)\cup(\frac{1}{k},+\infty)$；

当 $k=1$ 时，定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$；

当 $k>1$ 时，定义域为 $(-\infty,\frac{1}{k})\cup(1,+\infty)$.

(2) $\because f(x)$ 在 $[10,+\infty)$ 上是增函数，$\therefore \frac{10k-1}{10-1}>0$，$\therefore k>\frac{1}{10}$，

又 $f(x)=\lg\frac{kx-1}{x-1}=\lg(k+\frac{k-1}{x-1})$ 对任意的 x_1,x_2，当 $10\leqslant x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，

即 $\lg(k+\frac{k-1}{x_1-1})<\lg(k+\frac{k-1}{x_2-1})$ 得 $\frac{k-1}{x_1-1}<\frac{k-1}{x_2-1}\Rightarrow(k-1)(\frac{1}{x_1-1}-\frac{1}{x_2-1})<0$，

又 $\because \frac{1}{x_1-1}>\frac{1}{x_2-1}$，$\therefore k-1<0$，$\therefore k<1$.

综上知 k 的取值范围是 $(\frac{1}{10},1)$.

【领悟整合】 本题是一个含参数的对数结构的复合函数问题，第(1)问在分析时由对数函数的定义域入手，得到一个关于 x 的分式不等式，再对参数 k 进行讨论，得到结果. 第(2)问根据函数 $f(x)$ 的增减性，分析出真数的范围，转化为对数函数的大小比较问题. 另外本题要特别注意在第(1)问中，对参数 k 的讨论要不重复，不遗漏，有三种情况. 请同学们考虑，如果去掉原来题目中的 $k>0$，会有几种情况需要讨论.

拓展 7 是否存在实数 a，使得 $f(x)=\log_a(ax-\sqrt{x})$ 在区间 $[2,4]$ 上是增函数？若存在，求出 a 的取值范围；若不存在，说明理由.

强化闯关

1. 函数 $f(x)=\log_a x\ (a>0$ 且 $a\neq1)$，若 $f(m)-f(n)=1$，则 $f(m^2)-f(n^2)$ 等于

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\log_a 2$

2. 设函数 $f(x)=\log_a(x+b)\ (a>0,a\neq1)$ 的图像过点 $(2,1)$，其反函数的图像过点 $(2,8)$，则 $a+b$ 等于

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

3. 设 $0<a<1$，函数 $f(x)=\log_a x+\log_{\frac{1}{a}}(2-x)$，则当 $f(x)<0$ 时，x 的取值范围是

重点突破

A. $(0,1)$　　B. $(0,2)$　　C. $(1,2)$　　D. $(\frac{1}{2},1)$

4. 已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$f(x)=x^2-a^x$，当 $x\in(-1,1)$ 时，均有 $f(x)<\frac{1}{2}$，则实数 a 的取值范围是

A. $(0,\frac{1}{2}]\cup[2,+\infty)$　　B. $[\frac{1}{4},1)\cup(1,4)$

C. $[\frac{1}{2},1)\cup(1,2)$　　D. $(0,\frac{1}{4}]\cup[4,+\infty)$

5. 设函数 $f(x)=\lg(x^2+ax-a-1)$，给出下述命题：
①$f(x)$ 有最小值；②当 $a=0$ 时，$f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$；③若 $f(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是 $a\geqslant -4$.
则其中正确的命题是______.（要求 把正确命题的序号都填上）

6. 已知函数 $y=\log_a x$，其中 $a\in\{a\mid 20<12a-a^2\}$.
(1) 判断函数 $y=\log_a x$ 的增减性；
(2) 若命题 P：$|f(\sqrt{x})|<1-|f(2\sqrt{x})|$ 为真命题，求实数 x 的取值范围.

参考答案

【拓展】

1. 1　$\because a+b=(\lg 2+\lg 5)(\lg^2 2-\lg 2\lg 5+\lg^2 5)+3\lg 2\lg 5=\lg^2 2+2\lg 2\lg 5+\lg^2 5=(\lg 2+\lg 5)^2=1$，
$\therefore$ 原式 $=(a+b)(a^2-ab+b^2)+3ab=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=1^2=1$.

2. 不妨设 $a>b>0$，依题意有 $\begin{cases}\lg a+\lg b=2,\\ \lg a\cdot\lg b=\frac{1}{2},\end{cases}$

又 $\log_a b+\log_b a=\frac{\lg b}{\lg a}+\frac{\lg a}{\lg b}=\frac{1}{\lg a\cdot\lg b}(\lg^2 a+\lg^2 b)$
$=2[(\lg a+\lg b)^2-2\lg a\cdot\lg b]$
$=2[2^2-1]=6$，

$\therefore \lg(ab)\cdot(\log_a b+\log_b a)=(\lg a+\lg b)\times 6=2\times 6=12$.

3. C　$f^{-1}(x)=2^x$，$\therefore f^{-1}(1-x)=2^{1-x}$，先作 $y=2^{-x}$ 的图像，再作 $y=2^{-(x-1)}$ 的图像，即把 $y=2^{-x}$ 的图像向右平行移动一个单位. 故选 C.

4. (1) C　画出函数 $y=\log_2(x+4)$ 和 $y=3^x$ 的图像，两图像有 2 个交点，所以方程有 2 个实根. 故选 C.
(2) A　结合函数 $y=|\lg x|$ 的图像知，$0<a<1$，$c>1$，

$\therefore a+c-(ac+1)=(c-1)(1-a)>0$,

即 $ac+1<a+c$. 故选 A.

5. (1) A　设 $f(x)=a^{-x}-\log_a x$,

$\because a>1$, $\therefore f(x)$ 是减函数,

$\because a^{-m}+\log_a n<a^{-n}+\log_a m$, $\therefore a^{-m}-\log_a m<a^{-n}-\log_a n$,

由 $f(x)$ 是减函数即得 $m>n>0$. 故选 A.

(2) C　$\because f(x)$ 是偶函数, $\therefore b=0$, 又 $\because f(x)=\log_a|x|$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

$\therefore 0<a<1$, 于是 $a+1\in(1,2)$, $b-2=-2$, 即 $f(b-2)=f(-2)=f(2)$,

又 $\because f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, $\therefore f(b-2)<f(a+1)$. 故选 C.

6. (1) 当 $x\in(-1,0)$ 时, $-x\in(0,1)$, $\because f(x)$ 为奇函数,

$\therefore f(x)=-f(-x)=\dfrac{-2^x}{4^x+1}$,

又 $f(0)=0$, $f(-1)=f(-1+2)=f(1)$, $f(-1)=-f(1)$,

$\therefore f(1)=-f(1)=f(-1)=0$, $\therefore$ 可得函数 $f(x)$ 的表达式为分段函数,

即 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2^x}{4^x+1}, x\in(-1,0),\\ 0, x\in\{-1,0,1\},\\ \dfrac{2^x}{4^x+1}, x\in(0,1).\end{cases}$

(2) $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数. 证明: 设 $x_1, x_2\in(0,1)$, $x_1<x_2$, 则 $f(x_1)-f(x_2)=$

$\dfrac{2^{x_1}}{4^{x_1}+1}-\dfrac{2^{x_2}}{4^{x_2}+1}=\dfrac{2^{x_1+x_2}(2^{x_2}-2^{x_1})+2^{x_1}-2^{x_2}}{(4^{x_1}+1)(4^{x_2}+1)}=\dfrac{(2^{x_1+x_2}-1)(2^{x_2}-2^{x_1})}{(4^{x_1}+1)(4^{x_2}+1)}$.

$\because 2^{x_1+x_2}-1>0$, $2^{x_2}-2^{x_1}>0$, $\therefore f(x_1)>f(x_2)$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数.

(3) $\because$ 当 $x\in(0,1)$ 时, $f(x)$ 是减函数, $\therefore f(x)\in(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{2})$,

同理 $x\in(-1,0)$ 时, $f(x)\in(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{2}{5})$, 又 $\because f(1)=f(0)=f(-1)=0$,

$\therefore$ 当 $\lambda\in\{\lambda\mid-\dfrac{1}{2}<\lambda<-\dfrac{2}{5}$ 或 $\dfrac{2}{5}<\lambda<\dfrac{1}{2}$ 或 $\lambda=0\}$ 时, $f(x)=\lambda$ 在 $x\in[-1,1]$ 上有实数解.

7. 设 $t=\sqrt{x}$, 由对数的定义有 $ax-\sqrt{x}>0\Rightarrow at(t-\dfrac{1}{a})>0$.

$\because a>0$, $t>0$, $\therefore$ 当 $t>\dfrac{1}{a}$ 时, 原式有意义.

重点突破

又知 $u(t)=at^2-t=a\left(t-\frac{1}{2a}\right)^2-\frac{1}{4a}\left(t>\frac{1}{a}\right)$ 是以 $t=\frac{1}{2a}$ 为对称轴的抛物线，且有 $t>\frac{1}{a}>\frac{1}{2a}$，即定义域区间 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 在对称轴 $x=\frac{1}{2a}$ 的右侧，因抛物线开口向上，知 $u(t)$ 在定义域区间上单调递增，要使原函数在 $x\in[2,4]$ 上单调递增，应有 $a>1$ 且 $\frac{1}{a}\leqslant 2$，解得 $a>1$.

【强化闯关】

1. A　由 $f(m)-f(n)=1$ 得 $\log_a m-\log_a n=1$，$\therefore \log_a\frac{m}{n}=1$，

$\therefore f(m^2)-f(n^2)=\log_a\left(\frac{m}{n}\right)^2=2\log_a\frac{m}{n}=2$，故选 A.

2. C　由题意知函数 $f(x)=\log_a(x+b)$ 的图像过 $(2,1)$、$(8,2)$ 两点，将两点分别代入 $f(x)$ 即可得 $a=3$，$b=1$. 故选 C.

3. C　$\because f(x)=\log_a x+\log_{\frac{1}{a}}(2-x)=\log_a x-\log_a(2-x)=\log_a\frac{x}{2-x}$，

$\therefore$ 函数定义域为 $\{x|0<x<2\}$，$\therefore$ 当 $f(x)<0$ 时，$\frac{x}{2-x}>1$，解得 $1<x<2$，故选 C.

4. C　（数形结合法）$f(x)<\frac{1}{2}\Rightarrow x^2-\frac{1}{2}<a^x$，$x\in(-1,1)$ 时恒成立，在同一直角坐标系中作出函数 $g(x)=x^2-\frac{1}{2}$，$\varphi(x)=a^x$ 的图像，当 $a>1$ 时，$g(-1)=\frac{1}{2}$，依题意，$\varphi(-1)=a^{-1}\geqslant g(-1)=\frac{1}{2}$，$\therefore 1<a\leqslant 2$；当 $0<a<1$ 时，$\varphi(1)\geqslant g(1)$，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{1}{2}\leqslant a<1$，故选 C.

5. ②　当 $x^2+ax-a-1$ 接近零时，$f(x)$ 无最小值，所以①不正确；当 $a=0$ 时，x^2-1 取遍所有的正数，从而 $f(x)$ 的值域为 R；若 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 单调，则应有 $4+2a-a-1>0$ 得 $a>-3$，$\therefore$ ③不正确，故正确的命题是②.

6. (1) $\because a\in\{a|20<12a-a^2\}$，$\therefore a^2-12a+20<0$，即 $2<a<10$，

$\therefore$ 函数 $y=\log_a x$ 是增函数.

(2) $|f(\sqrt{x})|<1-|f(2\sqrt{x})|$，即 $|\log_a\sqrt{x}|+|\log_a(2\sqrt{x})|<1$，必有 $x>0$，

当 $0<x<\frac{1}{4}$ 时，$\log_a\sqrt{x}<\log_a(2\sqrt{x})<0$，不等式化为 $-\log_a\sqrt{x}-\log_a(2\sqrt{x})<1$，

故 $\log_a(2x)>-1$，$\therefore x>\frac{1}{2a}$，此时 $\frac{1}{2a}<x<\frac{1}{4}$；

当$\frac{1}{4}\leqslant x<1$时，$\log_a\sqrt{x}<0\leqslant\log_a 2\sqrt{x}$，不等式化为$-\log_a\sqrt{x}+\log_a(2\sqrt{x})<1$，

$\therefore \log_a 2<1$，这显然成立，此时$\frac{1}{4}\leqslant x<1$；

当$x\geqslant 1$时，$0\leqslant\log_a\sqrt{x}<\log_a(2\sqrt{x})$，不等式化为$\log_a\sqrt{x}+\log_a(2\sqrt{x})<1$，

$\therefore \log_a(2x)<1$，故$x<\frac{a}{2}$，此时$1\leqslant x<\frac{a}{2}$；

综上所述，使命题P为真命题的x的取值范围是$\{x|\frac{1}{2a}<x<\frac{a}{2}\}$.

重点5　导数

在物理中我们学过，物体做匀变速直线运动的位移与时间的函数关系是$S(t)=v_0t+\frac{1}{2}at^2$，速度与时间的函数关系是$v(t)=v_0+at$，二者之间也有关系$S'(t)=v(t)$.

以上这些关系你发现了吗？了解这些关系不但可以帮助我们记忆公式，而且可以帮助我们加深对导数概念的理解，你能利用导数的有关知识对上述关系加以解释吗？

重点诠释

本重点调研的主要内容是：导数的概念和运算. 从新课程标准对本部分内容的要求以及近几年的高考试题来看，高考对本部分内容的考查主要采用选择和填空题的形式，题目难度为容易题和中等题，其中主要以导数的运算为主要考查重点.

虽然本部分内容的试题难度较低，但其基础性不容忽视，导数的运算是导数应用的重要前提，因此在复习中应注重基础，熟练掌握相关的概念和公式，以及解决问题的一些常用的方法和技巧.

典例调研

题型一　导数的概念与运算

【调研1】　设$f(x)=x(2-|x|)$，则$f'(0)$的值

A. 等于0　　B. 等于1　　C. 等于2　　D. 不存在

分析　由于函数$f(x)$是一个分段函数，0是它的分段点，所以$f'(0)$的值应该利用导数的定义来求解.

解析　由导数的定义知：$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2-|\Delta x|)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2-|\Delta x|)=2$，$\therefore f'(0)=2$，故选 C.

【误点警示】 对于分段函数，求它在分段点处的导数时，一般要利用定义求解，应防止出现以下错误：$\because f(x)=\begin{cases}2x-x^2, x>0,\\ 0, x=0,\\ 2x+x^2, x<0,\end{cases}$ $\therefore f'(x)=\begin{cases}2-2x, x>0,\\ 0, x=0,\\ 2+2x, x<0,\end{cases}$ 从而 $f'(0)=0$.

拓展 1　已知函数 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\cdot\Delta x}=-1$，则 $f'(1)=$

A. -1　　B. -3　　C. $-\dfrac{1}{3}$　　D. 不存在

【调研 2】 若函数 $y=\dfrac{e^x}{x}$ 在 $x=x_0$ 处的导数值与函数值互为相反数，则 x_0 的值

A. 等于 0　　B. 等于 1　　C. 等于 $\dfrac{1}{2}$　　D. 不存在

分析　可先求出函数 $y=\dfrac{e^x}{x}$ 的导函数，然后根据条件建立关于 x_0 的方程进行求解.

解析　由于 $y=\dfrac{e^x}{x}$，$\therefore f(x_0)=\dfrac{e^{x_0}}{x_0}$，又 $y'=\dfrac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$，

$\therefore f'(x_0)=\dfrac{e^{x_0}(x_0-1)}{x_0^2}$，依题意 $f(x_0)+f'(x_0)=0$，$\therefore \dfrac{e^{x_0}}{x_0}+\dfrac{e^{x_0}(x_0-1)}{x_0^2}=0$，

$\therefore 2x_0-1=0$，得 $x_0=\dfrac{1}{2}$，故选 C.

【考向预测】 导数的运算是导数应用的前提，因此应熟练地掌握导数的运算法则以及常见函数的求导公式，近几年的高考试题中，对 $y=e^x$，$y=\ln x$ 等函数导数的考查比较频繁，因此应掌握与这两个函数有关的导数运算.

拓展 2　设 $f(x)=a\cdot e^x+b\ln x$，且 $f'(1)=e$，$f'(-1)=\dfrac{1}{e}$，求 a,b 的值.

题型二　生活中的优化问题

【调研 3】 某银行准备新设一种定期存款业务，经预测：存款量与存款利率的平方成正比，比例系数为 $k(k>0)$，贷款的利率为 4.8%，又银行吸收的存款能全部放贷出去，试确定当存款利率为多少时，银行可获得最大收益？

分析　银行收益 = 贷款收益 − 存款利息，故可设出存款利率，将银行收益表示为存款利率的函数，利用导数求出函数的最值即可.

解析　设存款利率为 x，则应有 $x\in(0,0.048)$，依题意：存款量是 kx^2，银行应支付的利息是 kx^3，贷款的收益是 $0.048kx^2$，所以银行的收益是 $y=0.048kx^2-kx^3$，由于

$y'=0.096kx-3kx^2$，令 $y'=0$ 得 $x=0.032$ 或 $x=0$（舍去），又当 $0<x<0.032$ 时，$y'>0$ 当 $0.032<x<0.048$ 时，$y'<0$，所以当 $x=0.032$ 时，y 取得最大值，即当存款利率定为 3.2% 时，银行可获得最大收益.

【知识链接】 生活中的许多优化问题，往往可以归结为求函数的最大值或最小值问题，在利用导数解决这类优化问题时，其一般步骤是：(1)设出恰当的未知量，并确定未知量的取值范围（即函数定义域）；(2)依题意将所求最值的量表示为未知量的函数；(3)求出函数的导数，令导数等于 0，得到导数为 0 的点；(4)通过单调性确定出函数的最值点以及最值.

拓展 3 一火车锅炉每小时消耗煤的费用与火车行驶的速度的立方成正比，已知当速度为每小时 20 千米时，每小时消耗的煤的费用为 40 元，至于其他费用则是每小时需 200 元，问火车行驶的速度多大，才能使火车从甲城开往乙城的总费用为最省（已知火车的最高速度为每小时 100 千米）？

【调研 4】 某地政府为科技兴市，欲将图 2－5－1 所示的一块不规则的非农业用地建成一个矩形高科技工业园区. 已知 $AB\perp BC$，$OA/\!/BC$，且 $AB=BC=2AO=4$ km，曲线段 OC 是以点 O 为顶点且开口向右的抛物线的一段，如果要使矩形的相邻两边分别落在 AB、BC 上，且一个顶点落在曲线段 OC 上，问应如何规划才能使矩形工业园区的用地面积最大？并求出最大的用地面积（精确到 0.1 km^2）.

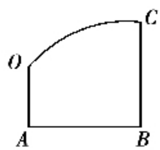


图 2－5－1

分析 矩形工业园区的用地面积与它落在抛物线段 OC 上的具体位置有关，因此应设法将落在 OC 上的点用一个变量来表示出来，然后用这一变量表示矩形工业园区的用地面积，而要设出相应变量，则应首先建立平面直角坐标系.

解析 以 O 为原点，OA 所在直线为 y 轴建立直角坐标系如图 2－5－2，依题意可设抛物线方程为 $y^2=2px\ (p>0)$，且 $C(4,2)$.

$\because 2^2=2p\cdot 4$，$\therefore p=\dfrac{1}{2}$，故曲线段 OC 的方程为 $y^2=x\ (0\leqslant x\leqslant 4)$.

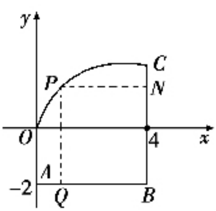


图 2－5－2

设 $P(x,\sqrt{x})\ (0\leqslant x<4)$ 是曲线段 OC 上的任意一点，则在矩形 $PQBN$ 中，

$|PQ|=2+\sqrt{x}$，$|PN|=4-x$；$\therefore$ 工业区面积 $S=|PQ|\cdot|PN|=(2+\sqrt{x})(4-x)=-x^{\frac{3}{2}}-2x+4x^{\frac{1}{2}}+8$，

$\therefore S' = -\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2 + 2x^{-\frac{1}{2}}$,

令 $S'=0$ 得 $3x^{\frac{1}{2}}+4-4x^{-\frac{1}{2}}=0$,即 $3x+4x^{\frac{1}{2}}-4=0$,$(3x^{\frac{1}{2}}-2)(x^{\frac{1}{2}}+2)=0$,

$\therefore x=\frac{4}{9}$.

当 $x\in[0,\frac{4}{9})$ 时,$S'>0$,S 是 x 的增函数;

当 $x\in[\frac{4}{9},4)$ 时,$S'<0$,S 是 x 的减函数,

$\therefore x=\frac{4}{9}$ 时,S 取到最大值,此时 $|PQ|=2+\sqrt{x}=\frac{8}{3}$,$|PN|=4-x=\frac{32}{9}$,

$S=\frac{8}{3}\times\frac{32}{9}=\frac{256}{27}\approx 9.5$. $\therefore S_{\max}\approx 9.5(\text{km}^2)$.

因此把工业园区规划成长为 $\frac{32}{9}$ km,宽为 $\frac{8}{3}$ km 的矩形时,工业园的面积最大,最大面积约为 9.5 km^2.

【技巧点拨】 本题的关键首先在于建立恰当的平面直角坐标系,得到曲线段的方程,然后才能建立面积的一个函数关系式. 其次还要注意,在用导数求解生活中的优化问题时,常常遇到下述情况:所给函数在给定的区间上只有一个极值点,那么它也是函数在该区间上的最值点,据此可求得函数的最值.

拓展 4 甲方是一农场,乙方是一工厂. 由于乙方生产需占用甲方的资源,因此甲方有权向乙方索赔以弥补经济损失并获得一定净收入,在乙方不赔付甲方的情况下,乙方的年利润 x(元)与年产量 t(吨)满足函数关系 $x=2\,000\sqrt{t}$. 若乙方每生产一吨产品必须赔付甲方 s 元(以下称 s 为赔付价格),

(1) 将乙方的实际年利润 w(元)表示为年产量 t(吨)的函数,并求出乙方获得最大利润的年产量;

(2) 甲方每年受乙方生产影响的经济损失金额 $y=0.002t^2$(元),在乙方按照获得最大利润的产量进行生产的前提下,甲方要在索赔中获得最大净收入,应向乙方要求的赔付价格 s 是多少?

强化闯关

1. 设 $f_0(x)=\cos x$,$f_1(x)=f_0'(x)$,$f_2(x)=f_1'(x)$,…,$f_{n+1}(x)=f_n'(x)$,$n\in\mathbf{N}$,则 $f_{2\,007}(x)=$

A. $\sin x$ B. $-\sin x$ C. $\cos x$ D. $-\cos x$

2. 已知抛物线 $y=-x^2+2$,过其上一点 P 引抛物线的切线 l,使 l 与两坐标轴在第一象限围成的三角形的面积最小,求切线 l 的方程.

3. 把边长为 60 cm 的正方形铁片的四角切去边长为 x cm 的相等的正方形,然后折成一个高度为 x cm 的无盖的长方体的盒子,要求长方体的高度与底面边长的比值不超过常数 $k(k>0)$,问 x 取何值时,盒子的容积最大?最大容积是多少?

参考答案

【拓展】

1. B $\because \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\cdot\Delta x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(1)=-1$,

$\therefore f'(1)=-3$,故选 B.

2. $\because f'(x)=a\cdot e^x+\dfrac{b}{x}$,由已知得 $\begin{cases}ae+b=e,\\ \dfrac{a}{e}-b=\dfrac{1}{e}\end{cases}$,解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=0,\end{cases}$

$\therefore a,b$ 的值分别是 1 和 0.

3. 设甲、乙两地距离为 a,火车速度为 v,令火车每小时消耗的费用为 y_1,

则 $y_1=kv^3$(k 为常数且 $k\neq 0$),

当 $v=20$ 时有 $y_1=k\cdot 20^3=40$,$\therefore k=\dfrac{1}{200}$. $\therefore y_1=\dfrac{v^3}{200}$,

再令火车从甲城到乙城的总费用为 $y_{总}$,则 $y_{总}=\left(\dfrac{1}{200}v^3+200\right)\cdot\dfrac{a}{v}$.

$\therefore y_{总}=a\left(\dfrac{v^2}{200}+\dfrac{200}{v}\right)$,$\therefore y'_{总}=a\left(\dfrac{v}{100}-\dfrac{200}{v^2}\right)$,

令 $y'_{总}=0$,得 $\dfrac{v}{100}=\dfrac{200}{v^2}$,即 $v=10\sqrt[3]{20}$,

又当 $0<v<10\sqrt[3]{20}$ 时,$y'_{总}<0$ 当 $10\sqrt[3]{20}<v<100$ 时,$y'_{总}>0$,

故当 $v=10\sqrt[3]{20}$ 时,$y'_{总}$ 取得最小值,

$\therefore$ 要使费用最省,火车速度应为 $10\sqrt[3]{20}$ km/h.

4. (1) $\because$ 赔付价格为 s 元/吨,$\therefore$ 乙方的实际年利润为:$w=2\ 000\sqrt{t}-st$.

由 $w'=\dfrac{1\ 000}{\sqrt{t}}-s=\dfrac{1\ 000-s\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$,令 $w'=0$ 得 $t=t_0=\left(\dfrac{1\ 000}{s}\right)^2$.

当 $t<t_0$ 时,$w'>0$ 当 $t>t_0$ 时,$w'<0$,$\therefore t=t_0$ 时,w 取得最大值.

因此乙方取得最大实际年利润的年产量 $t_0=\left(\dfrac{1\ 000}{s}\right)^2$(吨).

(2)设甲方在赔偿中获得的净收入为 v 元,则 $v=st-0.002t^2$.

将 $t=(\frac{1\ 000}{s})^2$ 代入上式,得到甲方净收入 v 与赔付价格 s 之间的函数关系式如下,$v=\frac{1\ 000^2}{s}-\frac{2\times1\ 000^3}{s^4}$. 又 $v'=-\frac{1\ 000^2}{s^2}+\frac{8\times1\ 000^3}{s^5}=\frac{1\ 000^2\times(8\ 000-s^3)}{s^5}$,

令 $v'=0$,得 $s=20$. 当 $s<20$ 时,$v'>0$;当 $s>20$ 时,$v'<0$,

所以 $s=20$ 时,v 取得最大值. 因此甲方向乙方要求赔付价格 $s=20$(元/吨)时,获最大净收入.

【强化闯关】

1. A $\because f_1(x)=(\cos x)'=-\sin x, f_2(x)=(-\sin x)'=-\cos x, f_3(x)=(-\cos x)'=\sin x, f_4(x)=(\sin x)'=\cos x,\cdots$,由此可知 $f_n(x)$ 的值周期性重复出现,周期为 4,

故 $f_{2\ 007}(x)=f_3(x)=\sin x$. 故选 A.

2. 设抛物线上的切点 $P(x_0,-x_0^2+2)(x_0>0)$,由 $y=-x^2+2$,得 $y'=-2x$,

$\therefore k=y'|_{x=x_0}=-2x_0$,直线 l 的方程为 $y-(-x_0^2+2)=-2x_0(x-x_0)$,

令 $y=0$,得 $x=\frac{x_0^2+2}{2x_0}$;令 $x=0$,得 $y=x_0^2+2$.

因此所求三角形面积 $S=\frac{1}{2}\times\frac{x_0^2+2}{2x_0}(x_0^2+2)=\frac{x_0^3}{4}+x_0+\frac{1}{x_0}$,

$\therefore S'=\frac{3}{4}x_0^2+1-\frac{1}{x_0^2}=\frac{(3x_0^2-2)(x_0^2+2)}{4x_0^2}$,

令 $S'=0$,由 $x_0>0$,解得 $x_0=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

当 $x_0>\frac{\sqrt{6}}{3}$时,$S'>0$;当 $x_0<\frac{\sqrt{6}}{3}$时,$S'<0$,

$\therefore$ 当 $x_0=\frac{\sqrt{6}}{3}$时,S 最小,此时 $k=-\frac{2\sqrt{6}}{3}$,切点 $P(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{4}{3})$,所求的切线 l 的方程是 $y-\frac{4}{3}=-\frac{2\sqrt{6}}{3}(x-\frac{\sqrt{6}}{3})$,即$2\sqrt{6}x+3y-8=0$.

3. (1)设长方体高为 x cm,则底面边长为$(60-2x)$ cm$(0<x<30)$,长方体容积(单位:cm^3)为 v,则 $v=v_{(x)}=x(60-2x)^2=4x(x-30)^2$.

$\because \frac{x}{60-2x}\leqslant k$, $\therefore 0<x\leqslant\frac{60k}{2k+1}$,即函数定义域为$(0,\frac{60k}{2k+1}]$.

$v'_{(x)}=4(x-30)^2+8x(x-30)=4(x-30)(3x-30)=12(x-30)(x-10)$,

令 $v'_{(x)}=0$,解得 $x=10$, $x=30$(不合题意舍去),

于是

x	$(0,10)$	10	$(10,30)$
$v'_{(x)}$	+	0	-
$v_{(x)}$	↗		↘

当 $10\leqslant\frac{60k}{2k+1}$，即 $k\geqslant\frac{1}{4}$ 时，在 $x=10$ 时，v 取最大值 $v_{max}=40\cdot 20^2=16\ 000$；

当 $\frac{60k}{2k+1}<10$，即 $0<k<\frac{1}{4}$ 时，在 $x=\frac{60k}{2k+1}$ 时，v 取得大值 $v_{max}=\frac{216\ 000k}{(2k+1)^3}$，

故若 $k\geqslant\frac{1}{4}$，则当 $x=10$ cm 时，盒子的最大容积为 $16\ 000\ \mathrm{cm}^3$ 若 $0<k<\frac{1}{4}$，则当 $x=\frac{60k}{2k+1}$ cm 时，盒子的最大容积为 $\frac{216\ 000k}{(2k+1)^3}\ \mathrm{cm}^3$.

重点6 复数

从前有个年轻人，他在其曾祖父的遗物中发现一张破羊皮纸，上面指明了一项宝藏“有一座岛，岛的北岸有一大片草地，草地上有一棵橡树、一棵松树和一座绞架，从绞架走到橡树，并记住走了多少步，到了橡树向左拐一个直角，再走相同的步数在那里打个桩，然后回到绞架，再朝松树走去，同时记住所走的步数，到了松树向右拐一个直角，再走相同的步数，在那里也打个桩，在两个桩连线的正中挖掘，即可获得宝藏”.

年轻人欣喜若狂，租船来到了海岛上找到了那片草地，也找到了橡树和松树，但绞架不见了，因为长时期的日晒雨淋，绞架已经腐烂成土. 年轻人无从下手，只好空手而返，你能用学过的复数知识帮助这位年轻人找到宝藏吗？

重点诠释

从近几年高考试题分析，复数试题一般是选择题或填空题，考查的题型主要是复数的有关概念及运算，如复数、虚数、纯虚数、模、共轭复数等概念以及复数的加法、减法、乘法、除法等运算.

虽然复数试题的难度较低，但非常灵活，具有活而不难的特点，且常考常新，要求具有灵活处理问题的能力，因此复习应狠抓基础，对复数的概念，复数的运算等要熟练掌握，对于常见常用的虚数 i，ω 等的运算性质等要熟练掌握，同时还要注意数形结合思想，复数问题实数化方法等的灵活运用.

典例调研

题型一　复数的概念

【调研 1】　设 i 是虚数单位，$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则使得 $(i\omega)^n=1$ 成立的最小的正整数 n 的值等于______.

分析　可以先将复数 $i\omega$ 求出，再取 $n=1,2,3,\cdots$ 逐一计算验证，从而求出 n 的最小值；也可根据复数 $i\omega$ 的幂值的周期性进行求解.

解析一　由于 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，所以 $i\omega=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$，于是 $(i\omega)^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$(i\omega)^3=-i$，$(i\omega)^4=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$(i\omega)^5=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$，$(i\omega)^6=-1$，$(i\omega)^7=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，$(i\omega)^8=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$(i\omega)^9=i$，$(i\omega)^{10}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$(i\omega)^{11}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，$(i\omega)^{12}=1$，

$\therefore n$ 的最小值是 12.

解析二　由于 $i^1=i$，$i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$，$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\omega^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\omega^3=1$，$\therefore (i\omega)^{12}=i^{12}\cdot\omega^{12}=(i^4)^3\cdot(\omega^3)^4=1$，故使 $(i\omega)^n=1$ 成立的最小正整数是 12.

【知识链接】　本题主要考查复数的乘法运算以及两个常用的虚数 i 和 ω 的有关性质，对于虚数单位 i，它的幂的值具有周期性，有 $i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=i$，$i^{4n}=1(n\in\mathbf{N}^*)$，复数 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 是 1 的一个虚立方根，它的幂值也具有周期性，满足 $\omega^{3n}=1$，$\omega^{3n+1}=\omega$，$\omega^{3n+2}=\omega^2=\frac{1}{\omega}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，利用这些性质可以方便地解决某些问题，如当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时有，$i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0$，集合 $A=\{x\mid x=i^{2n-1}+\frac{1}{i^{2n-1}}\}$ 中只有 1 个元素等.

拓展 1　数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2i$，$(1+i)a_{n+1}=(1-i)a_n$，则 $a_{10}=$______.

题型二　复数的运算

【调研 2】　若 z 是复数，$\omega=\frac{3z+2}{3z-2}$ 是纯虚数，求 $|z|$.

分析　可以设出复数 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$，根据条件求出 x,y 应满足的条件，最后求出 $|z|$；也可直接根据 ω 是纯虚数，设 $\omega=bi(b\neq0)$，求出 z（用 b 表示），最后再计算 $|z|$.

解析一　设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，

则 $\omega=\frac{3x+3y\mathrm{i}+2}{3x+3y\mathrm{i}-2}=\frac{(3x+2)+3y\mathrm{i}}{(3x-2)+3y\mathrm{i}}=\frac{9x^2-4+9y^2-12y\mathrm{i}}{(3x-2)^2+9y^2}$，

由于 ω 是纯虚数，$\therefore\begin{cases}9x^2+9y^2-4=0,\\-12y\neq0,\end{cases}\therefore x^2+y^2=\frac{4}{9}$，

故 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2}{3}$.

解析二　由于 $\omega=\frac{3z+2}{3z-2}$ 是纯虚数，所以可设 $\omega=\frac{3z+2}{3z-2}=b\mathrm{i}(b\in\mathbf{R},b\neq0)$，

$\therefore 3z+2=3zb\mathrm{i}-2b\mathrm{i}$，解得 $z=\frac{2+2b\mathrm{i}}{3b\mathrm{i}-3}$，

$\therefore |z|=\left|\frac{2+2b\mathrm{i}}{3b\mathrm{i}-3}\right|=\frac{|2+2b\mathrm{i}|}{|3b\mathrm{i}-3|}=\frac{2\sqrt{b^2+1}}{3\sqrt{b^2+1}}=\frac{2}{3}$.

【技巧点拨】　本题给出的两种方法中，解析一是处理复数问题的常规方法，即"化虚为实"，根据纯虚数的定义求解；解析二则是直接根据 ω 是纯虚数，设出 $\omega=b\mathrm{i}(b\in\mathbf{R},b\neq0)$，然后找到 z 与 b 的关系，再利用复数模的运算性质进行求解，解析二比解析一更简捷，因此要熟练掌握复数模的运算性质，如 $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ 等.

拓展2　设复数 $z=(a^2-1)+(a^2-3a+2)\mathrm{i}$，若 $z^2<0$，则实数 a 的值为______.

强化闯关

1. 设 $a>1$，复数 z 满足 $(1+a\mathrm{i})z=\mathrm{i}+a$，则 z 对应的点在复平面中的

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 若关于 x 的方程 $x^2+zx+4+3\mathrm{i}=0$ 有纯虚数根，求 $|z|$ 的最小值.

参考答案

【拓展】

1. 2　由 $(1+\mathrm{i})a_{n+1}=(1-\mathrm{i})a_n$ 得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，

$\therefore a_{10}=a_1\cdot(-\mathrm{i})^9=2\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})^9=2$.

重点突破

2. $a=-1$ $\because z^2<0$,$\therefore z$ 一定为纯虚数,$\therefore \begin{cases} a^2-1=0, \\ a^2-3a+2\neq 0, \end{cases}$ 解得 $a=-1$.

【强化闯关】

1. D 由 $(1+a\mathrm{i})z=\mathrm{i}+a$ 得

$$z=\frac{a+\mathrm{i}}{1+a\mathrm{i}}=\frac{(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})}{1+a^2}=\frac{2a+(1-a^2)\mathrm{i}}{1+a^2}=\frac{2a}{a^2+1}+\frac{1-a^2}{a^2+1}\mathrm{i},$$

$\because a>1$,$\therefore \frac{2a}{a^2+1}>0$,$\frac{1-a^2}{a^2+1}<0$,$\therefore z$ 对应的点在第四象限.

2. 设方程的纯虚数根是 $x_0=b\mathrm{i}$($b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq 0$),

将 $x_0=b\mathrm{i}$ 代入方程得 $-b^2+zb\mathrm{i}+4+3\mathrm{i}=0$,

$\because z=\frac{b^2-4-3\mathrm{i}}{b\mathrm{i}}$,$\therefore |z|=\left|\frac{b^2-4-3\mathrm{i}}{b\mathrm{i}}\right|=\frac{\sqrt{(b^2-4)^2+9}}{|b|}=\sqrt{\frac{b^4-8b^2+25}{b^2}}=$ $\sqrt{b^2+\frac{25}{b^2}-8}\geqslant\sqrt{2\sqrt{25}-8}=\sqrt{2}$,当且仅当 $b^2=\frac{25}{b^2}$,即 $b=\pm\sqrt{5}$ 时,$|z|$ 的最小值为 $\sqrt{2}$.

难点透视

难点 1　函数的值域和最值

难点诠释

函数的值域和最值问题是研究函数性质的一个重要方面，是每年高考的重要内容，由于求函数的值域和最值的方法较多，且比较灵活，而且还常常伴随着求参数范围问题，需要进行分类讨论才能解决，因此许多考生由于对函数值域和最值的方法不熟练，不能灵活地选择恰当的方法，不善于确定分类讨论的合理标准，导致不能正确地解答这类问题，成为一个学习难点.

求解函数值域和最值问题，首先要熟悉常用的方法技巧，熟悉常见的题型，其次要注意分类讨论、数形结合等思想方法的应用，还要注意函数值域和最值的区别与联系，在解题中加以利用.

典例调研

题型一　求函数值域的一般方法

【调研 1】　**求下列函数的值域：**

(1)$f(x)=\dfrac{1}{2^x-4}$；(2)$f(x)=2x-1-\sqrt{13-4x}$；(3)$f(x)=\dfrac{x^2+9}{\sqrt{x^2+1}}$；(4)$y=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$.

分析　**观察所给函数解析式的结构特征，确定求函数值域的最佳方法.**

解析　(1) **函数的定义域是** $\{x\mid x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq 2\}$.

当 $x>2$ 时，$2^x>4$，$2^x-4>0$，$\dfrac{1}{2^x-4}\in(0,+\infty)$；当 $x<2$ 时，$2^x<4$，$2^x-4<0$，$\dfrac{1}{2^x-4}\in(-\infty,0)$；所以函数的值域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(2) 解法一　(换元法) 设 $\sqrt{13-4x}=t$，则 $t\geqslant 0$，$x=\dfrac{13-t^2}{4}$，于是 $f(x)=g(t)$

$=2\cdot\frac{13-t^2}{4}-1-t=-\frac{1}{2}t^2-t+\frac{11}{2}=-\frac{1}{2}(t+1)^2+6$,显然函数 $g(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调递减函数,所以 $g(t)\leqslant g(0)=\frac{11}{2}$,因此原函数的值域是 $(-\infty,\frac{11}{2}]$.

解法二 (单调性法)函数定义域是 $\{x\mid x\in\mathbf{R},且x\leqslant\frac{13}{4}\}$,当自变量 x 增大时,$2x-1$ 增大,$\sqrt{13-4x}$ 减小,所以 $2x-1-\sqrt{13-4x}$ 增大,因此函数 $f(x)=2x-1-\sqrt{13-4x}$ 在其定义域上是一个单调递增函数,所以当 $x=\frac{13}{4}$ 时,函数取得最大值 $f(\frac{13}{4})=\frac{11}{2}$,故原函数的值域是 $(-\infty,\frac{11}{2}]$.

(3) 由于 $f(x)=\frac{x^2+9}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1+8}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{8}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2\sqrt{\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{8}{\sqrt{x^2+1}}}=4\sqrt{2}$,当且仅当 $\sqrt{x^2+1}=\frac{8}{\sqrt{x^2+1}}$,即 $x=\pm\sqrt{7}$ 时取等号,所以函数的最小值是 $4\sqrt{2}$,即函数值域为 $[4\sqrt{2},+\infty)$.

(4) 解法一 (数形结合法)函数 $y=\frac{\sin x}{2-\cos x}=-\frac{0-\sin x}{2-\cos x}$ 的函数值可以看作是定点 $(2,0)$ 和在圆 $x^2+y^2=1$ 上动点的连线的斜率 k 的相反数,结合图像可得 $k_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$k_{\min}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $y\in[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$.

解法二 原函数式可化为 $\sin x+y\cos x=2y\Rightarrow\sin(x+\theta)=\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}$,由于 $\left|\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}\right|\leqslant 1$,所以得 $-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$,即函数的值域是 $[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$.

【方法探究】 求函数值域的一般方法有:观察法、换元法、单调性法、基本不等式法、数形结合法等. 含有根式的函数一般用换元法,若能确定其单调性,也可以用单调性法;对于一些结构比较特殊,具有明显几何意义的函数,则可以利用数形结合法;在利用均值不等式求函数最值时,一定要注意等号成立的条件.

拓展 1 (1) 下列函数中,值域是 $(0,+\infty)$ 的函数是

A. $y=x^2-x+1$ B. $y=5^{x-1}$ C. $y=3^{2-x}+1$ D. $y=|\log_2x^2|$

(2) 现在定义运算 $a*b=\begin{cases}a,a\leqslant b,\\ b,a>b,\end{cases}$ 例如 $1*2=1$,则函数 $f(x)=1*2^x$ 的值域为______.

 浮躁的人容易说:学数学没有用,应该学一些有用的——是你自己没用了吧!?

题型二 函数的最值问题

【调研2】 已知函数$f(x)=x^2-ax+\frac{a}{2}, x\in[0,1]$，求$f(x)$的最小值$g(x)$的表达式，并求出$g(a)$的最大值.

分析 用配方法求函数$f(x)$的最小值$g(a)$时应进行分类讨论. 求$g(a)$的最大值时，可以分段进行，也可以借助图像.

解析 由$f(x)=x^2-ax+\frac{a}{2}$得$f(x)=x^2-ax+\frac{a}{2}=(x-\frac{a}{2})^2+\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}$，当$0\leqslant\frac{a}{2}\leqslant1$即$0\leqslant a\leqslant2$时，$f(x)$最小值为$g(a)=f(\frac{a}{2})=\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}$ 当$\frac{a}{2}<0$即$a<0$时，$f(x)$在$[0,1]$上为增函数，所以最小值为$g(a)=f(0)=\frac{a}{2}$ 当$\frac{a}{2}>1$即$a>2$时，$f(x)$在$[0,1]$上为减函数，所以最小值为$g(a)=f(1)=1-\frac{a}{2}$ 于是$g(a)=$

$$\begin{cases}\frac{a}{2}, a<0,\\ \frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}, 0\leqslant a\leqslant2,\\ 1-\frac{a}{2}, a>2.\end{cases}$$

(2) 由函数$g(a)$的图像可知，$g(a)$在$a=1$处取得最大值为$g(1)=\frac{1}{4}$.

【方法探究】 求解带有参数的二次函数在闭区间的最值问题，其常用方法是利用二次函数的图像的直观性来分析，即根据对称轴和区间的位置关系进行分类讨论，按照对称轴在区间的左端、右端、区间内三种情况分别进行求解，从而确定函数在该区间上的单调性，进而求出最值.

拓展2 已知函数$f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}, x\in[1,+\infty)$.

(1) 若$a=\frac{1}{2}$，求$f(x)$的最小值；

(2) 若$a>0$，求$f(x)$的最小值.

【调研3】 已知x,y为正实数，且$x^2-2x+4y^2=0$，求xy的最大值.

分析 把xy看作是一个函数值，再根据已知条件消去一个变量，求出函数的值域，考虑到消去变量时需要开方，故也可采用平方的办法.

解析 设$u=xy$，将$x^2-2x+4y^2=0$代入得$t=u^2=x^2y^2=x^2\cdot\frac{-x^2+2x}{4}=$

难点透视

$\frac{1}{4}(-x^4+2x^3)$.

又 $\because x^2-2x=-4y^2<0$，解得 $0<x<2$，$t'=\frac{1}{2}x^2(-2x+3)$，

令 $t'=\frac{1}{2}x^2(-2x+3)=0$，得 $x=\frac{3}{2}$，

$\because$ 函数 t 只有一个极值点，它必定是最大值点，

$\therefore t$ 的最大值是 $\frac{1}{4}[-(\frac{3}{2})^4+2\times(\frac{3}{2})^3]=\frac{27}{64}$，

故当 $x=\frac{3}{2}$ 时，xy 取最大值是 $\sqrt{\frac{27}{64}}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

【方法探究】 本题属于条件最值问题，这类问题一般是根据给出的条件，用一个变量把另一个变量表示出来，代入欲求最值的式子中消去参数，转化为一元函数的最值问题，即采取减少变量个数的方法. 在求解这类问题时，还要特别注意各个变量的取值范围，如在本题中如果忽视 x 的范围，就会导致错误.

拓展 3 已知实数 x,y 满足 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$，那么 $\frac{y}{x+2}$ 的取值范围是______.

题型三 函数值域与最值的综合问题

【调研 4】 已知函数 $f(x)=1-2a^x-a^{2x}(a>1)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的值域；

(2) 若 $x\in[-2,1]$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值为 -7，求 a 并且求出函数的最大值.

分析 显然所给函数是关于 a^x 的二次函数，可以考虑换元法求解.

解析 函数 $f(x)=1-2a^x-a^{2x}=-(a^x+1)^2+2$，$\because a^x>0$，$\therefore$ 若设 $t=a^x$，则 $g(t)=-(t+1)^2+2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $f(x)=g(t)<g(0)=1$，即函数 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty,1)$.

(2) $\because a>1$，$\therefore$ 当 $x\in[-2,1]$ 时，$a^{-2}\leqslant a^x=t\leqslant a$，这时 $-(a+1)^2+2\leqslant f(x)=g(t)\leqslant-(a^{-2}+1)^2+2$，故有 $2-(a+1)^2=-7$，解得 $a=2$，此时函数的最大值是 $2-(2^{-2}+1)^2=\frac{7}{16}$.

【方法探究】 本题考查了复合函数的值域和最值问题. 在解决这类问题时，一定要考虑内层函数的定义域和值域的变化，也要考虑外层函数的值域和最值的常用解法，两者结合才能解决复合函数的值域与最值问题.

拓展 4 已知 $f(x)=2+\log_3 x$，$x\in[1,9]$，求函数 $y=[f(x)]^2+f(x^2)$ 的值域.

【调研 5】 已知函数 $g(x)=2^x-4^x, x\in[-1,1]$.

(1) 判断 $g(x)$ 的单调性；

(2) 若方程 $g(x)=m$ 有解，求实数 m 的取值范围；

(3) 若方程 $g(|x|)+2^{|x|+1}=m$ 恰有 4 个不相等的实数根，求实数 m 的取值范围.

分析 可以利用单调性定义判断单调性，也可直接根据复合函数单调性法则判断;方程有解问题，都可以转化为求相应函数的值域问题.

解析 (1) 令 $t=2^x$，则 $t\in[\frac{1}{2},2]$，$\therefore y=g(x)=-t^2+t=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$，$\therefore y=-t^2+t$ 在区间 $t\in[\frac{1}{2},2]$ 上是减函数，又 $t=2^x$ 在 $x\in[-1,1]$ 上是增函数，故 $g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是减函数.

(2) 令 $t=2^x\in[\frac{1}{2},2]$，方程 $g(x)=m$ 有解 $\Rightarrow$ 方程 $2^x-4^x=m$ 在 $x\in[-1,1]$ 上有解 $\Rightarrow m=t-t^2=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$ 在 $t\in[\frac{1}{2},2]$ 上有解 $\Rightarrow$ 求 $m=t-t^2=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$ 在 $t\in[\frac{1}{2},2]$ 上的取值范围 $\Rightarrow m\in[-2,\frac{1}{4}]$. 故 m 的取值范围是 $[-2,\frac{1}{4}]$.

(3) $\because g(x)=2^x-4^x$，$\therefore g(|x|)=2^{|x|}-(2^{|x|})^2$，$\therefore$ 方程 $g(|x|)+2^{|x|+1}=m\Rightarrow 2^{|x|}-(2^{|x|})^2+2^{|x|+1}=m\Rightarrow(2^{|x|})^2-3\cdot 2^{|x|}+m=0$，令 $t=2^{|x|}$，由 $x\in[-1,1]$ 知 $|x|\in[0,1]$，则 $t\in[1,2]$，依题意可知关于 t 的二次方程 $t^2-3t+m=0$ 在 $t\in[1,2]$ 上有 2 个不相等的实数根，其充要条件是：
$$\begin{cases}\Delta=9-4m>0,\\ 1<\frac{3}{2}<2,\\ 1^2-3+m>0,\\ 2^2-6+m>0\end{cases}\Rightarrow 2<m<\frac{9}{4}$$
，所以，实数 m 的取值范围是 $(2,\frac{9}{4})$.

【方法探究】 函数的值域和最值问题一方面是函数本身的重要性质，另一方面也有着重要的应用，特别是在解决不等式恒成立、方程有解问题中具有重要的作用，因为这些问题都可以转化为求相应函数的值域和最值的问题，所以在解题中要善于构造恰当的函数，通过函数解决问题.

拓展 5 已知函数 $f(x)=\frac{x+1-a}{a-x}(a\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq a)$.

(1) 证明：$f(x)+2+f(2a-x)=0$ 对定义域内的所有 x 都成立；

难点透视

(2) 当 $f(x)$ 的定义域为 $[a+\frac{1}{2},a+1]$ 时,求证:$f(x)$ 的值域为 $[-3,-2]$;

(3) 设函数 $g(x)=x^2+|(x-a)f(x)|$,求 $g(x)$ 的最小值.

强化闯关

1. 下列同时满足条件:(1) 是奇函数;(2) 在 $[0,1]$ 上是增函数;(3) 在 $[0,1]$ 上最小值为 0 的函数是

A. $y=x^5-5x$　B. $y=\sin x+2x$　C. $y=\frac{1-2^x}{1+2^x}$　D. $y=\sqrt{x}-1$

2. 函数 $y=(\frac{1}{3})^x-\log_2(x+2)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值为______.

3. 已知两变量 x、y 之间的关系为 $\ln(y-x)=\ln y-\ln x$,则以 x 为自变量的函数 y 的最小值为______.

4. 已知函数 $f(x)=\sqrt{mx^2+(m-1)x+1}$ 的值域是 $[0,+\infty)$,则实数 m 的取值范围是______.

5. 已知函数 $y=\sqrt{mx^2-6mx+m+8}$ 的定义域是 **R**.

(1) 求实数 m 的取值范围;

(2) 当 m 变化时,若 y 的最小值是 $f(m)$,求 $f(m)$ 的值域.

6. 已知函数 $f(x)=|1-\frac{1}{x}|$,$x>0$.

(1) 当 $0<a<b$,且 $f(a)=f(b)$ 时,求证:$ab>1$;

(2) 是否存在实数 $a,b(a<b)$,使得函数 $y=f(x)$ 的定义域、值域都是 $[a,b]$,若存在,则求出 a,b 的值.若不存在,请说明理由.

参考答案

【拓展】

1. (1) B　逐一验证可知只有 B 正确.

(2) $(0,1]$　依题意有 $f(x)=1*2^x=\begin{cases}1, x\geqslant 0,\\ 2^x, x<0,\end{cases}$ 而当 $x<0$ 时,$2^x\in(0,1)$,所以函数的值域是 $(0,1]$.

2. (1) $f(x)=2+x+\frac{1}{2x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上递增,所以当 $x=1$ 时 $f(x)$ 取到最小值 $f(1)=\frac{7}{2}$.

(2) $f(x)=2+x+\frac{a}{x}(x\geqslant 1)$,当 $\sqrt{a}\geqslant 1$ 即 $a\geqslant 1$ 时,$f(x)=2+x+\frac{a}{x}\geqslant 2+2\sqrt{a}$,当 $x=\sqrt{a}$ 时取等号,所以当 $x=\sqrt{a}$ 时,$f(x)$ 取到最小值 $2+2\sqrt{a}$.当 $\sqrt{a}<1$ 即 $0<$

$a<1$ 时,$f(x)=2+x+\dfrac{a}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上递增,故当 $x=1$ 时,$f(x)$ 取到最小值 $3+a$. 综上,当 $a\geqslant 1$ 时,函数最小值为 $2+2\sqrt{a}$ 当 $0<a<1$ 时,函数最小值为 $3+a$.

3. 原式可化为 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$,所以,$\dfrac{y}{x+2}=\dfrac{y-0}{x-(-2)}$ 表示点 $(-2,0)$ 与以 $(1,2)$ 为圆心,2 为半径的圆上任意一点 (x,y) 所成直线的斜率,由数形结合得 $\dfrac{y}{x+2}$ 的取值范围是 $[0,\dfrac{12}{5}]$.

4. 因为 $f(x)=2+\log_3 x, x\in[1,9]$,所以函数 $y=[f(x)]^2+f(x^2)$ 的定义域由不等式组 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 9,\\ 1\leqslant x^2\leqslant 9\end{cases}$ 确定,解得 $1\leqslant x\leqslant 3$,即定义域是 $[1,3]$,于是 $0\leqslant\log_3 x\leqslant 1$. 又因为 $y=[f(x)]^2+f(x^2)=(2+\log_3 x)^2+2+\log_3 x^2=(\log_3 x+3)^2-3$, $0\leqslant\log_3 x\leqslant 1$,所以 $6\leqslant y\leqslant 13$,故函数的值域是 $[6,13]$.

5. (1) $\because f(x)+2+f(2a-x)=\dfrac{x+1-a}{a-x}+2+\dfrac{2a-x+1-a}{a-2a+x}=\dfrac{x+1-a}{a-x}+2+\dfrac{a-x+1}{x-a}=\dfrac{x+1-a+2a-2x-a+x-1}{a-x}=0$, $\therefore$ 结论成立.

(2) $f(x)=\dfrac{-(a-x)+1}{a-x}=-1+\dfrac{1}{a-x}$.

当 $a+\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant a+1$ 时,有 $-a-1\leqslant -x\leqslant -a-\dfrac{1}{2}$, $-2\leqslant\dfrac{1}{a-x}\leqslant -1$,

所以 $-3\leqslant -1+\dfrac{1}{a-x}\leqslant -2$. 于是,我们可以得到 $f(x)$ 的值域为 $[-3,-2]$.

(3) 函数 $g(x)=x^2+|x+1-a|\ (x\neq a)$.

(i) 当 $x\geqslant a-1$ 且 $x\neq a$ 时,$g(x)=x^2+x+1-a=(x+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}-a$.

如果 $a-1\geqslant -\dfrac{1}{2}$,即 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时,则函数在 $[a-1,a)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递增,

$\therefore g(x)_{\min}=g(a-1)=(a-1)^2$.

如果 $a-1<-\dfrac{1}{2}$ 即当 $a<\dfrac{1}{2}$ 且 $a\neq -\dfrac{1}{2}$ 时,$g(x)_{\min}=g(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{4}-a$.

当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时,$g(x)$ 最小值不存在.

(ii) 当 $x\leqslant a-1$ 时,$g(x)=x^2-x-1+a=(x-\dfrac{1}{2})^2+a-\dfrac{5}{4}$,

如果 $a-1>\frac{1}{2}$,即 $a>\frac{3}{2}$ 时,$g(x)_{\min}=g(\frac{1}{2})=a-\frac{5}{4}$,

如果 $a-1\leqslant\frac{1}{2}$,即 $a\leqslant\frac{3}{2}$ 时,$g(x)$ 在 $(-\infty,a-1)$ 上为减函数 $g(x)_{\min}=g(a-1)=(a-1)^2$.

比较两种情况:当 $a>\frac{3}{2}$ 时,$(a-1)^2-(a-\frac{5}{4})=(a-\frac{3}{2})^2>0$;

当 $a<\frac{1}{2}$ 时,$(a-1)^2-(\frac{3}{4}-a)=(a-\frac{1}{2})^2>0$;

综上,就可得出如下结论:当 $a<\frac{1}{2}$ 且 $a\neq-\frac{1}{2}$ 时,$g(x)$ 最小值是 $\frac{3}{4}-a$;当 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$ 时,$g(x)$ 最小值是 $(a-1)^2$;当 $a>\frac{3}{2}$ 时,$g(x)$ 最小值为 $a-\frac{5}{4}$;当 $a=-\frac{1}{2}$ 时,$g(x)$ 最小值不存在.

【强化闯关】

1. B　对每个函数逐一验证,只有 B 正确.

2. 3　函数 $y=(\frac{1}{3})^x-\log_2(x+2)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是单调递减函数,所以函数的最大值是 $f(-1)=3$.

3. 4　由 $\ln(y-x)=\ln y-\ln x$ 得 $y=\frac{x^2}{x-1}>0$,所以 $x>1$,$y=x-1+\frac{1}{x-1}+2\geqslant4$.

4. $[0,3-2\sqrt{2}]\cup[3+2\sqrt{2},+\infty)$　依题意应有 $mx^2+(m-1)x+1$ 能取到所有非负实数.当 $m=0$ 时,显然成立;当 $m\neq0$ 时,应有 $\begin{cases}m>0,\\ \Delta\geqslant0\end{cases}$,

解得 $m\in(0,3-2\sqrt{2}]\cup[3+2\sqrt{2},+\infty)$.

综上,实数 m 的取值范围是 $[0,3-2\sqrt{2}]\cup[3+2\sqrt{2},+\infty)$.

5. (1) 依题意知,当 $x\in\mathbf{R}$ 时,不等式 $mx^2-6mx+m+8\geqslant0$ 恒成立.

当 $m=0$ 时,$x\in\mathbf{R}$,即 $m=0$ 符合题意;

当 $m\neq0$ 时,应有 $\begin{cases}m>0,\\ \Delta\leqslant0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>0,\\ (-6m)^2-4m(m+8)\leqslant0,\end{cases}$ 解得 $0<m\leqslant1$,

综上得 $0\leqslant m\leqslant1$.

(2) 当 $m=0$ 时,$y=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$;当 $0<m\leqslant1$ 时,$y=\sqrt{m(x-3)^2+8-8m}$,所以

函数的最小值$y_{\min}=\sqrt{8-8m}$,因此$f(m)=\sqrt{8-8m}(0\leqslant m\leqslant 1)$,所以$f(m)$的值域是$[0,2\sqrt{2}]$.

6. (1)$\because x>0$,$\therefore f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x},x\geqslant 1,\\ \dfrac{1}{x}-1,0<x<1,\end{cases}$ $\therefore f(x)$在$(0,1)$上为减函数,在$(1,+\infty)$上是增函数. 由$0<a<b$,且$f(a)=f(b)$,可得$0<a<1<b$和$\dfrac{1}{a}-1=1-\dfrac{1}{b}$,即$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=2$,$\therefore 2ab=a+b>2\sqrt{ab}$. 故$\sqrt{ab}>1$,即$ab>1$.

(2) 不存在满足条件的实数a,b. 若存在满足条件的实数a,b,使得函数$y=f(x)=\left|1-\dfrac{1}{x}\right|$的定义域、值域都是$[a,b]$,则$a>0$,$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x},x\geqslant 1,\\ \dfrac{1}{x}-1,0<x<1.\end{cases}$

① 当$a,b\in(0,1)$时,$f(x)=\dfrac{1}{x}-1$在$(0,1)$上为减函数. 故$\begin{cases}f(a)=b,\\ f(b)=a,\end{cases}$即$\begin{cases}\dfrac{1}{a}-1=b,\\ \dfrac{1}{b}-1=a,\end{cases}$解得$a=b$. 故此时不存在适合条件的实数$a,b$.

② 当$a,b\in[1,+\infty)$时,$f(x)=1-\dfrac{1}{x}$在$(1,+\infty)$上是增函数. 故$\begin{cases}f(a)=a,\\ f(b)=b,\end{cases}$即$\begin{cases}1-\dfrac{1}{a}=a,\\ 1-\dfrac{1}{b}=b,\end{cases}$此时$a,b$是方程$x^2-x+1=0$的根,此方程无实根. 故此时不存在适合条件的实数$a,b$.

③ 当$a\in(0,1)$,$b\in[1,+\infty)$时,由于$1\in[a,b]$,而$f(1)=0\notin[a,b]$,故此时不存在适合条件的实数a,b.

综上可知,不存在适合条件的实数a,b.

难点2　分段函数和抽象函数

难点诠释　分段函数和抽象函数是两种非常重要的函数形式，由于这两种函数自身所具有的特殊性，在对函数有关内容的考查中，比其他函数形式具有更重要的功能，更能全面地考查学生的素质和能力，所以在近几年的高考试题中，分段函数和抽象函数一直是函数命题的热点内容，几乎每年必考，多数情况下以选择题和填空题的形式考查，也可能出现在解答题中，并会和方程、不等式的知识联系起来，综合考查学生的各种能力.

解决与分段函数有关的问题，最重要的就是逻辑划分思想，即将问题分段解决，还要熟练掌握研究分段函数性质（奇偶性、单调性等）的一般方法；解决与抽象函数有关的问题，最重要的是掌握赋值法，并善于根据题目条件寻找该函数的一个原型，帮助探求结论，找到解题的思路和方法.

典例调研

题型一　分段函数和抽象函数的奇偶性

【调研1】　若函数 $f(x)=\begin{cases}ax+3, & x<-1,\\ 0, & |x|\leqslant 1,\\ -2x+b, & x>1\end{cases}$ 是偶函数，求 a,b 的值.

分析　利用偶函数的定义建立关于参数 a,b 的方程进行求解，也可取特殊值进行求解.

解析一　当 $x<-1$ 时，$f(x)=ax+3$，这时 $-x>1$，

$\therefore f(-x)=-2(-x)+b=2x+b$，由偶函数定义知 $ax+3=2x+b$，①

当 $x>1$ 时，$f(x)=-2x+b$，这时 $-x<-1$，$\therefore f(-x)=-ax+3$，由偶函数定义知 $-2x+b=-ax+3$，②

由①②得 $\begin{cases}a=2,\\ b=3.\end{cases}$

解析二　取 $x=2$，由偶函数定义应有 $f(-2)=f(2)$，即 $-4+b=-2a+3$，①

取 $x=3$，应有 $f(-3)=f(3)$，即 $-3a+3=-6+b$，②

由①②解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=3.\end{cases}$

【方法探究】 分段函数奇偶性的判断,应先分析其定义域是否关于原点对称,然后对 x 的值进行分类讨论,寻求 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 在各段上的关系,从而判断函数的奇偶性. 需注意的是,奇偶性是函数的一个整体性质,不能说某个函数在定义域的某一段上是奇函数或偶函数.

拓展 1 判断函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x, x<0,\\ -x^2+x, x>0\end{cases}$ 的奇偶性.

【调研 2】 已知对任意的 $x, y\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)+f(y)=2f(\frac{x+y}{2})f(\frac{x-y}{2})$,且 $f(0)\neq 0$,那么 $f(x)$

A. 是奇函数但不是偶函数　　B. 是偶函数但不是奇函数

C. 既是奇函数又是偶函数　　D. 既不是奇函数也不是偶函数

分析 采用赋值法,寻求 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 之间的关系.

解析 令 $x=y=0$,则 $2f(0)=2[f(0)]^2$,由于 $f(0)\neq 0$,所以 $f(0)=1$. 再令 $y=-x$,则有 $f(x)+f(-x)=2f(0)f(x)=2f(x)$,于是得 $f(-x)=f(x)$,所以函数 $f(x)$ 是偶函数但不是奇函数. 故选 B.

【方法探究】 判断抽象函数的奇偶性,主要是利用奇偶函数的定义,由于解析式没有给出,所以关键是合理地利用赋值法,让所给解析式中的变量取上某些特殊值,使之出现 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 之间的关系式,然后经过变形整理得出结论.

拓展 2 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的定义域,都不是常数函数,对于定义域中任意 x,有 $f(x)+f(-x)=0$,$g(x)g(-x)=1$,且 $x\neq 0$,$g(x)\neq 1$,则函数 $F(x)=\frac{2f(x)}{g(x)-1}+f(x)$ 是

A. 是奇函数但不是偶函数　　B. 是偶函数但不是奇函数

C. 既是奇函数又是偶函数　　D. 既不是奇函数也不是偶函数

题型二 分段函数和抽象函数的单调性

【调研 3】 试判断函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2, x>0,\\ -x^2-1, x\leqslant 0\end{cases}$ 的单调性.

分析 判断分段函数的单调性,可分别在每一段上进行判断,然后再考查在整个定义域上的单调性.

解析一 任取 $x_1, x_2\in(-\infty, 0]$,且 $x_1<x_2$,则有 $f(x_1)-f(x_2)=(-x_1^2-1)-(-x_2^2-1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1)<0$;

任取 $x_1\in(-\infty, 0]$,$x_2\in(0, +\infty)$ 且 $x_1<x_2$,则有 $f(x_1)-f(x_2)=-x_1^2-1-$

$(x_2^2+2)=-x_1^2-x_2^2-3<0$,

任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$,则有 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1^2+2)-(x_2^2+2)=(x_1-x_2)(x_1+x_2)<0$,

综上知,对任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调递增函数.

解析二　在直角坐标系中画出函数 $f(x)$ 的图像,从图像可以得出函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调递增函数.

【方法探究】　判断分段函数的单调性可分段进行,但要注意整个定义域上的单调性,在各段上单调性相同的分段函数,在整个定义域上不一定是单调函数,因此,要特别注意每相邻两段的单调性;另外,求分段函数的单调性时,如能借助函数的图像,则可以更直观地求出函数的单调区间.

拓展 3　试求函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+3x-2, & x\geqslant 1,\\ x^2-3x+2, & x<1\end{cases}$ 的单调递减区间.

【调研 4】　已知定义在区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(\frac{x_1}{x_2})=f(x_1)-f(x_2)$,且当 $x>1$ 时,$f(x)<0$.

(1) 求 $f(1)$ 的值;

(2) 判断 $f(x)$ 的单调性;

(3) 若 $f(3)=-1$,解不等式 $f(|x|)<-2$.

分析　采用赋值法求 $f(1)$ 的值;利用单调性的定义判断 $f(x)$ 的单调性;最后根据单调性解不等式.

解析　(1) 令 $x_1=x_2>0$,代入得 $f(1)=f(x_1)-f(x_1)=0$,故 $f(1)=0$.

(2) 任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1>x_2$,则 $\frac{x_1}{x_2}>1$,由于当 $x>1$ 时,$f(x)<0$,所以 $f(\frac{x_1}{x_2})<0$,即 $f(x_1)-f(x_2)<0$,因此 $f(x_1)<f(x_2)$,所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调递减函数.

(3) 由 $f(\frac{x_1}{x_2})=f(x_1)-f(x_2)$ 得 $f(\frac{9}{3})=f(9)-f(3)$,而 $f(3)=-1$,所以 $f(9)=-2$. 由于函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调递减函数,所以当 $x>0$ 时,由 $f(|x|)<-2$ 得 $f(x)<f(9)$,因此 $x>9$;当 $x<0$ 时,由 $f(|x|)<-2$ 得 $f(-x)<f(9)$,因此 $-x>9$,故 $x<-9$,因此不等式的解集为 $\{x\mid x>9$ 或 $x<-9\}$.

【方法探究】 判断抽象函数单调性的基本方法是定义法，其关键是根据所给条件判断$f(x_1)-f(x_2)$的符号，多数情况下需要设法构造出x_1-x_2的因式. 求解与抽象函数有关的不等式问题，主要依据函数的单调性，其中要把不等式中出现的常数转化为某自变量的函数值，把不等式两边都化为一个自变量的函数值的形式，然后根据单调性得到自变量应满足的不等式再进行求解.

拓展 4 已知函数$f(x)$是定义在区间$[-1,1]$上的奇函数，且$f(1)=1$. 当m，$n\in[-1,1]$，$m+n\neq 0$时有$\dfrac{f(m)+f(n)}{m+n}>0$.

(1) 判断$f(x)$的单调性；

(2) 若不等式$f(x)\leqslant t^2-2at+1$对所有$x\in[-1,1]$，$a\in[-1,1]$恒成立，求实数t的取值范围.

题型三 分段函数和抽象函数的求值与范围问题

【调研 5】 已知函数$f(x)=\begin{cases}\sin \pi x, x<0,\\ f(x-1)-1, x>0\end{cases}$，如果当$-2<m<0$时，有$f(\dfrac{11}{6})+f(m)=-2$，则实数$m$等于

A. $-\dfrac{1}{6}$或$-\dfrac{7}{6}$ B. $-\dfrac{1}{6}$或$-\dfrac{11}{6}$ C. $-\dfrac{11}{6}$或$-\dfrac{7}{6}$ D. $-\dfrac{1}{6}$或$-\dfrac{5}{6}$

分析 先求出$f(\dfrac{11}{6})$的值，从而得到$f(m)$的值，然后再根据m的范围选择相应的解析式求出m的值.

解析 由于$f(\dfrac{11}{6})=f(\dfrac{11}{6}-1)-1=f(\dfrac{5}{6})-1=f(\dfrac{5}{6}-1)-2=f(-\dfrac{1}{6})-2=\sin(-\dfrac{\pi}{6})-2=-\dfrac{5}{2}$，

所以$f(\dfrac{11}{6})+f(m)=-\dfrac{5}{2}+\sin(m\pi)=-2$，所以$\sin(m\pi)=\dfrac{1}{2}$，根据$-2<m<0$可知，$m=-\dfrac{7}{6}$或$m=-\dfrac{11}{6}$.

【知识链接】 已知分段函数的函数值（或取值范围）求对应自变量的值（或范围）时，通常运用方程思想或不等式思想将问题转化为方程（组）或不等式（组）进行求解，但应注意分段考虑，避免漏解.

拓展 5 设$f(x)=\begin{cases}2e^{x-1}, x<2,\\ \log_3(x^2-1), x\geqslant 2\end{cases}$，则不等式$f(x)>2$的解集是

A$(1,2)\cup(3,+\infty)$　　B. $(\sqrt{10},+\infty)$

C. $(1,2)\cup(\sqrt{10},+\infty)$　　D. $(1,2)$

【调研6】　已知$f(x)$是奇函数，且在定义域$(-1,1)$内可导并满足$f'(x)<0$，解关于m的不等式$f(1-m)+f(1-m^2)>0$.

分析　根据函数的奇偶性，将所给不等式的两边分别化为两个函数值的形式，再根据函数的单调性去掉抽象函数符号f，便可求出m的范围，但不能忽视函数的定义域.

解析　$\because f(x)$在定义域$(-1,1)$内可导并满足$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$在$(-1,1)$内是减函数，

$\therefore$ 由$f(1-m)+f(1-m^2)>0$有$f(1-m)>-f(1-m^2)$，

$\therefore$ 由$f(x)$是奇函数得$f(1-m)>f(m^2-1)$，

$$\therefore \begin{cases} -1<1-m<1, \\ -1<m^2-1<1, \\ 1-m<m^2-1, \end{cases} \therefore 1<m<\sqrt{2},$$

$\therefore$ 原不等式的解集为$(1,\sqrt{2})$.

【技巧点拨】　这类与抽象函数有关的不等式问题，主要依据函数的单调性将抽象函数符号f消去，但其前提必须是不等式两边都是一个函数值的形式，若不是一个函数值或者符号不一致，就要先根据函数的其他性质进行转化. 如果函数是一个偶函数，则还可以利用偶函数的性质$f(x)=f(-x)=f(|x|)$，以避免分类讨论，另外还要注意函数的定义域对参数范围的限制.

拓展6　已知$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的不恒为零的函数，且对定义域内的任意x,y，$f(x)$都满足$f(x\cdot y)=y\cdot f(x)+x\cdot f(y)$.

(1) 求$f(1)$、$f(-1)$的值；

(2) 判断$f(x)$的奇偶性，并说明理由.

题型四　分段函数和抽象函数的综合问题

【调研7】　设n为正整数，规定$f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f}_{n\text{个}f}(x)]\}$，已知$f(x)=\begin{cases} 2(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x-1, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$

(1) 解不等式$f(x)\leqslant x$；

(2) 设集合$A=\{0,1,2\}$，对任意$x\in A$，证明$f_3(x)=x$；

(3) 求$f_{2\,007}\left(\frac{8}{9}\right)$的值；

(4) 若集合$B=\{x\mid f_{12}(x)=x, x\in[0,2]\}$，证明$B$中至少包含有8个元素.

分析　这是一个分段函数的综合问题,可根据题目给出的规定,推出函数 $f_n(x)$ 值的周期性进行计算求解.

解析　(1)① 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时,由 $2(1-x) \leqslant x$ 得 $x \geqslant \frac{2}{3}$,$\therefore \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1$.

② 当 $1 < x \leqslant 2$ 时,$\because x-1 \leqslant x$ 恒成立,$\therefore 1 < x \leqslant 2$.

由 ①② 得 $f(x) \leqslant x$ 的解集为 $\{x \mid \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 2\}$.

(2)$\because f(0)=2, f(1)=0, f(2)=1$,$\therefore$ 当 $x=0$ 时,$f_3(0)=f(f(f(0)))=f(f(2))=f(1)=0$ 当 $x=1$ 时,$f_3(1)=f(f(f(1)))=f(f(0))=f(2)=1$ 当 $x=2$ 时,$f_3(2)=f(f(f(2)))=f(f(1))=f(0)=2$,即对任意 $x \in A$,恒有 $f_3(x)=x$.

(3)$f_1(\frac{8}{9})=2(1-\frac{8}{9})=\frac{2}{9}$,$f_2(\frac{8}{9})=f(f(\frac{8}{9}))=f(\frac{2}{9})=\frac{14}{9}$,$f_3(\frac{8}{9})=f(f_2(\frac{8}{9}))=f(\frac{14}{9})=\frac{14}{9}-1=\frac{5}{9}$,$f_4(\frac{8}{9})=f(f_3(\frac{8}{9}))=f(\frac{5}{9})=2(1-\frac{5}{9})=\frac{8}{9}$,一般地,$f_{4k+r}(\frac{8}{9})=f_r(\frac{8}{9})(k,r \in \mathbf{N}^*)$,

$\therefore f_{2\,007}(\frac{8}{9})=f_3(\frac{8}{9})=\frac{5}{9}$.

(4) 由(1) 知,$f(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$,$\therefore f_n(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$,则 $f_{12}(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$,$\therefore \frac{2}{3} \in B$.

由(2) 知,对 $x=0$ 或 1 或 2,恒有 $f_3(x)=x$,$\therefore f_{12}(x)=f_{4\times3}(x)=x$,则 $0,1,2 \in B$.

由(3) 知,对 $x=\frac{8}{9},\frac{2}{9},\frac{14}{9},\frac{5}{9}$,恒有 $f_{12}(x)=f_{4\times3}(x)=x$,$\therefore \frac{8}{9},\frac{2}{9},\frac{14}{9},\frac{5}{9} \in B$.

综上所述,$\frac{2}{3},0,1,2,\frac{8}{9},\frac{2}{9},\frac{14}{9},\frac{5}{9} \in B$,$\therefore B$ 中至少含有 8 个元素.

【方法探究】　解决分段函数的综合问题时,最关键的是根据自变量值的分段情况,选择相对应的函数解析式. 解不等式或者求范围问题时应根据自变量分段情况,转化为若干个不等式组求解,然后取这些不等式组解集的并集. 解决函数值的迭代问题时,也应根据内层函数值的取值范围,来选择相应的函数解析式进行求解. 此外还要善于运用函数值的周期性解决迭代次数较多的函数问题.

拓展 7　设 $f(x)=|x+1|+|ax+1|$.

(1) 若 $f(-1)=f(1)$,$f(-\frac{1}{a})=f(\frac{1}{a})$($a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$),试求 a 的值;

(2) 设 $a>0$,求 $f(x)$ 的最小值 $g(a)$ 关于 a 的表达式.

强化闯关

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}f(x+2),x<2,\\2^{-x},x\geq 2\end{cases}$,则 $f(-3)$ 的值等于

A. 2　　B. 8　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{2}$

2. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数,且对任意 $x\in\mathbf{R}$,有 $f(-x)=-f(x+4)$,当 $x>2$ 时,$f(x)$ 单调递增,若 $x_1+x_2<4$,且 $(x_1-2)(x_2-2)<0$,那么 $f(x_1)+f(x_2)$ 的值的情况是

A. 可能为 0　　B. 大于 0　　C. 小于 0　　D. 有正有负

3. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$,若 $f(0)=2\ 006$,则 $f(2\ 006)=$ ______.

4. 设 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$,函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,且 $f(0)=0$,$f(1)=1$,当 $x\geq y$ 时,

$f(\frac{x+y}{2})=f(x)\sin\alpha+(1-\sin\alpha)f(y)$,求:

(1) $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(\frac{1}{4})$ 的值;

(2) 函数 $g(x)=\sin(\alpha-2x)$ 的单调递增区间.

参考答案

【拓展】

1. 当 $x<0$ 时,$f(x)=x^2+x$,$-x>0$,$\therefore f(-x)=-(-x)^2-x=-x^2-x=-f(x)$,当 $x>0$ 时,$f(x)=-x^2+x$,$-x<0$,$\therefore f(-x)=(-x)^2-x=x^2-x=-f(x)$,$\therefore f(x)$ 是奇函数.

2. B　由于 $F(-x)=\frac{2f(-x)}{g(-x)-1}+f(-x)=\frac{-2f(x)}{\frac{1}{g(x)}-1}-f(x)=\frac{-2f(x)g(x)}{1-g(x)}-f(x)$

$=\frac{2f(x)+f(x)[g(x)-1]}{g(x)-1}=\frac{2f(x)}{g(x)-1}+f(x)=F(x)$,

所以函数 $F(x)$ 是偶函数. 故选 B.

3. 作出函数 $f(x)$ 的图像(如图 3-2-1),容易得到函数的单调递减区间是 $(-\infty,1]$ 和 $[\frac{3}{2},+\infty)$.

4. (1) 设 $-1\leq x_1<x_2\leq 1$,因为 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\cdot(x_1-x_2)$,因为 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$,$(x_1-x_2)<0$,所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$,因此函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是单调递增函数.

(2) 由于 $f(1)=1$，所以由(1)知当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)\leqslant f(1)=1$，所以不等式 $f(x)\leqslant t^2-2at+1$ 对所有 $x\in[-1,1]$，$a\in[-1,1]$ 恒成立，即 $t^2-2at+1\geqslant 1$ 恒成立，亦即 $t^2-2at\geqslant 0$ 对 $a\in[-1,1]$ 恒成立，若令 $g(a)=-2ta+t^2$，则有 $\begin{cases} g(-1)=2t+t^2\geqslant 0, \\ g(1)=-2t+t^2\geqslant 0, \end{cases}$ 解得 $t\leqslant -2$ 或 $t\geqslant 2$ 或 $t=0$，此即为实数 t 的取值范围.

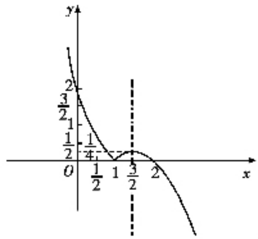


图 3-2-1

5. C　当 $x<2$ 时，由 $f(x)>2$ 得 $2e^{x-1}>2\Rightarrow e^{x-1}>1\Rightarrow x-1>0\Rightarrow x>1$，$\therefore 1<x<2$；

当 $x\geqslant 2$ 时，由 $f(x)>2$ 得 $\log_3(x^2-1)>2\Rightarrow x^2-1>9\Rightarrow x>\sqrt{10}$.

综上，不等式的解得是 $(1,2)\cup(\sqrt{10},+\infty)$. 故选 C.

6. (1) $\because f(x)$ 对任意 x,y 都有 $f(x\cdot y)=y\cdot f(x)+x\cdot f(y)$，$\therefore$ 令 $x=y=1$ 时，有 $f(1\cdot 1)=1\cdot f(1)+1\cdot f(1)$，$\therefore f(1)=0$，

令 $x=y=-1$ 时，有 $f[(-1)\cdot(-1)]=(-1)\cdot f(-1)+(-1)\cdot f(-1)$，$\therefore f(-1)=0$.

(2) $\because f(x)$ 对任意 x,y 都有 $f(x\cdot y)=y\cdot f(x)+x\cdot f(y)$，$\therefore$ 令 $x=t,y=-1$，有 $f(-t)=-f(t)+t\cdot f(-1)$，将 $f(-1)=0$ 代入得 $f(-t)=-f(t)$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数.

7. (1) $\because f(-1)=f(1)$，$\therefore 2+|a+1|=|1-a|$，两边平方并整理得 $|a+1|=-(a+1)$，$\therefore a\leqslant -1$. ①

又 $f(-\frac{1}{a})=f(\frac{1}{a})$，$\therefore 2+|\frac{1}{a}+1|=|1-\frac{1}{a}|$，两边平方并整理得 $|\frac{1}{a}+1|=-(\frac{1}{a}+1)$，$\therefore \frac{1}{a}+1\leqslant 0$，即 $\frac{a+1}{a}\leqslant 0$，$\therefore -1\leqslant a<0$. ②

由①②联立得 $a=-1$.

(2) $f(x)$ 的图像是一条折线，它的最小值在图像的转折点处取得.

① 当 $0<a<1$ 时，$-\frac{1}{a}<-1$，$f(x)=\begin{cases} -(1+a)x-2, & x<-\frac{1}{a}, \\ (a-1)x, & -\frac{1}{a}\leqslant x\leqslant -1, \\ (1+a)x+2, & x>-1, \end{cases}$

$\therefore g(a)=\min\{f(-\frac{1}{a}),f(-1)\}=\min\{-1+\frac{1}{a},1-a\}=1-a$.

② 当 $a=1$ 时，$f(x)=2|x+1|\geqslant 0$，即 $g(a)=0$.

③ 当 $a>1$ 时，$-\frac{1}{a}>-1$，$f(x)=\begin{cases}-(1+a)x-2, & x<-1,\\ (1-a)x, & -1\leqslant x\leqslant -\frac{1}{a},\\ (1+a)x+2, & x>-\frac{1}{a},\end{cases}$

$\therefore g(a)=\min\{f(-\frac{1}{a}),f(-1)\}=\min\{1-\frac{1}{a},a-1\}=1-\frac{1}{a}$.

综上所述，$g(a)=\begin{cases}1-a, & 0<a\leqslant 1,\\ 1-\frac{1}{a}, & a>1.\end{cases}$

【强化闯关】

1. C　依题意有 $f(-3)=f(-3+2)=f(-1)=f(-1+2)=f(1)=f(1+2)=f(3)=2^{-3}=\frac{1}{8}$，故选 C.

2. C　由 $f(-x)=-f(x+4)\Rightarrow f(x)=-f(4-x)$，根据条件知，$x_1$ 与 x_2 中有一个大于 2，有一个小于 2，不妨设 $x_1>2>x_2$，又 $x_1+x_2<4\Rightarrow 4-x_2>x_1>2$，而当 $x>2$ 时，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(4-x_2)>f(x_1)$，即 $-f(x_2)>f(x_1)$，所以 $f(x_1)+f(x_2)<0$.

3. $-\frac{1}{2\,006}$　由于 $f(x+2)=f[(x+1)+1]=\frac{1+f(x+1)}{1-f(x+1)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)}$，

所以 $f(x+4)=f[(x+2)+2]=-\frac{1}{f(x+2)}=f(x)$. 于是 $f(2\,006)=f(2+2\,004)=f(2)=-\frac{1}{f(0)}=-\frac{1}{2\,006}$.

4. (1) $f(\frac{1}{2})=f(\frac{1+0}{2})=f(1)\sin\alpha+(1-\sin\alpha)f(0)=\sin\alpha$，

$f(\frac{1}{4})=f(\frac{\frac{1}{2}-0}{2})=f(\frac{1}{2})\sin\alpha+(1-\sin\alpha)f(0)=\sin^2\alpha$，

$f(\frac{3}{4})=f(\frac{1+\frac{1}{2}}{2})=f(1)\sin\alpha+(1-\sin\alpha)f(\frac{1}{2})=2\sin\alpha-\sin^2\alpha$，

$f(\frac{1}{2})=f(\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}{2})=f(\frac{3}{4})\sin\alpha+(1-\sin\alpha)f(\frac{1}{4})=3\sin^2\alpha-2\sin^3\alpha$，

经常回顾自己以前解过的题，并尝试新的解法，把学到的新知识运用进去.

$\therefore \sin\alpha=(3-2\sin\alpha)\sin^2\alpha$，$\therefore \sin\alpha=0$ 或 $\sin\alpha=1$ 或 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$.

$\because \alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\therefore \alpha=\frac{\pi}{6}$，因此，$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，$f(\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$.

(2) $g(x)=\sin(\frac{\pi}{6}-2x)=\sin(2x+\frac{5\pi}{6})$，$\therefore g(x)$ 的增区间为 $[k\pi-\frac{2\pi}{3},k\pi-\frac{\pi}{6}]\ (k\in\mathbf{Z})$.

难点3 二次函数与三次函数

热点诠释

与二次函数有关的综合问题涉及面广，包容量大，几乎贯穿高中数学的各个章节，是考查推理能力的重要题型，经常作为高考压轴题. 而在高中数学引入导数后，由于三次函数求导就转化为二次函数，所以高考试题经常会把二次函数和三次函数结合在一起进行考查，综合考查函数的单调性、极值和最值以及代数推理等，这类题目在近几年的高考试题几乎每年必考，成为新的高考热点.

解决二次函数和三次函数的综合问题，首先要熟练掌握二次函数的有关性质和常见问题的处理方法，其次要通过对一些具体的三次函数的图像、单调性、极值和最值情形的分析和研究，了解一般三次函数的图像特征、极值情况，同时掌握三次函数的极值点与相应导函数对应的一元二次方程的根之间的关系，在此基础上综合解决问题.

典例调研

题型一 二次函数

【调研1】 **设二次函数** $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>b>c)$，**已知** $f(1)=0$，**且存在实数** m，**使** $f(m)=-a$.

(1) **试推断** $f(x)$ **在区间** $[0,+\infty)$ **上是否为单调函数，并说明你的理由；**

(2) **设** $g(x)=f(x)+bx$，**对于** $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，**且** $x_1\neq x_2$，**若** $g(x_1)=g(x_2)=0$，**求** $|x_1-x_2|$ **的取值范围；**

(3) **求证：**$f(m+3)>0$.

分析 **判断二次函数单调性，一般要考查函数图像对称轴与区间的位置关系；解决不等式以及范围问题则应充分利用二次函数与二次方程之间的关系，借助韦达定理找到问题的突破口.**

解析 (1) $f(m)=-a$，$m\in\mathbf{R}$，$\therefore$ **方程** $ax^2+bx+c+a=0$ **有实根** $\Rightarrow\Delta=b^2-$

$4a(a+c)\geqslant 0$，

$\because f(1)=0$，$\therefore a+b+c=0$，即 $a+c=-b$，$\therefore b^2-4a\cdot(-b)=b(b+4a)\geqslant 0$.

$\because a>b>c$，$\therefore a>0,c<0$，从而 $b+4a=-(a+c)+4a=3a-c>0$，$\therefore b\geqslant 0\Rightarrow x=-\dfrac{b}{2a}\leqslant 0$，

$\therefore f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

(2) 根据题意 x_1、x_2 是方程 $g(x)=0$，即 $ax^2+2bx+c=0$ 的两实根，

$\therefore |x_1-x_2|^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\dfrac{4b^2}{a^2}-\dfrac{4c}{a}=\dfrac{4}{a^2}(b^2-ac)=\dfrac{4}{a^2}[(a+c)^2-ac]=4[(\dfrac{c}{a})^2+\dfrac{c}{a}+1]=4(\dfrac{c}{a}+\dfrac{1}{2})^2+3$.

$\because a>b=-(a+c)$，$\therefore 2a>-c>0\Rightarrow\dfrac{c}{a}>-2$，又 $a+c=-b\leqslant 0$，$\therefore\dfrac{c}{a}\leqslant -1$，

$\therefore(\dfrac{c}{a}+\dfrac{1}{2})^2\in[\dfrac{1}{4},\dfrac{9}{4})$，$\therefore |x_1-x_2|\in[2,2\sqrt{3})$.

(3) 设 $f(x)=a(x-1)(x-\dfrac{c}{a})$，

$\because f(1)=0,f(m)=-a$，$\therefore a(m-1)(m-\dfrac{c}{a})=-a$

$\Rightarrow(m-1)(m-\dfrac{c}{a})=-1<0$，$\because\dfrac{c}{a}<0$，$\therefore\dfrac{c}{a}<m<1\Rightarrow m>-2\Rightarrow m+3>1$，

$\therefore f(m+3)>f(1)=0$.

【技巧点拨】 本题考查了二次方程、二次不等式与二次函数之间的关系，是一道较好的代数综合题. 二次函数问题是高中数学中常见的问题，也是高考中的热点和难点之一，二次函数，二次方程，二次不等式三者之间的关系密不可分，要想解决好这部分问题，就要紧紧抓住三者之间的关系，熟练掌握二次不等式的解法，二次函数的图像和性质，以及二次方程的解的性质，其中，二次函数的图像能够将这三者紧密结合起来，所以对于二次函数的图像要熟练掌握.

拓展1 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$.

(1) 对于 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，$f(x_1)\neq f(x_2)$，求证：方程 $f(x)=\dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 有不等的两实数根，且必有一个实数根属于 (x_1,x_2)；

(2) 若方程 $f(x)=\dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 在 (x_1,x_2) 内的根为 m，且 $x_1,m-\dfrac{1}{2},x_2$ 成等差数列，设 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的对称轴方程，求证：$x_0<m^2$.

当你在一个解题思路上完成一半却发现自己的方法很拙劣时，请不要马上丢弃，

题型二 三次函数的图像

【调研2】 已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+m$的图像不经过第四象限，试求实数$m$的取值范围.

分析 研究三次函数问题，一般要借助导数这一工具. 通过导数，分析函数的单调性、极值情况，从而确定函数的图像.

解析 由于$f'(x)=x^2+x-2$，令$f'(x)=0$，得$x=-2$或1，

当$x<-2$时，$f'(x)>0$，$f(x)$是增函数，当$-2<x<1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$是减函数，当$x>1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$是增函数，

$\therefore f(x)$在$x=-2$处取得极大值$f(-2)=\frac{10}{3}+m$，

$\therefore f(x)$在$x=1$处取得最小值$f(1)=-\frac{7}{6}+m$，

因此要使函数$f(x)$的图像不经过第四象限，应使其极小值不小于零，即$-\frac{7}{6}+m\geqslant 0$，$m\geqslant\frac{7}{6}$，

故m的取值范围是$m\geqslant\frac{7}{6}$.

【方法探究】 对于三次函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，其导函数为$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，方程$f'(x)=0$的两根为$x_1$，$x_2$，判别式$\Delta=4(b^2-3ac)$，我们有以下结论：

1. (1) 当$a>0$时，若$x\to+\infty$，则$f(x)\to+\infty$ 若$x\to-\infty$，则$f(x)\to-\infty$；

(2) 当$a<0$时，若$x\to+\infty$，则$f(x)\to-\infty$ 若$x\to-\infty$，则$f(x)\to+\infty$.

2. 若x_1，x_2是$f(x)$的两个极值点，则$x_1+x_2=-\frac{2b}{3a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{3a}$；

3. 其大致图像如图3－3－1所示：

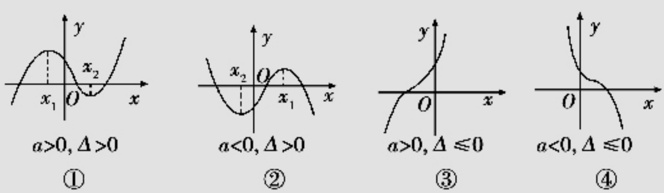


图3－3－1

（接上）至少要在用新的更好的方法解完题之后，回过来重新分析一下前面的思路.

拓展2　如图3－3－2是函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$的图像,则有

A. $a>0,b>0,c>0$　　B. $a<0,b>0,c>0$

C. $a>0,b<0,c<0$　　D. $a<0,b<0,c<0$

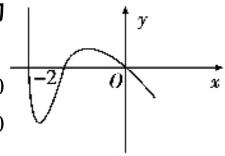


图3－3－2

题型三　三次函数的单调性与极值

【调研3】　若函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-1)x+b$在区间$[1,2]$上是单调递减函数,试求实数$a$的取值范围.

分析　先求出函数$f(x)$的单调递减区间,再依据题目条件建立关于a的不等式(组)求解.

解析　$f'(x)=x^2-2ax+(a^2-1)=[x-(a+1)][x-(a-1)]$,

令$f'(x)<0$,即$[x-(a+1)][x-(a-1)]<0$,得$a-1<x<a+1$,

即函数$f(x)$的单调递减区间是$[a-1,a+1]$,

又由于$f(x)$在$[1,2]$上单调递减,所以$\begin{cases}a-1\leqslant 1,\\a+1\geqslant 2\end{cases}\Rightarrow 1\leqslant a\leqslant 2$,此即为实数$a$的取值范围.

【知识链接】　一般地,对于三次函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$,其导数$f'(x)=3ax^2+2bx+c$,$f'(x)=0$的判别式$\Delta=4b^2-12ac$,则有:

(1)当$\Delta\leqslant 0$时,若$a>0$,则$f(x)$在R上是增函数;若$a<0$,则$f(x)$在R上是减函数;

(2)当$\Delta>0$时,设$f'(x)=0$的两根为$x_1<x_2$,

则当$a>0$时,$f(x)$的增区间有两个$(-\infty,x_1)$和$(x_2,+\infty)$,减区间有一个(x_1,x_2);

当$a<0$时,$f(x)$的减区间有两个$(-\infty,x_1)$和$(x_2,+\infty)$,增区间有一个(x_1,x_2).

拓展3　已知奇函数$f(x)=ax^3+3bx^2-4ax+c$在$x=1$处的切线与直线$3x+y-1=0$平行,那么函数$g(x)=f(-x)$的单调递增区间是______.

【调研4】　已知函数$f(x)=ax^3+cx$,$g(x)=x^3+3m^2x-2m$.若函数$f(x)$在$x=1$时取极小值为$-\frac{2}{3}$.

(1)求$f(x)$的解析式;

(2)试判断:当$x\in[-1,1]$时,$f(x)$的图像上是否存在两点,使这两点处的切线垂直;

(3)是否存在实数m,使得对任意的$x_1\in[-3,3]$,总存在$x_0\in[0,1]$,都有$g(x_0)=f(x_1)$成立?若存在,求出m的取值范围;若不存在,说明理由.

分析　由$f(x)$的极值求出a,c的值,从而得到解析式,然后根据导数的几何意义解决切线问题,(3)实质是对函数最值问题的研究.

数学金典　决不要因为题目"很小"就不遵循某些你不熟练的解题规范——好习惯是培养出来的,而不是一次记住的.

解析 (1) 因为$f(x)=ax^3+cx$,所以$f'(x)=3ax^2+c$,依题意得$\begin{cases}3a+c=0,\\ a+c=-\dfrac{2}{3},\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=\dfrac{1}{3},\\ c=-1,\end{cases}$于是$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x$.

(2) 假设当$x\in[-1,1]$时,$f(x)$的图像上存在两点使这两点处的切线垂直,

设这两点为(x_1,y_1),(x_2,y_2),由于$f'(x)=x^2-1$,

则这两点处的切线的斜率分别为$k_1=f'(x_1)=x_1^2-1$,$k_2=f'(x_2)=x_2^2-1$,

所以$k_1k_2=(x_1^2-1)(x_2^2-1)$,

由于$x_1,x_2\in[-1,1]$,所以$(x_1^2-1)(x_2^2-1)\in[0,1]$,故不可能有$k_1k_2=-1$,

所以当$x\in[-1,1]$时,$f(x)$的图像上不存在两点使这两点处的切线垂直.

(3) $g'(x)=3x^2+3m^2$,

当$x\in[0,1]$时,$g'(x)>0$,

所以$g(x)$在$[0,1]$上单调递增,因此当$x_0\in[0,1]$时,$g(x_0)\in[g(0),g(1)]$,

而$g(0)=-2m$,$g(1)=3m^2-2m+1$,即$g(x_0)\in[-2m,3m^2-2m+1]$.

又因为当$x\in[-3,3]$时,可求得$f(x)\in[-6,6]$.

假设对任意的$x_1\in[-3,3]$,总存在$x_0\in[0,1]$,都有$g(x_0)=f(x_1)$成立,则有$[-6,6]\subseteq[-2m,3m^2-2m+1]$,

因此有$\begin{cases}-2m\leqslant -6,\\ 3m^2-2m+1\geqslant 6,\\ 3m^2-2m+1>-2m,\end{cases}$ 解得$m\geqslant 3$.

故存在实数m,使得对任意的$x_1\in[-3,3]$,总存在$x_0\in[0,1]$,都有$g(x_0)=f(x_1)$成立,其取值范围是$m\geqslant 3$.

【考向预测】 本题以二次函数和三次函数为载体综合考查了函数与导数的有关问题. 考查的知识点有:函数的图像、导数的应用、不等式应用等. 导数作为一个重要的工具,它有着非常广泛的应用,已成为众多知识交汇的载体,如研究函数的单调性问题、最值问题、曲线的切线问题、不等式的证明问题等等.

其实,这类与导数有关的问题,一般都有着较为明显的特征:如所给出函数为非常规函数(三次函数等高次函数、复合函数等). 因此,在解题中要注意抓住这些信息,合理运用导数求解.

拓展4 已知函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$在$x=-\dfrac{2}{3}$与$x=1$时都取得极值.

(1) 求a、b的值与函数$f(x)$的单调区间;

(2) 若对$x\in[-2,2]$,不等式$f(x)<c^2$恒成立,求c的取值范围.

难点透视

题型四　二次函数与三次函数的综合问题

【调研5】　设 x_1,x_2 是函数 $f(x)=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2-a^2x(a>0)$ 的两个极值点，且 $|x_1|+|x_2|=2$.

(1) 证明 $0<a\leqslant 1$；

(2) 证明 $|b|\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}$；

(3) 若函数 $h(x)=f'(x)-2a(x-x_1)$. 证明 当 $x_1<x<2$ 且 $x_1<0$ 时，$|h(x)|\leqslant 4a$.

分析　x_1,x_2 是函数 $f(x)$ 的两个极值点，可知 x_1,x_2 是方程 $f'(x)=0$ 的两个根，由此转化为二次函数问题，再根据韦达定理进行证明.

解析　(1) 令 $f'(x)=ax^2+bx-a^2=0(a>0)$，由题意知方程两根是 x_1,x_2，

$\therefore x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=-a$，

又 $|x_1|+|x_2|=2\Rightarrow x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=4\Rightarrow(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4\Rightarrow(x_1+x_2)^2=4+4x_1x_2=4-4a\geqslant 0$，

又 $a>0$，$\therefore 0<a\leqslant 1$.

(2) 由(1)知，$\frac{b^2}{a^2}=4-4a$ 即 $b^2=2(2-2a)\cdot a\cdot a\leqslant 2\cdot(\frac{2-2a+a+a}{3})^3=\frac{16}{27}$，

$\therefore |b|\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}$，当且仅当 $a=2-2a\Rightarrow a=\frac{2}{3}$ 时，等号成立.

(3) 函数 $h(x)=f'(x)-2a(x-x_1)=a(x-x_1)(x-x_2)-2a(x-x_1)=a(x-x_1)\cdot(x-x_2-2)$，

由 $x_1<0$，$x_1x_2<0$ 知 $x_2>0$，又 $x<2$，所以 $|x-x_2-2|=x_2+2-x$，故 $|h(x)|=a|x-x_1|\cdot|x-x_2-2|\leqslant a\cdot(\frac{x-x_1+x_2+2-x}{2})^2=\frac{a}{4}\cdot(x_2-x_1+2)^2$，当且仅当 $x-x_1=x_2+2-x\Rightarrow x=\frac{x_1+x_2+2}{2}$ 时，等号成立.

又 $\because x_2-x_1=|x_1|+|x_2|=2$，从而 $|h(x)|\leqslant\frac{a}{4}\cdot(2+2)^2=4a$.

【方法探究】　从本题的解答我们可以发现：三次函数 $f(x)$ 如果有极值，那么其两个极值点就是方程 $f'(x)=0$ 的两个根，由此利用一元二次方程根与系数的关系进行求解，这就体现了二次函数与三次函数之间的联系. 本题(2)问还可以在得到 a 与 b 的关系式后，将 b^2 看作变量 a 的函数（三次函数），然后继续利用导数求出 b^2 的取值范围，从而证得 b 的范围.

拓展5　已知 $x=1$ 是函数 $f(x)=mx^3-3(m+1)x^2+nx+1$ 的一个极值点，其中 $m,n\in\mathbf{R}$，$m<0$.

（1）求 m 与 n 的关系式；

（2）求 $f(x)$ 的单调区间；

（3）当 $x \in [-1,1]$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图像上任意一点的切线斜率恒大于 $3m$，求 m 的取值范围.

强化闯关

1. 函数 $f(x)=x^3+3x^2+3x-a$ 的极值点的个数是

A. 2 个　　B. 1 个　　C. 0 个　　D. 由 a 确定

2. 若曲线 $y=x^3+px+q$ 与 x 轴相切，则 p 与 q 之间的关系满足

A. $(\frac{p}{3})^3+(\frac{q}{2})^2=0$　　B. $(\frac{q}{3})^3+(\frac{p}{2})^2=0$

C. $2p=3q^2$　　D. $2q=3p^2$

3. 若 $a>3$，则方程 $x^3-ax^2+1=0$ 在 $(0,2)$ 上恰有

A. 0 个根　　B. 1 个根　　C. 2 个根　　D. 3 个根

4. 设 $t\neq 0$，点 $P(t,0)$ 是函数 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 的图像的一个公共点，两函数在点 P 处有相同的切线.

（1）用 t 表示 a,b,c；

（2）若函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在 $(-1,3)$ 上单调递减，求 t 的取值范围.

5. 已知函数 $f(x)=x^3+2x^2+x-4$，$g(x)=ax^2+x-8$.

（1）若对任意的 $x\in[0,+\infty)$ 都有 $f(x)\geqslant g(x)$，求实数 a 的取值范围；

（2）若对任意的 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 都有 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$，求实数 a 的取值范围.

6. 已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有极大值 $f(\alpha)$ 和极小值 $f(\beta)$.

（1）求 $f(\alpha)+f(\beta)$ 的值；

（2）设曲线 $y=f(x)$ 的极值点为 A,B，求证：线段 AB 的中点在 $y=f(x)$ 上.

参考答案

【拓展】

1.（1）由 $ax^2+bx+c=\frac{1}{2}(ax_1^2+bx_1+c+ax_2^2+bx_2+c)$，

得 $2ax^2+2bx-a(x_1^2+x_2^2)-b(x_1+x_2)=0$，

由 $a\neq 0$，故此方程的判别式 $\Delta=(2b)^2-4\cdot 2a[-a(x_1^2+x_2^2)-b(x_1+x_2)]=2(2ax_1+b)^2+2(2ax_2+b)^2\geqslant 0$，

$\because x_1<x_2$，$\therefore 2ax_1+b\neq 2ax_2+b$，$\Delta>0$，

$\therefore$ 方程 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 有两不等的实数根；

令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，$g(x)$ 是二次函数，由 $g(x_1)\cdot g(x_2)=[f(x_1)$

难点透视

数学知识是最纯粹的逻辑思维活动，以及最高级智能活力美学体现.

—— 普林舍姆

名家风采

$-\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}]\cdot[f(x_2)-\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}]=-\frac{1}{4}[f(x_1)-f(x_2)]^2\leqslant 0$ 且 $f(x_1)\neq f(x_2)$，得 $g(x_1)\cdot g(x_2)<0$，

$\therefore g(x)=0$ 的根必有一个属于 (x_1,x_2).

(2) 由题设，得 $2f(m)=f(x_1)+f(x_2)$ 即有 $a(2m^2-x_1^2-x_2^2)+b(2m-x_1-x_2)=0$，

$\because x_1, m-\frac{1}{2}, x_2$ 成等差数列，$\therefore x_1+x_2=2m-1$，即 $2m-x_1-x_2=1$，

$\therefore b=-a(2m^2-x_1^2-x_2^2)$，故 $x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{2m^2-x_1^2-x_2^2}{2}=m^2-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}$，

又 $x_1<x_2$，$\therefore x_1^2+x_2^2>0$，故 $x_0<m^2$.

2. D　图像过原点，所以 $d=0$，又 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，$\therefore a<0$，

又 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$，

函数的两个极值点的横坐标均小于零，即 $f'(x)=0$ 的两根均小于零，

$\therefore\begin{cases}-\frac{2b}{3a}<0,\\ \frac{c}{3a}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b<0,\\ c<0.\end{cases}$ 故选 D.

3. $(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$　由于 $f(x)$ 是奇函数，可得 $3b=0$，$c=0$，于是 $f(x)=ax^3-4ax$，又 $f'(x)=3ax^2-4a$，$\therefore f'(1)=-a$，依题意有 $-a=-3$，$\therefore a=3$，故 $f(x)=3x^3-12x$. 因此 $g(x)=-3x^3+12x$，$g'(x)=-9x^2+12$，由 $g'(x)>0$ 得 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}<x<\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 的单调递增区间是 $(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

4. (1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，$f'(x)=3x^2+2ax+b$，

由 $f'(-\frac{2}{3})=\frac{12}{9}-\frac{4}{3}a+b=0$，$f'(1)=3+2a+b=0$ 得

$a=-\frac{1}{2}$，$b=-2$；

$f'(x)=3x^2-x-2=(3x+2)(x-1)$，函数 $f(x)$ 的单调区间如下表：

x	$(-\infty,-\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 的递增区间是 $(-\infty,-\frac{2}{3})$ 与 $(1,+\infty)$，

递减区间是$(-\frac{2}{3},1)$.

(2)$f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+c$,$x\in[-2,2]$,当$x=-\frac{2}{3}$时,$f(x)=\frac{22}{27}+c$为极大值,而$f(2)=2+c>f(-\frac{2}{3})$,则$f(2)=2+c$为最大值.

要使$f(x)<c^2(x\in[-2,2])$恒成立,只需$c^2>f(2)=2+c$,解得$c<-1$或$c>2$.

5. (1)$f'(x)=3mx^2-6(m+1)x+n$,因为$x=1$是函数$f(x)$的一个极值点,所以$f'(1)=0$,即$3m-6(m+1)+n=0$,所以$n=3m+6$.

(2)由(1)知,$f'(x)=3mx^2-6(m+1)x+3m+6=3m(x-1)[x-(1+\frac{2}{m})]$,

当$m<0$时,有$1>1+\frac{2}{m}$,当x变化时,$f(x)$与$f'(x)$的变化如下表:

x	$(-\infty,1+\frac{2}{m})$	$1+\frac{2}{m}$	$(1+\frac{2}{m},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	<0	0	>0	0	<0
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减

故由上表知,当$m<0$时,$f(x)$在$(-\infty,1+\frac{2}{m})$上单调递减,在$(1+\frac{2}{m},1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减.

(3)由已知得$f'(x)>3m$,即$mx^2-2(m+1)x+2>0$. 又$m<0$,所以$x^2-\frac{2}{m}(m+1)x+\frac{2}{m}<0$,即$x^2-\frac{2}{m}(m+1)x+\frac{2}{m}<0$,$x\in[-1,1]$. ①

设$g(x)=x^2-2(1+\frac{1}{m})x+\frac{2}{m}$,其函数开口向上,由题意知①式恒成立,所以

$\begin{cases}g(-1)<0,\\g(1)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+2+\frac{2}{m}+\frac{2}{m}<0,\\-1<0,\end{cases}$解之得$-\frac{4}{3}<m$. 又$m<0$,所以$-\frac{4}{3}<m<0$.

故m的取值范围为$(-\frac{4}{3},0)$.

【强化闯关】

1. C　$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\geqslant 0$恒成立,$\therefore f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增,故$f(x)$无极值,选C.

2. A　设切点为$(x_0,0)$,则$\begin{cases}x_0^3+px_0+q=0,①\\3x_0^2+p=0,②\end{cases}$

数学是最宝贵的研究精神之一.

——华罗庚

名家风采

由②得 $p=-3x_0^2$,③,代入①得 $q=2x_0^3$,④

由③得 $(\frac{p}{3})^3=-x_0^6$,⑤

由④得 $(\frac{q}{2})^2=x_0^6$,⑥

⑤+⑥得 $(\frac{p}{3})^3+(\frac{q}{2})^2=0$,故选 A.

3. B　令 $f(x)=x^3-ax^2+1$,则 $f'(x)=3x^2-2ax$. 在 $a>3$,$x\in(0,2)$ 时,$f'(x)<0$,又 $f(0)=1>0$,$f(2)=9-4a<0$,故 $f(x)$ 的图像在 $(0,2)$ 上与 x 轴只有一个交点,即方程只有 1 个根,故选 B.

4. (1) 依题意有:$\begin{cases}t^3+at=0,①\\bt^2+c=0,②\end{cases}$

又两函数图像在 P 点有相同的切线,所以两函数在 $x=t$ 处的导数值相等,

而 $f'(x)=3x^2+a$,$g'(x)=2bx$,$\therefore 3t^2+a=2bt$,③

由①②③解得 $\begin{cases}a=-t^2,\\b=t,\\c=-t^3.\end{cases}$

(2) $h(x)=x^3-tx^2-t^2x+t^3$,$\therefore h'(x)=3x^2-2tx-t^2$,

令 $h'(x)<0$,即 $(x+\frac{t}{3})(x-t)<0$,

若 $t>0$,则有 $-\frac{t}{3}<x<t$ 若 $t<0$,则有 $t<x<-\frac{t}{3}$;

由于 $h(x)$ 在 $(-1,3)$ 上单调递减,所以有:$\begin{cases}t>0,\\-\frac{t}{3}\leqslant -1,\\t\geqslant 3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t<0,\\t\leqslant -1,\\-\frac{t}{3}\geqslant 3,\end{cases}$

解得 $t\geqslant 3$ 或 $t\leqslant -9$. 即 t 的取值范围是 $t\geqslant 3$ 或 $t\leqslant -9$.

5. (1) 令 $F(x)=f(x)-g(x)=x^3+(2-a)x^2+4$,

$\because F(x)\geqslant 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立,$\therefore F(x)_{\min}\geqslant 0$ 且 $x\in[0,+\infty)$,

若 $2-a\geqslant 0$,$F(x)_{\min}=4>0$,此时 $a\leqslant 2$;

若 $2-a<0$,$F'(x)=3x^2-2(a-2)x=3x[x-\frac{2(a-2)}{3}]$,

所以 $F'(\frac{2a-4}{3})=0$,当且仅当 $x>\frac{2a-4}{3}$ 时,$F'(x)>0$;

当 $0<x<\frac{2(a-2)}{3}$ 时,$f'(x)<0$,$\therefore$ 当 $x\in[0,+\infty)$ 时,$F(x)_{\min}=F(\frac{2a-4}{3})\geqslant 0$,

即$(\frac{2a-4}{3})^3-(a-2)\cdot(\frac{2a-4}{3})^2+4\geqslant 0$,

解得 $a\leqslant 5$,所以 $2<a\leqslant 5$,综上,a 的取值范围是$(-\infty,5]$.

(2) 由题意$f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\max}$,$x\in[0,+\infty)$,显然$f(x)_{\min}=-4$,$\because a\geqslant 0$ 时,$g(x)$ 无最大值,不合题意,$\therefore a<0$,

又$\because -\frac{1}{2a}\in[0,+\infty)$,$g(x)_{\max}=-\frac{1+32a}{4a}$,$\therefore -\frac{1+32a}{4a}\leqslant -4$,$\therefore a\leqslant -\frac{1}{16}$,

$\therefore a$ 的取值范围是$(-\infty,-\frac{1}{16}]$.

6. (1)$f'(x)=3x^2+2ax+b$,由于 $f(x)$ 有极大值和极小值,

$\therefore \alpha,\beta$ 为方程 $3x^2+2ax+b=0$ 的两根,则 $\alpha+\beta=-\frac{2a}{3}$,$\alpha\beta=\frac{b}{3}$,

$f(\alpha)+f(\beta)=(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)+(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)=(\alpha^3+\beta^3)+a(\alpha^2+\beta^2)+b(\alpha+\beta)+2c=[(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)]+a[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]+b(\alpha+\beta)+2c=(-\frac{2a}{3})^3-3\cdot\frac{b}{3}\cdot(-\frac{2a}{3})+a[(-\frac{2a}{3})^2-2\cdot\frac{b}{3}]+b(-\frac{2a}{3})+2c=\frac{4}{27}a^3-\frac{2ab}{3}+2c$.

(2) 设 $A(\alpha,f(\alpha))$,$B(\beta,f(\beta))$,

由$f(\frac{\alpha+\beta}{2})=(\frac{\alpha+\beta}{2})^3+a\cdot(\frac{\alpha+\beta}{2})^2+b\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}+c=(-\frac{a}{3})^3+a\cdot(-\frac{a}{3})^2+b(-\frac{a}{3})+c=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c=\frac{1}{2}[f(\alpha)+f(\beta)]$,

所以 AB 中点在曲线 $y=f(x)$ 上.

难点透视

数学是规律和理论的裁判和主宰者.

—— 本杰明

名家风采

热点聚焦

热点1　代数推理

热点诠释　代数推理问题综合了函数、方程、不等式等多个知识点，需要采用多种数学思想方法才能解决问题，如：函数方程思想、化归思想、分类讨论思想等，对学生知识和能力的要求较高，是对学生思维品质和逻辑推理能力、表述能力的全面性考查，可以弥补选择题、填空题等客观题的不足，是提高区分度、增加选拔功能的重要题型，因此在近几年的高考试题中，代数推理问题正成为一个热点题型，并且经常作为压轴题出现.

代数推理问题主要以函数、方程、不等式等知识的综合为主，在解答中首先应熟悉相应函数、方程、不等式的知识，更重要的是要善于将三者有机地联系起来，特别注意函数在其中的主线作用，通过构造函数解决方程、不等式问题.

典例调研　题型一　函数问题中的代数推理

【调研1】　已知 $x\in\mathbf{R}$，奇函数 $f(x)=x^3-ax^2-bx+c$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调.

(1) 求字母 a,b,c 应满足的条件；

(2) 设 $x_0\geqslant 1$，$f(x_0)\geqslant 1$，且满足 $f[f(x_0)]=x_0$，求证：$f(x_0)=x_0$.

分析　由函数是奇函数，可得 a 和 c 的值为 0，然后根据单调性转化为恒成立问题求出 b 的范围；最后依据单调性证明 $f(x_0)=x_0$.

解析　(1) $\because f(0)=0\Rightarrow c=0$；$f(x)+f(-x)=0\Rightarrow a=0$，$\therefore f(x)=x^3-bx$，$\therefore f'(x)=3x^2-b$.

若 $f(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上是增函数，则 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，即 $b\leqslant(3x^2)_{\min}=3$.

若 $f(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上是减函数，则 $f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，这样的 b 不存在.

综上，可得 $a=c=0$，$b\leqslant 3$.

名家风采　数学的本质在于它的自由.

——康托尔

(2) 证法一　设$f(x_0)=m$,由$f[f(x_0)]=x_0$得$f(m)=x_0$,于是有$\begin{cases}x_0^3-bx_0=m, ①\\ m^3-bm=x_0, ②\end{cases}$

① - ② 得$(x_0^3-m^3)-b(x_0-m)=m-x_0$,化简得$(x_0-m)(x_0^2+mx_0+m^2+1-b)=0$,$\because x_0\geqslant 1$,$f(x_0)=m\geqslant 1$,

$\therefore x_0^2+mx_0+m^2+1-b\geqslant 4-b\geqslant 1>0$,故$x_0-m=0$,即有$f(x_0)=x_0$.

证法二　假设$f(x_0)\neq x_0$,不妨设$f(x_0)=a>x_0\geqslant 1$,由(1)可知$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,故$f[f(x_0)]=f(a)>f(x_0)>x_0$,这与已知$f[f(x_0)]=x_0$矛盾,故原假设不成立,即有$f(x_0)=x_0$.

【知识链接】　对于已知函数单调性求参数范围的问题,一般需要将其转化为一个不等式恒成立问题. 函数单调性在研究函数值域、最值、方程的根等问题中有着重要应用. 本题在(2)问中利用反证法,结合函数单调性证明问题,使解答更加简单.

拓展 1　对于在区间$[a,b]$上有意义的两个函数$f(x)$与$g(x)$,如果对于任意$x\in[a,b]$,均有$|f(x)-g(x)|\leqslant 1$,则称$f(x)$与$g(x)$在区间$[a,b]$上是接近的,若函数$y=x^2-3x+4$与函数$y=2x-3$在区间$[a,b]$上是接近的,则该区间可以是______.

题型二　方程中的代数推理

【调研 2】　已知二次函数$f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$.

(1) 若方程$f(x)=0$无实根,求证:$b>0$;

(2) 若方程$f(x)=0$有两实根,且两实根是相邻两整数,求证:$f(-a)=\frac{1}{4}(a^2-1)$;

(3) 若方程$f(x)=0$有两非整数实根,且这两实根在相邻两整数之间,试证明:存在整数k,使得$|f(k)|\leqslant\frac{1}{4}$.

分析　由方程根的情况,通过判别式证明$b>0$;由于两根是相邻两整数,设出两根,利用根与系数的关系证明等式.

解析　(1) 因为方程无实数根,所以$\Delta=a^2-4b<0\Rightarrow b>\frac{1}{4}a^2\Rightarrow b>0$.

(2) 设m、$m+1(m\in\mathbf{Z})$是方程$f(x)=0$的两个实根,则由韦达定理得$\begin{cases}2m+1=-a,\\ m(m+1)=b\end{cases}\Rightarrow\frac{-a-1}{2}\cdot\frac{-a+1}{2}=b\Rightarrow f(-a)=b=\frac{1}{4}(a^2-1)$.

(3) 设x_1、x_2是方程$f(x)=0$的两个实根,且$m<x_1<x_2<m+1(m\in\mathbf{Z})$,则

$f(m)=(m-x_1)(m-x_2)=(x_1-m)(x_2-m)>0$,

$f(m+1)=[(m+1)-x_1]\cdot[(m+1)-x_2]>0$,

热点聚焦

在数学的领域中,提出问题的艺术比解答问题的艺术更为重要.
—— 康托尔

名家风采

从而有$f(m)f(m+1)=(x_1-m)[(m+1)-x_1](x_2-m)[(m+1)-x_2]\leqslant$ $[\frac{(x_1-m)+(m+1-x_1)}{2}]^2\cdot[\frac{(x_2-m)+(m+1-x_2)}{2}]^2=\frac{1}{16}$,

故$|f(m)|$与$|f(m+1)|$中至少有一个小于等于$\frac{1}{4}$,即存在整数k,使得$|f(k)|\leqslant$ $\frac{1}{4}$.

【方法探究】 解决一元二次方程问题最重要也是最常用的方法就是根与系数的关系,如在本题中当两根是相邻两整数时,设两根为m、$m+1(m\in\mathbf{Z})$,减少了参数个数,也容易找到参数之间的关系.另外由于是二次方程问题,所以要紧密结合二次函数求解.

拓展2 设定义在正实数集上的两个函数$f(x)=x^2-2\ln x$,$g(x)=x-a\sqrt{x}$,已知$g(x)$在$(0,1)$上为减函数,$(1,+\infty)$上是增函数.证明:方程$f(x)=g(x)+3$上$[1,+\infty)$恰有一个实数根.

题型三 不等式中的代数推理

【调研3】 若定义在区间D上的函数$y=f(x)$对于区间D上的任意两个值x_1,x_2,总有以下不等式$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\leqslant f(\frac{x_1+x_2}{2})$成立,则称函数$y=f(x)$为区间$D$上的凸函数.

(1)证明:定义在$\mathbf{R}$上的二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$是凸函数;

(2)对于(1)中的二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$,若$|f(1)|\leqslant 1$,$|f(2)|\leqslant 2$,$|f(3)|\leqslant 3$,求$|f(4)|$取得最大值时函数$y=f(x)$的解析式;

(3)定义在$\mathbf{R}$上的任意凸函数$y=f(x)$,p、q、m、$n\in\mathbf{N}^*$,若$p<m<n<q$,且$p+q=m+n$,证明:$f(p)+f(q)\leqslant f(m)+f(n)$.

分析 先根据凸函数的定义证明所给函数是一个凸函数,然后充分利用凸函数的定义结合绝对值不等式的性质求解函数的解析式,证明不等式.

解析 (1)因为$a<0$,所以有$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=a(\frac{x_1^2+x_2^2}{2})+b(\frac{x_1+x_2}{2})+c\leqslant$ $a(\frac{x_1+x_2}{2})^2+b(\frac{x_1+x_2}{2})+c=f(\frac{x_1+x_2}{2})$,

因此,二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$是凸函数.

(2)由$\begin{cases}f(1)=a+b+c,\\f(2)=4a+2b+c,\\f(3)=9a+3b+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}f(1)-f(2)+\frac{1}{2}f(3),\\b=-\frac{5}{2}f(1)+4f(2)-\frac{3}{2}f(3),\\c=3f(1)-3f(2)+f(3),\end{cases}$

从而有$f(4)=16a+4b+c=f(1)-3f(2)+3f(3)$，

故$|f(4)|\leqslant|f(1)|+3|f(2)|+3|f(3)|\leqslant 1+3\times 2+3\times 3=16$，因为$a<0$，所以当且仅当$\begin{cases}f(1)=-1,\\f(2)=2,\\f(3)=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4,\\b=15,\\c=-12\end{cases}$时，$|f(4)|$取得最大值16，此时，$f(x)=-4x^2+15x-12$.

(3) 不妨设$m=p+i(i\in\mathbf{N}^*)$. 因为$p+q=m+n$，所以$m-p=q-n=i$. 由定义知 对任意x_1、$x_2\in\mathbf{R}$，都有$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\leqslant f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$. 因此，有

$\dfrac{f(p)+f(p+2)}{2}\leqslant f(p+1)$，即$f(p)-f(p+1)\leqslant f(p+1)-f(p+2)$.

同理，有$f(p+1)-f(p+2)\leqslant f(p+2)-f(p+3)$，

$f(p+2)-f(p+3)\leqslant f(p+3)-f(p+4)$，

…

$f(p+k-2)-f(p+k-1)\leqslant f(p+k-1)-f(p+k)$，

累加求和，得$f(p)-f(p+k-1)\leqslant f(p+1)-f(p+k)$，即$f(p)+f(p+k)\leqslant f(p+1)+f(p+k-1)$.

因此，有$f(p)+f(p+k)\leqslant f(p+1)+f(p+k-1)\leqslant f(p+2)+f(p+k-2)\leqslant f(p+i)+f(p+k-i)$.

令$p+k=q$，得$f(p)+f(q)\leqslant f(p+i)+f(q-i)=f(m)+f(n)$.

【方法探究】 本题是一个不等式与函数综合的问题，根据题目给出的凸函数的定义式，它与均值不等式的结构非常接近，所以可以联系均值不等式进行证明；(3)问中则以函数为凸函数为条件，充分利用定义式，并借鉴了数列中的累加求和证明不等式.

拓展3 设$f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，$f(x)$的导数为$f'(x)$. 若$|f(0)|=1$，$f'(0)=0$，$f(1)=0$.

(1) 求$f(x)$的解析式；

(2) 对于任意的$x_1,x_2\in[0,1]$且$x_1\neq x_2$，求证：$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant 2|x_1-x_2|$.

题型四 代数推理综合问题

【调研4】 设函数$f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{a}{2}x^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R})$，函数$f(x)$的导数记为$f'(x)$.

(1) 若$a=f'(2)$，$b=f'(1)$，$c=f'(0)$，且$F(n)=\dfrac{1}{f'(n)+2}$. 求证：$F(1)+$

$F(2)+F(3)+\cdots+F(n)<\frac{11}{18}(n\in\mathbf{N}^*)$；

（2）设关于x的方程$f'(x)=0$的两个实数根为α、β，且$1<\alpha<\beta<2$. 试问：是否存在正整数n_0，使得$|f'(n_0)|\leqslant\frac{1}{4}$?说明理由.

分析　这是一个三次函数与二次函数的综合问题，可以利用导数求解，在证明不等式的过程中要考虑多种方法，如放缩法和均值不等式等.

解析　（1）由于$f'(x)=x^2+ax+b$，由条件得$\begin{cases}a=2a+b+4,\\b=a+b+1,\\c=b,\end{cases}$解得$a=-1$，$b=c=-3$. $\therefore f'(n)=n^2-n-3$，$F(n)=\frac{1}{f'(n)+2}=\frac{1}{n^2-n-1}$，

当$n=1$时，$F(1)=-1<\frac{11}{18}$；当$n=2$时，$F(1)+F(2)=-1+1=0<\frac{11}{18}$；

当$n\geqslant 3$时，$F(n)=\frac{1}{n^2-n-1}<\frac{1}{n^2-n-2}=\frac{1}{(n+1)(n-2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)$，

$\because F(1)+F(2)+F(3)+\cdots+F(n)<F(1)+F(2)+\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{1}{3}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]<\frac{11}{18}$，

$\therefore F(1)+F(2)+F(3)+\cdots+F(n)<\frac{11}{18}(n\in\mathbf{N}^*)$.

（2）$f'(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$，

$\because f'(1)\cdot f'(2)=(1-\alpha)(1-\beta)(2-\alpha)(2-\beta)=(\alpha-1)(\beta-1)(2-\alpha)(2-\beta)$
$=(\alpha-1)(2-\alpha)(\beta-1)(2-\beta)\leqslant\left[\frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{2}\right]^2\left[\frac{(\beta-1)+(2-\beta)}{2}\right]^2=\frac{1}{16}$，

$\therefore 0<f'(1)\leqslant\frac{1}{4}$或$0<f'(2)\leqslant\frac{1}{4}$. 所以存在$n_0=1$或$2$，使$|f'(n_0)|\leqslant\frac{1}{4}$.

【方法探究】　本题是一个函数、导数、不等式、方程、数列等内容的综合问题，考虑到要证明的不等式与正整数n有关，因此可借助数列中的求和方法将不等式化简，这里先用了放缩法，然后利用裂项求和法，在求出和的同时，也就证明了欲证不等式；（3）问中将方程的问题转化为函数问题处理，充分体现了函数方程思想在解题中的重要应用.

名家风采　只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力，而问题缺乏则预示着独立发展的终止或衰亡.
——希尔伯特

拓展4 已知函数$f(x)=ax^2+4x+b(a<0,a、b\in\mathbf{R})$,设关于$x$的方程$f(x)=0$的两根为$x_1$、$x_2$,$f(x)=x$的两实根为$\alpha$、$\beta$.

(1)若$|\alpha-\beta|=1$,求a,b关系式;

(2)若a,b均为负整数,且$|\alpha-\beta|=1$,求$f(x)$的解析式;

(3)若$\alpha<1<\beta<2$,求证:$(x_1+1)(x_2+1)<7$.

强化闯关

1. 已知函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上是增函数,$g(x)=-f(|x|)$,若$g(\lg x)>g(1)$,则x的取值范围是

A. $(\frac{1}{10},10)$ B. $(0,10)$ C. $(10,+\infty)$ D. $(0,\frac{1}{10})\cup(10,+\infty)$

2. 已知$f(1,1)=1$,$f(m,n)\in\mathbf{N}^*(m,n\in\mathbf{N}^*)$,且对任何$m,n\in\mathbf{N}^*$都有:①$f(m,n+1)=f(m,n)+2$;②$f(m+1,n)=2f(m,n)$,给出以下三个结论:(1)$f(1,5)=9$;(2)$f(5,1)=16$;(3)$f(5,6)=26$,其中正确的为______.

3. 已知函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上有定义,对任何实数$a>0$和任何实数x,都有$f(ax)=af(x)$.

(1)证明$f(0)=0$;

(2)证明$f(x)=\begin{cases}kx, & x\geqslant 0,\\ hx, & x<0,\end{cases}$其中$k$和$h$均为常数;

(3)当(2)中的$k>0$时,设$g(x)=\frac{1}{f(x)}+f(x)(x>0)$,讨论$g(x)$在$(0,+\infty)$内的单调性并求极值.

参考答案

【拓展】

1. $[2,3]$ 由$|x^2-3x+4-2x+3|=|x^2-5x+7|\leqslant 1$,得$2\leqslant x\leqslant 3$,所以当函数$y=x^2-3x+4$与函数$y=2x-3$在区间$[a,b]$上是接近的时候,该区间可以是$[2,3]$.

2. 由条件可得$a=2$,$\therefore f'(x)=2x-\frac{2}{x}$,$g(x)=x-2\sqrt{x}$.

构造函数$\varphi(x)=f(x)-g(x)-3=x^2-2\ln x-x+2\sqrt{x}-3(x>0)$,

$\therefore \varphi'(x)=2x-\frac{2}{x}-1+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x}(\sqrt{x}-1)[2x^{\frac{3}{2}}+2x+\sqrt{x}+2]$,

$\therefore$ 当$x\in(1,+\infty)$时,$\varphi'(x)>0$,即φ在$(1,+\infty)$上单调递增,

又$\because \varphi(1)=-1$,$\varphi(\mathrm{e})=\mathrm{e}^2-2-\mathrm{e}+2\sqrt{\mathrm{e}}-3>2.5^2-2-3+2\sqrt{2.25}-3=1.25>0$,

$\therefore \varphi(1)\varphi(\mathrm{e})<0$,$\therefore$ 必存在$x_0\in(1,\mathrm{e})$,使$\varphi(x_0)=0$,

又 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore x=x_0$ 是其方程的惟一实数根.

3. (1) 由 $f(x)=ax^2+bx+c$，得 $f'(x)=2ax+b$.

由已知得 $\begin{cases}|c|=1,\\ b=0,\\ a+b+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=0,\\ c=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1,\\ b=0,\\ c=1,\end{cases}$

又 $\because a>0$，$\therefore f(x)=x^2-1$.

(2) $\because f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2$，$|f(x_2)-f(x_1)|=|(x_2+x_1)\cdot(x_2-x_1)|=|(x_2+x_1)|\cdot|(x_2-x_1)|$.

由 $x_1,x_2\in[0,1]$，得 $0\leqslant x_1+x_2\leqslant 2$，

$\therefore |f(x_2)-f(x_1)|=(x_1+x_2)|x_1-x_2|\leqslant 2|x_1-x_2|$.

4. (1) $f(x)=x$ 即 $ax^2+3x+b=0$，由题意得 $\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{3}{a},\\ \alpha\beta=\dfrac{b}{a},\\ |\alpha-\beta|=1,\end{cases}$ 消去 α,β 得 $a^2+4ab=9$.

(2) 由于 a,b 都是负整数，故 $a+4b$ 也是负整数，且 $a+4b\leqslant -5$，由 $a^2+4ab=9$ 得 $a(a+4b)=9$，$\therefore a=-1$，$a+4b=-9$，$\therefore a=-1$，$b=-2$，$\therefore f(x)=-x^2+4x-2$.

(3) 令 $g(x)=ax^2+3x+b$，则 $\alpha<1<\beta<2$ 的充要条件为：$\begin{cases}g(1)>0,\\ g(2)<0,\end{cases}$ 即：

$\begin{cases}g(1)=a+b+3>0,\\ g(2)=4a+b+6<0,\end{cases}$ 又 $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{4}{a},\\ x_1x_2=\dfrac{b}{a},\end{cases}$

$\therefore (x_1+1)(x_2+1)-7=x_1x_2+(x_1+x_2)-6=\dfrac{b}{a}-\dfrac{4}{a}-6=\dfrac{-6a+b-4}{a}=\dfrac{\frac{10}{3}g(1)-\frac{7}{3}g(2)}{a}$,

$\because g(1)>0$，$g(2)<0$，$a<0$，$\therefore (x_1+1)(x_2+1)-7<0$，即：$(x_1+1)(x_2+1)<7$.

【强化闯关】

1. A　依题意知函数 $g(x)$ 是偶函数，在 $[0,+\infty)$ 上是减函数，在 $(-\infty,0]$ 上是增函数，所以当 $\lg x\geqslant 0$ 时，应有 $\lg x<1$，得 $1\leqslant x<10$；当 $\lg x<0$ 时，应有 $\lg x>-1$，得 $\dfrac{1}{10}<x<1$，所以 x 的取值范围是 $(\dfrac{1}{10},10)$.

2. (1)(2)(3)　由于 $f(1,5)=f(1,4)+2=f(1,3)+4=f(1,2)+6=f(1,1)+$

$8=1+8=9$,$f(5,1)=2f(4,1)=4f(3,1)=8f(2,1)=16f(1,1)=16$,$f(5,6)=f(5,1)+10=26$,所以三个全正确.

3.(1)令 $x=0$,则 $f(0)=af(0)$,$\because a>0$,$\therefore f(0)=0$.

(2)① 令 $x=a$,$\because a>0$,$\therefore x>0$,则 $f(x^2)=xf(x)$.

假设 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=kx(k\in\mathbf{R})$,则 $f(x^2)=kx^2$,而 $xf(x)=x\cdot kx=kx^2$,$\therefore f(x^2)=xf(x)$,即 $f(x)=kx$ 成立.

② 令 $x=-a$,$\because a>0$,$\therefore x<0$,$f(-x^2)=-xf(x)$,

假设 $x<0$ 时,$f(x)=hx(h\in\mathbf{R})$,则 $f(-x^2)=-hx^2$,而 $-xf(x)=-x\cdot hx=-hx^2$,

$\therefore f(-x^2)=-xf(x)$,即 $f(x)=hx$ 成立,$\therefore f(x)=\begin{cases}kx, x\geqslant 0,\\ hx, x<0\end{cases}$ 成立.

(3)当 $x>0$ 时,$g(x)=\dfrac{1}{f(x)}+f(x)=\dfrac{1}{kx}+kx$,$g'(x)=-\dfrac{1}{kx^2}+k=\dfrac{k^2x^2-1}{kx^2}$,

令 $g'(x)=0$,得 $x^2=\dfrac{1}{k^2}$,$\because x>0$,$k>0$,$\therefore x=\dfrac{1}{k}$;

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{k}\right)$ 时,$g'(x)<0$,$\therefore g(x)$ 是单调递减函数;

当 $x\in\left(\dfrac{1}{k},+\infty\right)$ 时,$g'(x)>0$,$\therefore g(x)$ 是单调递增函数;

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{1}{k}$ 时,函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内取得极小值,极小值为 $g\left(\dfrac{1}{k}\right)=2$.

热点 2　导数的应用

热点诠释

导数的应用主要包括以下几个方面:

(1)利用导数研究函数的单调性和单调区间;

(2)利用导数研究函数的极值和最值;

(3)利用导数研究曲线的切线问题;

(4)利用导数研究不等式的证明;

(5)利用导数研究方程的根.

随着新课程高考改革的不断深入,导数的应用正日益成为高考命题的热点内容.首先,导数的应用在高考中的要求在逐步提高,由原来要求的了解层面提高到了理解层面;其次,涉及导数应用的试题难度在逐步加大,由原来的容易题、中档题提升为中档题、难题.

在近几年全国各地的高考试卷中有关导数应用的试题在试卷中占的比重都很

大,且大多以解答题的形式出现.在试题中导数成为高考命题的一个重要载体,通过导数实现了函数与不等式、方程、解析几何等多个知识点的交汇.在求解导数应用方面的试题时,渗透着各种重要的数学思想方法,如:数形结合、分类讨论、等价转化等的运用.所以,导数的应用是高考的一个热点,在复习中应引起足够重视.

典例调研

题型一　利用导数研究函数的单调性

【调研1】　若函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2-2x$ 存在单调递减区间,求实数 a 的取值范围.

分析　函数 $f(x)$ 存在单调递减区间,就是不等式 $f'(x)\leqslant 0$ 有解,考虑到函数的定义域为 $(0,+\infty)$,所以就是要求不等式 $f'(x)\leqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解.

解析　由于 $f'(x)=\frac{1}{x}-ax-2=-\frac{ax^2+2x-1}{x}$.因为函数 $f(x)$ 存在单调递减区间,所以 $f'(x)\leqslant 0$ 有解.又因为函数的定义域为 $(0,+\infty)$,则 $ax^2+2x-1\geqslant 0$ 应有 $x>0$ 的解.

① 当 $a>0$ 时,$y=ax^2+2x-1$ 为开口向上的抛物线,$ax^2+2x-1\geqslant 0$ 总有 $x>0$ 的解;

② 当 $a<0$ 时,$y=ax^2+2x-1$ 为开口向下的抛物线,而 $ax^2+2x-1\geqslant 0$ 总有 $x>0$ 的解,则 $\Delta=4+4a>0$,且方程 $ax^2+2x-1=0$ 至少有一正根.此时,$-1<a<0$;

③ 当 $a=0$ 时,显然符合题意.综上所述,a 的取值范围为 $(-1,+\infty)$.

【技巧点拨】　一般地,涉及到函数(尤其是一些非常规函数)的单调性问题,往往可以借助导数这一重要工具进行求解.函数在定义域内存在单调区间,就是不等式 $f'(x)\geqslant 0$ 或 $f'(x)\leqslant 0$ 在定义域内有解.这样,就把问题转化为了不等式问题.

【误点警示】　本题在解答时很容易忽视函数的定义域这一限制条件,即在解答时只是要求不等式 $f'(x)\leqslant 0$ 有解,而不是在 $(0,+\infty)$ 上有解,从而导致错误.在研究函数的有关性质时一定要注意优先考虑定义域.

拓展1　若函数 $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$ 在区间 $(m,2m+1)$ 上是单调递增函数,求实数 m 的取值范围.

题型二　利用导数研究函数的极值和最值

【调研2】　已知函数 $f(x)=-x^3+3x^2+9x+m$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值是20,函数 $g(x)=x^3-3a^2x-2a$.

(1) 求实数 m 的值;

(2) 是否存在实数 $a \geqslant 1$,使得对任意的 $x_1 \in [-2,2]$,总存在 $x_0 \in [0,1]$,都有 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立?若存在,求出 a 的取值范围;若不存在,说明理由.

分析　对于(2),可先由(1)求出函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的值域,则问题转化为:是否存在实数 $a \geqslant 1$,使 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的值域是函数 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的值域的子集,这样利用导数分别求出两个函数的值域,建立关于 a 的不等式组即可求解.

解析　(1) $\because f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$,令 $f'(x) < 0$,解得 $x < -1$ 或 $x > 3$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1)$,$(3, +\infty)$,递增区间是 $(-1,3)$.

又 $\because f(-2) = 8 + 12 - 18 + m = 2 + m$,$f(2) = -8 + 12 + 18 + m = 22 + m$,$\therefore f(2) > f(-2)$.

$\because$ 在 $(-1,3)$ 上 $f'(x) > 0$,$\therefore f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上单调递增,

又 $\because f(x)$ 在 $[-2, -1]$ 上单调递减,$\therefore f(2)$ 和 $f(-1)$ 分别是 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值和最小值,于是有 $22 + m = 20$,解得 $m = -2$.

(2) 由(1)可以解得函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的值域是 $[-7,20]$.

$g'(x) = 3x^2 - 3a^2$,由于 $a \geqslant 1$,所以当 $x \in [0,1]$ 时,$g'(x) \leqslant 0$,因此当 $x \in [0, 1]$ 时,函数 $g(x)$ 为减函数,从而当 $x \in [0,1]$ 时,$g(x) \in [g(1), g(0)]$,

又 $g(1) = 1 - 2a - 3a^2$,$g(0) = -2a$,即当 $x \in [0,1]$ 时,有 $g(x) \in [1 - 2a - 3a^2, -2a]$.

若对任意的 $x_1 \in [-2,2]$,总存在 $x_0 \in [0,1]$,都有 $g(x_0) = f(x_1)$,则应有 $[1 - 2a - 3a^2, -2a] \supseteq [-7,20]$,即 $\begin{cases} 1 - 2a - 3a^2 \leqslant -7, \\ -2a \geqslant 20, \end{cases}$ 解得 $a \leqslant -10$,但由于 $a \geqslant 1$,所以不存在这样的实数 a.

【方法探究】　本题属于探索性问题,其一般解法思路是先假设符合条件的参数存在,然后综合考虑题目的各个条件,若各个条件之间不矛盾,则参数存在,若条件之间矛盾,则参数不存在. 本题的第(2)问要特别注意 a 的取值范围应首先满足前提条件 $a \geqslant 1$,如忽视这一条件,将得出错误结果.

拓展 2　已知函数 $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$,$g(x) = ax^2 + x - 8$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 若对任意的 $x \in [0, +\infty)$ 都有 $f(x) \geqslant g(x)$,求实数 a 的取值范围.

题型三　利用导数研究曲线的切线问题

【调研 3】　已知函数 $f(x) = -\ln x$,$x \in (0,e)$. 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(t, f(t))$ 处的切线与 x 轴和 y 轴分别交于 A、B 两点,设 O 为坐标原点,求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

分析　利用导数的几何意义,函数在一点处的导数值,就是函数图像在该点处的切线的斜率,求得切线方程后便可得到 $\triangle AOB$ 面积的表达式,然后再求其最大值.

解析　(1) 由已知 $f'(x)=-\frac{1}{x}$,所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(t,f(t))$ 处的切线方程为 $y+\ln t=-\frac{1}{t}(x-t)$,令 $y=0$,得 A 点的横坐标为 $x_A=t(1-\ln t)$,令 $x=0$,得 B 点的纵坐标为 $y_B=1-\ln t$,当 $t\in(0,e)$ 时,$x_A>0$,$y_B>0$,此时 $\triangle AOB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}t(1-\ln t)^2$,$S'=\frac{1}{2}(\ln t-1)(\ln t+1)$,解 $S'>0$,得 $0<t<\frac{1}{e}$ 解 $S'<0$,得 $\frac{1}{e}<t<e$. 所以 $(0,\frac{1}{e})$ 是函数 $S=\frac{1}{2}t(1-\ln t)^2$ 的增区间;$(\frac{1}{e},e)$ 是函数的减区间. 所以,当 $t=\frac{1}{e}$ 时,$\triangle AOB$ 的面积最大,最大值为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{e}(1-\ln\frac{1}{e})^2=\frac{2}{e}$.

【前沿考向】　利用导数求曲线的切线方程,几乎是新课程高考每年必考的内容. 既有可能出现在选择、填空题中,也有可能出现在解答题中. 在这类问题中,导数所担负的任务是求其切线的斜率,这类问题核心部分是考查函数的思想方法和解析几何的基本思想方法.

拓展 3　已知函数 $f(x)=x^3+x-16$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,-6)$ 处的切线的方程;

(2) 直线 l 为曲线 $y=f(x)$ 的切线,且经过原点,求直线 l 的方程及切点坐标.

题型四　利用导数研究不等式的证明问题

【调研 4】　将函数 $y=\ln x-2$ 的图像按向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$ 平移得到函数 $y=f(x)$ 的图像,求证:当 $x>0$ 时,$f(x)>\frac{2x}{x+2}$.

分析　先求出函数 $y=f(x)$ 的解析式,然后构造函数通过函数的单调性证明不等式.

解析　将函数 $y=\ln x-2$ 的图像按向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$ 平移得到函数 $y=f(x)=\ln(x+1)$. 令 $g(x)=f(x)-\frac{2x}{x+2}$,则 $g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2}=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$,因为 $x>0$,所以 $g'(x)>0$,即函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调递增函数,于是有 $g(x)>g(0)=0$,即 $f(x)-\frac{2x}{x+2}>0$,因此有 $f(x)>\frac{2x}{x+2}$.

【方法探究】　利用导数证明不等式也是导数应用的一个重要方面,这类问题一般需要根据欲证不等式构造一个函数,然后考查这个函数的单调性,结合给定区间和函数在区间端点的函数值进行证明.

拓展 4 **求证:在区间$(1,+\infty)$上,函数$f(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x$的图像总是在函数$g(x)=\frac{2}{3}x^3$图像的下方.**

题型五 利用导数研究方程的根

【调研 5】 **设a为实数,函数$f(x)=-x^3+3x+a$.**

(1)求$f(x)$的极值;

(2)当a为何值时,方程$f(x)=0$恰好有两个实数根.

分析 **方程$f(x)=0$的实数根就是函数$f(x)$的图像与x轴的交点.由此可以通过分析函数的单调性和图像特征进行求解.**

解析 **(1)令$f'(x)=-3x^2+3=0$得$x_1=-1,x_2=1$.又因为当$x\in(-\infty,-1)$时,$f'(x)<0$;当$x\in(-1,1)$时,$f'(x)>0$;$x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)<0$,所以$f(x)$的极小值为$f(-1)=a-2$;$f(x)$的极大值为$f(1)=a+2$.**

(2)因为$f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减,且当$x\to-\infty$时,$f(x)\to+\infty$;又$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减,且当$x\to+\infty$时,$f(x)\to-\infty$;而$a+2>a-2$,即函数的极大值大于极小值,所以当极大值等于0时,有极小值小于0,此时曲线$f(x)$与x轴恰有两个交点,即方程$f(x)=0$恰好有两个实数根,所以$a+2=0,a=-2$;当极小值等于0时有极大值大于0,此时曲线$f(x)$与x轴恰有两个交点,即方程$f(x)=0$恰好有两个实数根,所以$a-2=0,a=2$.综上,当$a=\pm2$时方程恰有两个实数根.

【方法探究】 **研究方程根的问题可以转化为研究相应函数的图像问题.一般地,方程$f(x)=0$的根就是函数$f(x)$图像与x轴交点的横坐标,方程$f(x)=g(x)$的根就是函数$f(x)$与$g(x)$图像交点的横坐标.事实上利用导数不仅能判断函数的单调性,研究函数的极值和最值情况,还能在此基础上画出函数的大致图像,得到函数图像与x轴的交点或两个函数图像的交点的条件,从而为研究方程的根提供方便,所以在解决方程的根的问题中,要善于运用导数的方法进行求解.**

拓展 5 **已知函数$f(x)=\ln x,g(x)=x$.**

(1)若$x>1$,求证:$f(x)>2g\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$;

(2)是否存在实数k,使得方程$\frac{1}{2}g(x^2)-f(1+x^2)=k$有四个不同的实数根?若存在,求出$k$的取值范围;若不存在,说明理由.

热点聚焦

强化闯关

1. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\ln x$，则有

A. $f(2)<f(e)<f(3)$　　B. $f(e)<f(2)<f(3)$

C. $f(3)<f(e)<f(2)$　　D. $f(e)<f(3)<f(2)$

2. 若函数 $g(x)=x^3-ax^2+1$ 在区间 $[1,2]$ 上是单调递减函数，则实数 a 的取值范围是

A. $a\geqslant 3$　　B. $a>3$　　C. $\frac{3}{2}<a<3$　　D. $\frac{3}{2}\leqslant a\leqslant 3$

3. 已知函数 $f(x)=-x^2+ax$，$g(x)=x^3$，方程 $f(x)=0$ 的一个根是 6.

(1) 求函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图像在第一象限内的交点 A 的坐标；

(2) 若直线 $x=t(0<t<2)$ 与函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图像的交点分别是 M、N，试求当 t 取何值时线段 MN 的长度取得最大值；

(3) 已知函数 $f(x)$ 图像在 M 点处的切线为 l_1，$g(x)$ 的图像在 N 点处的切线为 l_2，若 l_1、l_2 与 x 轴的交点分别为 P、Q，试求 P、Q 两点之间距离的取值范围.

参考答案

【拓展】

1. 由于 $f'(x)=\frac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$，令 $f'(x)>0$，解得 $-1<x<1$，即函数 $f(x)$ 的增区间是 $[-1,1]$，又 $f(x)$ 在区间 $(m,2m+1)$ 上是单调递增函数，所以应有 $\begin{cases}m\geqslant -1,\\2m+1\leqslant 1,\\m<2m+1,\end{cases}$ 解得 $-1<m\leqslant 0$.

2. (1) $f'(x)=3x^2+4x+1$，令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=-1$ 或 $x_2=-\frac{1}{3}$，

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增函数	极大值	减函数	极小值	增函数

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 取得极大值为 -4 当 $x=-\frac{1}{3}$ 时，$f(x)$ 取得极小值为 $-\frac{112}{27}$.

(2) 设 $F(x)=f(x)-g(x)=x^3+(2-a)x^2+4$，

$\because F(x)\geqslant 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立 $\Rightarrow F(x)_{\min}\geqslant 0$，$x\in[0,+\infty)$，

若 $2-a\geqslant 0$，显然 $F(x)_{\min}=4>0$，若 $2-a<0$，$F'(x)=3x^2+(4-2a)x$，

令 $F'(x)=0$，解得 $x=0, x=\frac{2a-4}{3}$.

当 $0<x<\frac{2a-4}{3}$ 时，$F'(x)<0$，当 $x>\frac{2a-4}{3}$ 时，$F'(x)>0$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$F(x)_{\min}=F(\frac{2a-4}{3})\geqslant 0$，

即 $(\frac{2a-4}{3})^3-(a-2)(\frac{2a-4}{3})^2+4\geqslant 0$，

解不等式得 $a\leqslant 5$，$\therefore 2<a\leqslant 5$.

当 $x=0$ 时，$F(x)=4$ 满足题意. 综上所述 a 的取值范围为 $(-\infty,5]$.

3. (1) $\because f'(x)=(x^3+x-16)'=3x^2+1$，$\therefore$ 在点 $(2,-6)$ 处的切线的斜率 $k=f'(2)=3\times 2^2+1=13$，

$\therefore$ 切线的方程为：$y=13(x-2)+(-6)$，即 $y=13x-32$.

(2) 设切点为 (x_0,y_0)，则直线 l 的斜率为 $f'(x_0)=3x_0^2+1$，$\therefore$ 直线 l 的方程为：$y=(3x_0^2+1)(x-x_0)+x_0^3+x_0-16$.

又 $\because$ 直线 l 过点 $(0,0)$，$\therefore 0=(3x_0^2+1)(-x_0)+x_0^3+x_0-16$，整理得 $x_0^3=-8$，$\therefore x_0=-2$，

$\therefore y_0=(-2)^3+(-2)-16=-26$，$k=3\times(-2)^2+1=13$，

$\therefore$ 直线 l 的方程为：$y=13x$，切点坐标为 $(-2,-26)$.

4. 要证明在区间 $(1,+\infty)$ 上，函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x$ 的图像总是在函数 $g(x)=\frac{2}{3}x^3$ 图像的下方，只需证明在区间 $(1,+\infty)$ 上，$f(x)<g(x)$ 恒成立即可，从而可构造函数 $F(x)=f(x)-g(x)$，只需证明 $F(x)<0$ 即可.

令 $F(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x-\frac{2}{3}x^3$，则 $F'(x)=x+\frac{1}{x}-2x^2=\frac{x^2+1-2x^3}{x}=\frac{(1-x)(1+x+2x^2)}{x}$，

由于 $x>1$，所以 $F'(x)<0$，即函数 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调递减函数，

又因为 $F(1)=-\frac{1}{6}<0$，所以当 $x>1$ 时，$F(x)<F(1)<0$，因此 $f(x)<g(x)$，

即函数 $f(x)$ 的图像总是在 $g(x)$ 图像的下方.

5. (1) 令 $F(x)=f(x)-2g(\frac{x-1}{x+1})=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$，

则 $F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2(x+1)-2(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$，

由 $x>1$,得 $F'(x)>0$,故 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数.

又因为 $F(x)$ 在 $x=1$ 处连续,得 $F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数,而 $x>1$,所以 $F(x)>F(1)=0$,

即有 $f(x)>2g(\frac{x-1}{x+1})$.

(2) 由原方程得 $\frac{1}{2}x^2-\ln(1+x^2)=k$,①

令 $t=x^2$,则原方程变形为 $\frac{1}{2}t-\ln(1+t)=k$,即 $\frac{1}{2}t-k=\ln(1+t)$,②

令 $y_1=\frac{1}{2}t-k$,$y_2=\ln(1+t)$,它们的图像如下:

当两条曲线在 $t=t_0$ 处相切时,由 $y_1'=\frac{1}{2}$,$y_2'=\frac{1}{1+t}$,得 $\frac{1}{2}=\frac{1}{1+t_0}$,于是 $t_0=1$,

得切点为 $(1,\ln 2)$,这时切线方程是 $y_1-\ln 2=\frac{1}{2}(t-1)$,得 $y_1=\frac{1}{2}t+(\ln 2-\frac{1}{2})$,与 y 轴的交点为 $(0,\ln 2-\frac{1}{2})$,要使两曲线在 y 轴右边有两个不同交点,则 $\frac{1}{2}-\ln 2<k<0$,所以当 $\frac{1}{2}-\ln 2<k<0$ 时原方程有四个不同实根.

【强化闯关】

1. A　在 $(0,+\infty)$ 上 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{x}>0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增函数,所以有 $f(2)<f(\mathrm{e})<f(3)$.

2. A　$g'(x)=3x^2-2ax$,由于函数 $g(x)=x^3-ax^2+1$ 在区间 $[1,2]$ 上是单调递减函数,所以 $g'(x)\leqslant 0$ 在区间 $[1,2]$ 上成立,所以得 $a\geqslant\frac{3}{2}x$,而 $\frac{3}{2}x$ 在 $[1,2]$ 上的最大值等于 3,所以 $a\geqslant 3$.

3. (1) 方程 $f(x)=0$ 即 $-x^2+ax=0$,它有一个根 6,所以得 $a=6$,这样 $f(x)=-x^2+6x$.

由 $\begin{cases}y=-x^2+6x,\\ y=x^3,\end{cases}$ 得 $x^3=-x^2+6x$,解得 $x=0,2,-3$.

当 $x=2$ 时得 $y=8$,所以函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图像在第一象限内的交点 A 的坐标是 $(2,8)$.

(2) 依题意得线段 MN 的长度 $|MN|=(-t^2+6t)-t^3=-t^3-t^2+6t$,

设 $h(t)=-t^3-t^2+6t$,则 $h'(t)=-3t^2-2t+6$,令 $h'(t)=0$,得 $t=\frac{-1\pm\sqrt{19}}{3}$,

由于 $0<t<2$,所以取 $t=\frac{-1+\sqrt{19}}{3}$,

当 $0<t<\frac{-1+\sqrt{19}}{3}$ 时,$h'(t)>0$,当 $\frac{-1+\sqrt{19}}{3}<t<2$ 时,$h'(t)<0$,所以当 $t=\frac{-1+\sqrt{19}}{3}$ 时,函数 $h(t)$ 取得最大值.

即当 $t=\frac{-1+\sqrt{19}}{3}$ 时,线段 MN 的长度取得最大值.

(3) 由于 $M(t,-t^2+6t)$,$f'(x)=-2x+6$,所以函数 $f(x)$ 图像在 M 点处的切线 l_1 的斜率为 $-2t+6$,于是 l_1 的方程为 $y-(-t^2+6t)=(-2t+6)(x-t)$,令 $y=0$ 得 $x_P=\frac{t^2-6t}{6-2t}+t=\frac{t^2}{2t-6}$;

同理,$N(t,t^3)$,$g'(x)=3x^2$,所以 l_2 的方程为 $y-t^3=3t^2(x-t)$,令 $y=0$,得 $x_Q=\frac{2t}{3}$. 所以 $|PQ|=|x_Q-x_P|=|\frac{2t}{3}-\frac{t^2}{2t-6}|=|\frac{t^2-12t}{6(t-3)}|=|\frac{1}{6}\cdot[(t-3)-\frac{27}{t-3}-6]|$,

因为 $0<t<2$,所以 $-3<t-3<-1$,于是可得 $\frac{1}{6}\cdot[(t-3)-\frac{27}{t-3}-6]\in(0,\frac{10}{3})$,故 P、Q 两点之间距离的取值范围是 $(0,\frac{10}{3})$.

热点聚焦

原创题探讨

在本部分中，我们针对本辑调研的内容，结合高考命题的趋势，精心选编了关于集合、复数、函数、导数等方面的四个原创题. 考虑到高考试题在对集合和复数的考查中注重基础、善于创新的特点，我们选编了与集合和复数内容相关的信息迁移题，并给出了各种变式，目的是为了让同学们熟悉这类问题的解法，并通过解答这些问题，培养运用分类讨论的数学思想方法的意识；鉴于函数内容的重要性和高考对导数考查的不断加强，我们选编了两个函数与导数应用方面的问题，重点训练同学们利用导数研究抽象函数单调性和函数综合问题的能力. 通过对这几个原创题的研做，你一定会有所收获，有所领悟.

调研1　**已知非空集合S，A是S的一个非空子集，若当$x\in A$时，有$x-1\notin A$，且$x+1\notin A$，则称x为A的一个"孤立元素".**

(1) 若$S=\{0,1,2,3,4\}$，求S的含有两个元素的有"孤立元素"的子集的个数，并写出这些子集；

(2) 若$S=\{0,1,2,3,4\}$，求S的无"孤立元素"的三元子集的个数，并写出这些子集.

分析　可以先将含有两个元素和三个元素的子集写出来，然后按照"孤立元素"的定义，将子集中含有"孤立元素"和不含有"孤立元素"的子集找出来.

解析　(1) S中共有5个元素，含有2个元素的子集共有$C_5^2=10$，它们分别是：$\{0,1\}$，$\{0,2\}$，$\{0,3\}$，$\{0,4\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{1,4\}$，$\{2,3\}$，$\{2,4\}$，$\{3,4\}$. 其中只有$\{0,1\}$，$\{1,2\}$，$\{2,3\}$，$\{3,4\}$，这4个子集中不含"孤立元素"，其余的6个都含"孤立元素"，它们是：$\{0,2\}$，$\{0,3\}$，$\{0,4\}$，$\{1,3\}$，$\{1,4\}$，$\{2,4\}$.

(2) S中含有3个元素的子集共有$C_5^3=10$个，若S的子集A的元素由相邻数字构成，则这些元素都不是"孤立元素"，所以这样的子集不含"孤立元素"，有$\{0,1,2\}$，$\{1,2,3\}$，$\{2,3,4\}$，其余的三元子集都含有"孤立元素"，它们是：$\{0,1,3\}$，$\{0,1,4\}$，$\{0,2,3\}$，$\{0,2,4\}$，$\{0,3,4\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,3,4\}$.

【变式1】　**若$S=\{0,1,2,3,4\}$，求S的四元子集中有"孤立元素"的个数，并写出.**

思路　由于集合中元素个数不是很多，其四元子集的个数也不多，故可以将其四元子集全部写出来，然后根据"孤立元素"的定义，对每一个集合进行分析，研究其

是否含有“孤立元素”,从而得到结果.

【变式2】 若令 $S=\{0,1,2,3,4,5\}$,试问 S 的非空子集中,有没有元素全是“孤立元素”的子集?若有,求出个数,写出子集;若没有,说明理由.

思路 由于题目中没有指定子集中元素的个数,所以应对集合 S 的全部非空子集都进行分析,所以采用分类讨论的方法,对集合 S 的单元素子集、两个元素、三个元素、四个元素、五个元素、六个元素的子集一一进行分析,当然在分析过程中,还可以根据前面得到的规律,研究一个子集中具有“孤立元素”的条件,从而得到问题的答案.

【点评】 在本例中,我们首先给出了关于集合元素的一个新定义“孤立元素”,然后给出了具体的集合来解决一些具体的问题,这实质就是通常所说的“信息迁移题”.解决这类问题的思维策略是先弄清楚新给出的定义,找出这个新定义用到的旧知识或和旧知识之间的联系,然后用学过的知识来解决新问题.

在近几年的高考试题中,对集合的考查一般以集合的概念和运算为主,而在集合概念的考查中经常出现这类“信息迁移题”,是热点题型.

这类问题虽然情境新颖,但考查的仍然是基础知识,考查学生对基本知识的掌握情况,只要对新给出的定义仔细分析,就不难找到解决问题的突破口.

调研2 已知 z_1,z_2 是复数,定义复数的一种运算“$\otimes$”为:$z_1\otimes z_2=\begin{cases}z_1z_2, & |z_1|>|z_2|,\\ z_1+z_2, & |z_1|\leq|z_2|\end{cases}$.当 $z_1=3-\mathrm{i}$,$z_2=2+3\mathrm{i}$ 时,求 $z_1\otimes z_2$.

分析 按照题目给出的定义,先判断 $|z_1|$ 与 $|z_2|$ 的大小,再进行相应的计算.

解析 当 $z_1=3-\mathrm{i}$,$z_2=2+3\mathrm{i}$ 时,$|z_1|=\sqrt{10}$,$|z_2|=\sqrt{13}$,所以 $|z_1|<|z_2|$,因此 $z_1\otimes z_2=z_1+z_2=3-\mathrm{i}+2+3\mathrm{i}=5+2\mathrm{i}$.

【变式1】 已知 z_1,z_2 是复数,定义复数的一种运算“$\otimes$”为:$z_1\otimes z_2=\begin{cases}z_1z_2, & |z_1|>|z_2|,\\ z_1+z_2, & |z_1|\leq|z_2|\end{cases}$,若 $z_1=2+\mathrm{i}$ 且 $z_1\otimes z_2=3+4\mathrm{i}$,求复数 z_2.

思路 由于 z_1,$z_1\otimes z_2$ 已知,所以该问题是上述问题的逆问题,可以先设出 z_2,然后分两种情况分别进行求解.

【变式2】 已知 z_1,z_2 是复数,定义复数的一种运算“$\otimes$”为:$z_1\otimes z_2=\begin{cases}z_1z_2, & |z_1|>|z_2|,\\ z_1+z_2, & |z_1|\leq|z_2|\end{cases}$,是否存在复数 z,使得 $(1+2\mathrm{i})\otimes z$ 为纯虚数,而 $z\otimes(1+2\mathrm{i})$ 是实数?若存在,求出复数 z,若不存在,说明理由.

思路 这是探索性问题,其一般解法是假设符合条件的复数存在,然后以此为条件,进行求解,若能得出相应的复数 z,且没有矛盾,就说明符合条件的复数存在;若

在解题过程中出现矛盾或解不出相应的复数,则说明符合条件的复数不存在.

【点评】 在本题中通过给出的复数的一种新的运算,重点考查了复数的有关概念如:复数、纯虚数等以及复数的加法运算、乘法运算、模的运算等等.

在近几年的高考中,对复数的考查一直注重对复数的概念、复数运算以及复数几何意义的考查,因此对这类问题的解决需要熟练掌握复数的相关概念,复数的运算法则等.

本题中设计的几个变式题目各有特点,变式1是原问题的一个逆问题,由于$|z_2|$的大小未知,所以应对其进行讨论,按照它的模与已知复数模的大小关系选择相应的运算式.变式2则是探索性问题,除了运用探索性问题的一般解法外,也要进行分类讨论.

调研3 已知函数$f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$,且当$x>0$时,满足$\frac{f(x)}{x}>f'(x)$.

(1)判断函数$y=\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上的单调性;

(2)当$m>0,k>0$且$k\neq1$时比较$kf(m)$与$f(km)$的大小.

分析 考虑到函数$y=\frac{f(x)}{x}$是一个抽象函数,且条件中已经出现了导数,故可以考虑用导数研究函数的单调性,在此基础上比较函数值的大小.

解析 (1)由于$y'=[\frac{f(x)}{x}]'=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)\cdot x'}{x^2}=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.又因为$\frac{f(x)}{x}>f'(x)$,所以当$x>0$时,$f(x)>xf'(x)$,故$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$,即$y'<0$,因此函数$y=\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上是单调递减函数.

(2)由(1)知,若$k>1$,则$km>m$,而函数$y=\frac{f(x)}{x}$是单调递减函数,则$\frac{f(km)}{km}<\frac{f(m)}{m}$,即得$kf(m)>f(km)$若$0<k<1$,则$km<m$,因此$\frac{f(km)}{km}>\frac{f(m)}{m}$,即得$kf(m)<f(km)$.综上所述,当$k>1$时,$kf(m)>f(km)$当$0<k<1$时,$kf(m)<f(km)$.

【变式1】 已知函数$f(x)$的定义域是R,且满足$f'(x)>1$,试比较$f(a)-f(b)$与$a-b$的大小.

思路 要比较大小,仍然是从函数的单调性入手,考虑到条件$f'(x)>1$,结合要比较的式子$f(a)-f(b)$与$a-b$,可考虑研究函数$f(x)-x$的单调性.

【变式2】 已知$f(x),g(x)$分别是定义在R上的奇函数和偶函数,且当$x<0$时有$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0,g(-4)=0$,则不等式$f(x)g(x)<0$的解集是______.

思路 从题目的条件$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$入手,可以得到函数$f(x)g(x)$

的单调性，然后再借助其奇偶性求解不等式.

【变式3】 已知$f(x)$，$g(x)$是定义在区间$[a,b]$上的可导函数，且$g(x)>0$，$f(x)g'(x)-f'(x)g(x)<0$，当$c\in[a,b]$时，给出下列不等式：①$f(a)g(b)>f(b)g(a)$；②$f(a)g(c)<f(c)g(a)$；③$f(c)g(b)>f(b)g(c)$；④$f(a)g(a)>f(b)g(b)$，其中正确的个数是

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

思路　看到条件$f(x)g'(x)-f'(x)g(x)<0$，应联想到函数$\dfrac{f(x)}{g(x)}$的导数与之非常接近，所以构造函数$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，通过其导数得出单调性，再根据单调性检验各个不等式是否正确.

【点评】 本例及其几个变式主要考查了利用导数研究函数的单调性问题，利用导数研究函数的单调性问题可以说是导数最基本的应用之一，也是高考中考查最多的一个内容，特别是对抽象函数单调性的考查，更是近几年高考的热点题型.

由于这类题目中的式子往往出现明显的特征，即同某两个函数的和、差、积、商的导数公式非常接近，所以熟练掌握导数的四则运算法则是解决这类问题的关键. 在此基础上还要善于对问题进行等价转化，特别是对某些条件关系式进行合理变形，使之与有关公式联系起来.

与单调性紧密相关的就是不等式问题，在充分利用单调性的同时，还要注意对复杂问题进行分类讨论，注意结合函数的图像帮助分析和寻找解题思路.

调研4　已知函数$f(x)=\dfrac{e^x}{x-2}$.

(1) 求$f(x)$的单调区间；

(2) 求$f(x)$图像在与y轴交点处的切线与两坐标轴围成图形面积；

(3) 判断方程$e^x=k(x-2)$的解的情况($k\in\mathbf{R}$).

分析　求函数的单调区间一般可以利用函数的导数来解决，即转化为解不等式$f'(x)>0$和$f'(x)<0$，不等式的解集即为函数的单调区间，但要首先研究函数的定义域；求曲线在某一点处的切线可以利用导数的几何意义；要研究方程根的个数问题，则可以通过函数图像与x轴的交点的个数来分析，要画出函数的大致图像，应从函数的单调性、函数的极值以及函数经过的特殊点等多个方面来考查.

解析　(1)$f'(x)=\dfrac{e^x(x-2)-e^x}{(x-2)^2}=\dfrac{e^x(x-3)}{(x-2)^2}$，因为函数的定义域是$\{x\mid x\neq 2\}$，

令$f'(x)>0$，解得$x>3$；令$f'(x)<0$，解得$x<3$且$x\neq 2$，

所以函数的单调递增区间是$(3,+\infty)$，递减区间是$(-\infty,2)\cup(2,3)$.

(2)$f(x)$ 图像与 y 轴交点设为 M,则 $M(0,-\frac{1}{2})$,由于 $f'(x)=\frac{e^x(x-3)}{(x-2)^2}$,

∴ 切线斜率 $k=f'(0)=-\frac{3}{4}$,

∴ 切线方程为 $\frac{3}{4}x+y+\frac{1}{2}=0$,令 $x=0$,得 $y=-\frac{1}{2}$,令 $y=0$,得 $x=-\frac{2}{3}$,

∴ 围成的三角形面积为 $S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$.

(3) 方程 $e^x=k(x-2)$ 等价于 $\frac{e^x}{x-2}=k(x\neq 2)$,在平面直角坐标系中画出函数 $f(x)$ 的图像,如图 5-1-1,

所以当 $k>e^3$ 时,方程有 2 个根;当 $k=e^3$,方程有 1 个根;当 $0\leqslant k<e^3$ 时,无解;当 $k<0$ 时,方程有 1 个根.

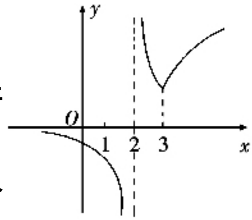


图 5-1-1

【变式 1】 试求 $y=(x^2-3)e^x$ 的极值与最值.

思路 题目中给出的函数不是一个基本初等函数,要求出其极值,一般需要利用导数解决,由于函数定义域是 R,因而在求其最值时,应结合其单调性和图像加以分析,求出其最值.

【变式 2】 若函数 $f(x)=\frac{e^x}{x+a}$ 在 $(-3,2)$ 上单调递减,求实数 a 的取值范围.

思路 所给函数的单调区间已经知道,所以可以先求出原函数的单调递减区间(用参数 a 表示),然后依据题意应有 $(-3,2)$ 是单调区间的子集,据此建立关于参数 a 的不等式,从而求出 a 的取值范围,但一定要注意函数的定义域.

【点评】 在近几年的高考中,导数已经越来越成为一个考查的热点,由于本身所具有的强大的工具作用,导数在函数单调性、极值、最值的研究,曲线切线问题的解决,不等式的证明、恒成立问题,方程根的讨论等问题中都有着重要的应用. 以导数为载体的综合题已经成为高考命题的风向标.

利用导数不仅能判断函数的单调性,研究函数的极值和最值情况,还能在此基础上画出函数的大致图像,得到函数图像与 x 轴的交点或两个函数图像的交点的条件,从而为研究方程的根提供方便,所以在解决方程的根的问题中,要善于运用导数的方法进行求解.

参考答案

【变式】

1.1. 在 S 的四元子集中,若元素全都是由相邻数字构成,则一定无孤立元素,这样的子集有 2 个:{0,1,2,3},{1,2,3,4};另外若这 4 个元素中分为两组,每一组的元素为相邻的两个数字,则也没有"孤立元素",

这样的子集有1个：{0,1,3,4}，故四元子集中有"孤立元素"的共有 $C_5^4-3=2$ 个，即{0,2,3,4}和{0,1,2,4}.

1.2. S 的单元素子集共有6个，显然它们都是元素全为"孤立元素"的子集；含有两个元素的子集共 $C_6^2=15$ 个，其中元素全为"孤立元素"的子集有10个：{0,2}，{0,3}，{0,4}，{0,5}，{1,3}，{1,4}，{1,5}，{2,4}，{2,5}，{3,5}；含有3个元素的子集中，元素全为"孤立元素"的有4个：{0,2,4}，{0,2,5}，{0,3,5}，{1,3,5}；多于4个元素的子集中元素不可能全是"孤立元素".

2.1. 设 $z_2=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$.

(1) 当 $|z_1|>|z_2|$ 时，$z_1\otimes z_2=z_1z_2=(2+i)(x+yi)=3+4i$，所以 $z_2=x+yi=\dfrac{3+4i}{2+i}=2+i$，但这时 $|z_2|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}=|z_1|$，这与 $|z_1|>|z_2|$ 相矛盾，故 $z_2\neq 2+i$.

(2) 当 $|z_1|\leqslant|z_2|$ 时，$z_1\otimes z_2=z_1+z_2=(2+i)+(x+yi)=3+4i$，所以 $z_2=x+yi=(3+4i)-(2+i)=1+3i$，并且这时 $|z_2|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}>|z_1|$，符合条件 $|z_1|\leqslant|z_2|$，故 $z_2=1+3i$.

综上所述，复数 $z_2=1+3i$.

2.2. 假设存在复数 z，使得 $(1+2i)\otimes z$ 为纯虚数，而 $z\otimes(1+2i)$ 是实数，设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$. 由于 $|1+2i|=\sqrt{5}$，所以

(1) 当 $|z|<\sqrt{5}$ 时，根据题意，$(1+2i)\otimes z=(1+2i)z=(1+2i)(x+yi)=(x-2y)+(y+2x)i$ 是纯虚数，所以 $\begin{cases}x-2y=0,\\ y+2x\neq 0.\end{cases}$ ①

又 $z\otimes(1+2i)=z+(1+2i)=(x+yi)+(1+2i)=(x+1)+(y+2)i$ 是实数，所以 $y+2=0$，②

由①②得 $\begin{cases}x=-4,\\ y=-2,\end{cases}$ 所以 $z=-4-2i$，但这时 $|z|=2\sqrt{5}>\sqrt{5}$ 与 $|z|<\sqrt{5}$ 矛盾，故当 $|z|<\sqrt{5}$ 时，符合条件的复数不存在；

(2) 当 $|z|\geqslant\sqrt{5}$ 时，根据题意，$(1+2i)\otimes z=(1+2i)+z=(1+2i)+(x+yi)=(1+x)+(2+y)i$ 是纯虚数，所以 $\begin{cases}x+1=0,\\ y+2\neq 0.\end{cases}$ ①

又 $z\otimes(1+2i)=z(1+2i)=(x+yi)(1+2i)=(x-2y)+(y+2x)i$ 是实数，所以 $y+2x=0$，②

由①②得 $\begin{cases}x=-1,\\ y=2,\end{cases}$ 所以 $z=-1+2i$，这时 $|z|=\sqrt{5}$ 与 $|z|\geqslant\sqrt{5}$ 不矛盾，

故当 $|z| \geqslant \sqrt{5}$ 时,符合条件的复数存在,且 $z=-1+2i$.

3.1. $\because f'(x)>1$,$\therefore f'(x)-1>0$,即 $[f(x)-x]'>0$,$\therefore$ 函数 $g(x)=f(x)-x$ 在 R 上是单调递增函数.

当 $a>b$ 时,$g(a)>g(b)$,即 $f(a)-a>f(b)-b$,得 $f(a)-f(b)>a-b$;

当 $a<b$ 时,$g(a)<g(b)$,即 $f(a)-a<f(b)-b$,得 $f(a)-f(b)<a-b$;

当 $a=b$ 时,$g(a)=g(b)$,即 $f(a)-a=f(b)-b$,得 $f(a)-f(b)=a-b$.

3.2. 若设 $h(x)=f(x)g(x)$,则由 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$ 得 $h'(x)>0$,因此函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数. 又因为 $f(x)$,$g(x)$ 分别为定义在 R 上的奇函数和偶函数,所以 $h(x)$ 是奇函数,故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也是增函数,且 $h(4)=-h(-4)=0$,所以当 $x<-4$ 或 $0<x<4$ 时 $h(x)<0$,即不等式 $f(x)g(x)<0$ 的解集是 $(-\infty,-4)\cup(0,4)$.

3.3. B　设函数 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$,则 $h'(x)=\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$,因为 $g(x)>0$,$f(x)g'(x)-f'(x)g(x)<0$,所以 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)>0$,于是 $h'(x)>0$,因此函数 $h(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是单调递增函数. 又 $c\in[a,b]$,所以 $h(a)<h(c)<h(b)$,即 $\dfrac{f(a)}{g(a)}<\dfrac{f(c)}{g(c)}<\dfrac{f(b)}{g(b)}$,又 $g(x)>0$,所以可得 $f(a)g(b)<f(b)g(a)$;$f(a)g(c)<f(c)g(a)$;$f(c)g(b)<f(b)g(c)$;因此在给出的 4 个不等式中只有 ② 正确. 故选 B.

4.1. $y'=2x\cdot e^x+(x^2-3)e^x=e^x(x^2+2x-3)$,

令 $y'>0$,得 $x>1$ 或 $x<-3$;令 $y'<0$,和 $-3<x<1$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 和 $(1,+\infty)$ 上递增,在 $(-3,1)$ 上递减,因此函数 $f(x)$ 在 $x=-3$ 处取得极大值,极大值等于 $f(-3)=6e^{-3}$;在 $x=1$ 处取得极小值,极小值等于 $f(1)=-2e$.

又由 $y>0$,得 $x>\sqrt{3}$ 或 $x<-\sqrt{3}$;由 $y<0$,得 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$,所以函数的大致图像如图 5-1-2,

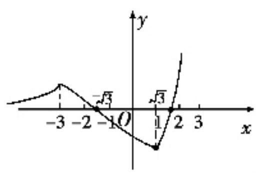


图 5-1-2

从函数图像可得函数 $f(x)$ 的最小值就是函数的极小值 $f(1)=-2e$,而函数无最大值.

4.2. $f'(x)=\dfrac{e^x[x-(1-a)]}{(x+a)^2}$,又函数定义域为 $\{x\mid x\neq -a\}$.

令 $f'(x)<0$,得 $x<1-a$,且 $x\neq -a$,$\therefore$ 函数在 $(-\infty,-a)$ 和 $(-a,-a+1)$ 上单调递减,又根据题意函数 $f(x)$ 在 $(-3,2)$ 上单调递减,所以应有:$-a\geqslant 2$,$\therefore a\leqslant -2$. 即 a 的取值范围是 $a\leqslant -2$.

高考大预测

命题导语

本套试卷的考查内容是集合与常用逻辑用语、函数的概念与基本初等函数Ⅰ、导数与微积分、复数等. 这些内容是高中数学的基本内容,也是高考的主体部分. 在命制试卷时,我们对高中数学新课程标准进行了认真详细的研究,分析了新课标对这些内容的要求,结合近几年高考试题对本部分内容的考查情况,确定了命题的范围与知识点的分布情况,从而形成了这套试卷.

本套试卷的特点是针对高三一轮复习的特点,注重基础性、层次性,对基础知识、基本方法进行全面覆盖,注重通性通法,同时注重对学生运算能力、逻辑思维能力和综合运用数学知识能力的考查和训练. 设计的题目既重视基础,又注重知识点的交汇和融合;既有经典好题,又有原创新题;既注意与原课程体系和内容的联系,更注意突出体现新课标的理念和精神. 总之,本套试卷是一套精心设计的好试卷,通过研习本套试卷,你一定会受益匪浅.

本套试卷的难度系数为0.56.

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分. 共150分. 考试时间120分钟.

第Ⅰ卷(选择题　共60分)

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A=\{x\mid (x-1)^2=0\}$,$B=\{y\mid y=1\}$,则 $A\cap B$ 等于

A. $\{1\}$　　B. $\{1,1\}$　　C. $\varnothing$　　D. $\{(1,1)\}$

2. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=\dfrac{1}{2}f(x)$,则 $f(x)$ 的解析式可能是

A. $\dfrac{x}{2}$　　B. $x+\dfrac{1}{2}$　　C. 2^{-x}　　D. $\log_{\frac{1}{2}}x$

3. 设 $a>1$,复数 z 满足 $z(1+a\mathrm{i})=\mathrm{i}+a$,则 z 对应的点位于复平面的

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

4.“$a>b>0$”是“$ab<\dfrac{a^2+b^2}{2}$”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 设实数 x,y 满足 $x+y=4$,则 $\sqrt{x^2+y^2-2x+2y+2}$ 的最小值为

A. $\sqrt{2}$　　B. 4　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 8

6. 设 $a>0,a\neq 1$,函数 $f(x)=a^{\lg(x^2-2x+3)}$ 有最大值,则函数 $y=\sqrt{\log_a(x^2-5x+7)}$ 的定义域是

A. $(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$　　B. $[2,3]$

C. $\mathbf{R}$　　D. $\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2},\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)$

7. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=3f(x)$,当 $x\in[0,2]$ 时,$f(x)=x^2-2x$,则当 $x\in[-4,-2]$ 时,$f(x)$ 的最小值是

A. $-\frac{1}{9}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. -1

8. 如果关于 x 的方程 $x^2-3x-m=0$ 的一个根是 i,那么复数 m

A. 一定是实数

B. 一定是纯虚数

C. 可能是实数,也可能是纯虚数

D. 一定是虚数,但不是纯虚数

9. 如图 6-1-1 都是同一坐标系中某三次函数及其导函数的图像,其中一定不正确的序号是

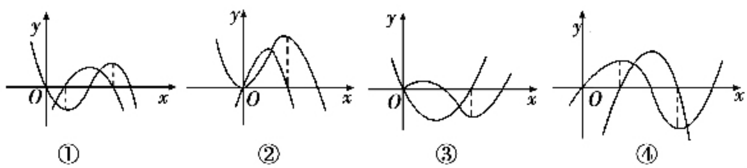


图 6-1-1

A. ①、②　　B. ③、④　　C. ①、③　　D. ①、④

10. 定义集合 A 与 B 的新运算:$A*B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B$ 且 $x\notin A\cap B\}$,则 $(A*B)*A=$

A. $A\cap B$　　B. $A\cup B$　　C. A　　D. B

11. 若函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的以 3 为周期的奇函数,且 $f(2)=0$,则方程 $f(x)=0$

在区间$(0,6)$内的根的个数的最小值为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

12. **已知函数**$f(x)=ax^2+(a^2-1)x+a-2(x>0)$**与函数**$g(x)=|\log_a x|$**的单调区间相同且相同区间上单调性也相同,其中**$a>0$**且**$a\neq 1$**,若**$f(x)=m$**有且仅有两个实数解,则实数**a**和**m**的取值范围分别是**

A. $a=\sqrt{2}-1$, $-2<m<\sqrt{2}-3$

B. $a=\sqrt{2}-1$, $-2<m\leqslant\sqrt{2}-3$

C. $a=\sqrt{2}+1$, $m>-2$

D. $a=\sqrt{2}+1$, $m\geqslant\sqrt{2}-3$

第 Ⅱ 卷(非选择题　共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分. 把答案填在题中的横线上)

13. **已知集合**$A=\{x\mid x^2-x-2\leqslant 0, x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid |x-2|\leqslant 1, x\in\mathbf{R}\}$,**全集**$U=A\cup B$,**则**$\complement_U(A\cap B)$**等于**______.

14. **已知**$f(x)$**为奇函数,且当**$x>0$**时,**$f(x)>0$,$f'(x)>0$,$f(3)=\frac{1}{3}$,**则函数**$y=xf(x)$**的递增区间是**________;**不等式**$xf(x)<1$**的解集是**______.

15. **如果函数**$f(x)=-x^3+bx$(b**为常数**),**且**$y=f(x)$**在**$(0,1)$**上单调递增,并且方程**$f(x)=0$**的根都在区间**$[-2,2]$**内,则**b**的取值范围是**______.

16. **定义在**$(-\infty,+\infty)$**上的奇函数**$f(x)$**以**4**为周期,且**$8\leqslant x<10$**时,**$f(x)=x+\lg x$,**则**$f(-1)$**的值等于**______.

三、解答题(本大题共 6 小题,共 74 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤)

17. **设二次方程**$x^2-ax+a^2-19=0$**和**$x^2-5x+6=0$**的解集分别是集合**A**和**B.

(1) **若**$A\cup B=A\cap B$,**求实数**a**的值;**

(2) **若**$A\cup B=B$,**求实数**a**的取值范围.**

18. **设复数**z**满足**$|z|=5$,**且**$(3+4\mathrm{i})z$**在复平面上对应的点在第二、四象限角的平分线上,**$|\sqrt{2}z-m|=5\sqrt{2}(m\in\mathbf{R})$,**求**$z$**和**$m$**的值.**

19. **若函数**$f(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+m\sqrt{1-x^2}$**的最大值为**$g(m)$.

(1) **当**$m=0$**时,求**$g(m)$**;**

(2) **当**$m>0$**时,是否存在实数**m**,使得**$g(m)\cdot g(\frac{1}{m})=1$**?若存在,求出**$m$**的值;若不存在,说明理由.**

20. 某地区预计明年从年初开始的前 x 个月内，对某种商品的需求总量 $f(x)$（万件）与月份 x 的近似关系为 $f(x)=\frac{1}{150}x(x+1)(35-2x)$（$x\in\mathbf{N}^*$，且 $x\leqslant 12$）.

（1）写出明年第 x 个月的需求量 $g(x)$（万件）与月 x 的函数关系，并求出哪个月份的需求量最大，最大需求量是多少；

（2）如果将该商品每月都投放市场 p 万件（销售未完的商品都可以在以后各月销售），要保证每月都足量供应，问：p 至少为多少万件？

21. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+1$（$a,b\in\mathbf{R}$，$a>0$），设方程 $f(x)=x$ 的两个实根分别为 x_1，x_2.

（1）若 $x_1<2<x_2<4$，设有函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=x_0$，求证：$x_0>-1$；

（2）若 $|x_1|<2$，$|x_2-x_1|=2$，求 b 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x)=\frac{4x^2-11}{3-x}$，$x\in[0,1]$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间和值域；

（2）若函数 $g(x)=x^3-3a^2x-2a$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递减，设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的值域分别为 A 和 B，且 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

参考答案

1. A　由题意得 $A=\{1\}$，$B=\{1\}$，所以 $A\cap B=\{1\}$.

2. C　把 4 个选项中的函数逐个代入进行检验，可知，$2^{-x-1}=\frac{1}{2}\cdot 2^{-x}$，故选 C.

3. D　由题意可得 $z=\frac{2a}{a^2+1}+\frac{1-a^2}{a^2+1}\mathrm{i}$，因为 $a>1$，所以 $\frac{2a}{a^2+1}>0$，$\frac{1-a^2}{a^2+1}<0$，所以 z 对应的点位于复平面的第四象限.

4. A　若 $a>b>0$，则一定有 $ab<\frac{a^2+b^2}{2}$；但若 $ab<\frac{a^2+b^2}{2}$，应有 $a\neq b$，而不是 $a>b>0$，所以"$a>b>0$"是"$ab<\frac{a^2+b^2}{2}$"的充分不必要条件.

5. C　$\sqrt{x^2+y^2-2x+2y+2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$ 的几何意义为直线 $x+y=4$ 上的点 $P(x,y)$ 到 $(1,-1)$ 的距离，显然它的最小值为 $\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

6. B　由于函数 $f(x)=a^{\lg(x^2-2x+3)}$ 有最大值，而 $y=x^2-2x+3$ 有最小值，所以得 $0<a<1$. 由 $\log_a(x^2-5x+7)\geqslant 0$ 得 $0<x^2-5x+7\leqslant 1$，所以解得 $2\leqslant x\leqslant 3$，即定义域是 $[2,3]$.

7. A　由 $f(x+2)=3f(x)$，当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x^2-2x$ 取最小值时 $x=1$. 所以，

$x\in[-4,-2]$时，$(x+4)\in[0,2]$，所以，令$x+4=1$时有最小值，

即$f(-3)=\frac{1}{3}f(-3+2)=\frac{1}{3}f(-1)=\frac{1}{9}f(1)=-\frac{1}{9}$，故选A.

8. D　由于方程$x^2-3x-m=0$的一个根是i，所以$i^2-3i-m=0$，得$m=-1-3i$，于是复数m一定是虚数，但不是纯虚数，故选D.

9. B　通过对比原函数的单调性和它的导函数的正负即可.

10. D　画出韦恩图，便可容易得到结果.

11. D　因为函数$f(x)$的定义域为R且是奇函数，所以$f(0)=0$，又周期为3，所以$f(3)=0$，而$f(2)=0$，所以$f(5)=0$，又$f(-2)=0$，所以$f(1)=f(4)=0$. 故方程$f(x)=0$在区间$(0,6)$内的根的个数的最小值为5.

12. A　由于函数$g(x)=|\log_a x|$在$(0,1)$上递减，在$(1,+\infty)$上递增，而函数$f(x)$与$g(x)$的单调区间相同且相同区间上单调性也相同，所以函数$f(x)$图像（抛物线）的开口向上，且对称轴为$x=1$，于是有$-\frac{a^2-1}{2a}=1$，解得$a=\sqrt{2}-1$. 又$f(x)=m$有且仅有两个实数解，设$h(x)=f(x)-m=ax^2+(a^2-1)x+a-2-m$，则有$\begin{cases}\Delta=(a^2-1)^2-4a(a-2-m)>0,\\ h(0)>0,\end{cases}$解得$-2<m<\sqrt{2}-3$. 故选A.

13. $[-1,1)\cup(2,3]$　由于$A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$，所以$U=A\cup B=[-1,3]$，而$A\cap B=[1,2]$，于是$\complement_U(A\cap B)=[-1,1)\cup(2,3]$.

14. $(0,+\infty)$；$(-3,3)$　当$x>0$时，$y'=[xf(x)]'=f(x)+xf'(x)>0$，$\therefore y=xf(x)$在$(0,+\infty)$上递增. 又$f(x)$为奇函数，$\therefore y=xf(x)$为偶函数，$\therefore y=xf(x)$在$(-\infty,0)$上递减. 令$g(x)=xf(x)$，则$g(3)=3f(3)=1$，$\therefore g(-3)=-3f(-3)=3f(3)=1$，$\therefore xf(x)<1$的解为$-3<x<3$.

15. $3\leqslant b\leqslant 4$　因为当$x\in(0,1)$时，$f'(x)=-3x^2+b\geqslant 0$恒成立，所以$b\geqslant 3x^2$，又$3x^2<3$，所以$b\geqslant 3$；又由$f(x)=0$得$x=0$或$\pm\sqrt{b}\in[-2,2]$，所以$b\leqslant 4$，综上有$3\leqslant b\leqslant 4$.

16. $-9-\lg 9$　因为$f(x)$是奇函数且$f(x)=f(x+4)$，所以$f(-1)=-f(1)=-f(1+2\times 4)=-f(9)=-9-\lg 9$.

17. (1) 由于$A\cup B=A\cap B$，所以$A=B$，而方程$x^2-5x+6=0$的解为2和3，即$B=\{2,3\}$，所以$A=\{2,3\}$，即方程$x^2-ax+a^2-19=0$的解为2和3，因此得$\begin{cases}2+3=a,\\ 2\times 3=a^2-19,\end{cases}$所以$a=5$.

(2) 因为$A\cup B=B$，所以$A\subseteq B$. 当$A=\varnothing$时，应有$\Delta=a^2-4a^2+76<0$，解得

$a>\frac{2\sqrt{57}}{3}$或$a<-\frac{2\sqrt{57}}{3}$;当$A\neq\varnothing$时,依题意只能有$A=\{2,3\}$,所以由(1)知$a=5$,综上所述,实数a的取值范围是$a>\frac{2\sqrt{57}}{3}$或$a<-\frac{2\sqrt{57}}{3}$或$a=5$.

18. 设$z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$,因为$|z|=5$,所以$x^2+y^2=25$,而$(3+4i)z=(3x-4y)+(4x+3y)i$,依题意得$(3x-4y)+(4x+3y)=0$,即$y=7x$,所以$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,$y=\pm\frac{7\sqrt{2}}{2}$,即$z=\pm(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{2}i)$,$\sqrt{2}z=\pm(1+7i)$.当$\sqrt{2}z=1+7i$时,有$|1+7i-m|=5\sqrt{2}$,即$(1-m)^2+7^2=50$.解得$m=0$或$2$,当$\sqrt{2}z=-(1+7i)$时,同理可解得$m=0$或$-2$.

19. (1)当$m=0$时,$f(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$,函数定义域为$[-1,1]$,令$t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$,则$t^2=2+2\sqrt{1-x^2}$,由于$x\in[-1,1]$,所以$0\leqslant x^2\leqslant 1$,$0\leqslant 1-x^2\leqslant 1$,所以$2\leqslant t^2\leqslant 4$,得$t\in[\sqrt{2},2]$,所以函数的最大值等于2,即$g(m)=2$.

(2)当$m>0$时,由(1)得$f(x)=F(t)=t+m(\frac{1}{2}t^2-1)=\frac{m}{2}(t+\frac{1}{m})^2-\frac{1}{2m}-m$,$F(t)$的开口向上,对称轴为$t=-\frac{1}{m}<\sqrt{2}$,所以$F(t)$的最大值$g(t)=F(2)=2+m$.由$g(m)g(\frac{1}{m})=1$得$(2+m)(2+\frac{1}{m})=1$,得$m=-1<0$,所以不存在实数$m$,使得$g(m)g(\frac{1}{m})=1$.

20. (1)$g(1)=f(1)=\frac{1}{150}\times1\times2\times33=\frac{11}{25}$.当$x\geqslant 2$时,$g(x)=f(x)-f(x-1)$

$=\frac{1}{150}x(x+1)(35-2x)-\frac{1}{150}(x-1)x(37-2x)$

$=\frac{1}{150}x\cdot[(35+33x-2x^2)-(-37+39x-2x^2)]$

$=\frac{1}{150}x\cdot(72-6x)=\frac{1}{25}x\cdot(12-x)$,

当$x=1$时,$g(1)=\frac{1}{25}\times1\times11=\frac{11}{25}$,

$\therefore g(x)=\frac{1}{25}x(12-x)(x\in\mathbf{N}^*$,且$x\leqslant 12)$,

$\therefore$ 当$x=12-x$,即$x=6$时,$g(x)_{max}=\frac{36}{25}$(万件).故6月份该商品的需求量最大,

最大需求量为$\frac{36}{25}$万件.

(2) 依题意,对一切$x \in \{1,2,\cdots,12\}$有$px \geqslant g(1)+g(2)+\cdots+g(x)=f(x)$,

$\therefore p \geqslant \frac{1}{150}(x+1)(35-2x)(x=1,2,\cdots,12)$.

$\because h(x)=\frac{1}{150}(35+33x-2x^2)$,

$\therefore h(x)_{max}=h(8)=1.14$,故$p \geqslant 1.14$.故每个月至少投放1.14万件,可以保证每个月都足量供应.

21. (1) 由方程$f(x)=x$得$f(x)-x=0$,即$ax^2+(b-1)x+1=0$,

设$g(x)=ax^2+(b-1)x+1$,由题知$a>0$,方程$f(x)=x$的两根x_1,x_2满足$x_1<2<x_2<4$,所以函数$g(x)=ax^2+(b-1)x+1$的图像是开口向上,与x轴的两个交点分别在2的左侧和2与4之间,所以有

$\begin{cases} g(2)<0, \\ g(4)>0, \end{cases}$即$\begin{cases} 4a+2b-1<0, \\ 16a+4b-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12a+6b-3<0, \\ -16a-4b+3<0 \end{cases}$得$-4a+2b<0$,所以

$\frac{b}{2a}<1$,即$x_0=-\frac{b}{2a}>-1$.

(2) 解法一　对于方程$ax^2+(b-1)x+1=0$,由韦达定理得$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{1-b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2=\frac{1}{a}. \end{cases}$因

为$|x_2-x_1|=2$,所以$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4$,故$(1-b)^2=4a^2+4a$.　①

$\because |x_1|<2, |x_2-x_1|=2, \therefore -6<x_1+x_2<6$,即$-6<\frac{1-b}{a}<6 \Rightarrow (1-b)^2<36a^2$,所以$36a^2>4a^2+4a \Rightarrow a>\frac{1}{8}(a>0)$.

则由①得$(1-b)^2=4a^2+4a>\frac{9}{16}$,由此解得$b>\frac{7}{4}$或$b<\frac{1}{4}$.

解法二　由$|x_1|<2$可得$-2<x_1<2$.

当$-2<x_1 \leqslant 0$时,若$x_1<x_2$,由$|x_2-x_1|=2$得$0<x_2 \leqslant 2$,

故函数$g(x)=ax^2+(b-1)x+1$与x轴的两个交点分别在$(-2,0]$和$(0,2]$内

则有$g(0)<0$,但$g(0)=1$,所以$x_1<x_2$不成立;

若$x_2<x_1$,则由$|x_2-x_1|=2$得$-4<x_2 \leqslant -2$,所以函数$g(x)=ax^2+(b-1)x+1$与x轴的两个交点分别在$(-4,-2]$和$(-2,0]$内,

从而$\begin{cases}g(-4)>0,\\g(-2)\leqslant 0,\\g(0)\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}16a-4b+5>0,\\4a-2b+3\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}16a-4b+5>0,\\-16a+8b-12\geqslant 0,\end{cases}$即$4b>7\Rightarrow b>\frac{7}{4}$.

同理,当$0<x_1<2$时,可得$b<\frac{1}{4}$.

综上所述,b的取值范围为$b>\frac{7}{4}$或$b<\frac{1}{4}$.

22. (1)$\because f(x)=\frac{4x^2-11}{3-x}$,$\therefore f'(x)=\frac{-4x^2+24x-11}{(3-x)^2}=-\frac{(2x-1)(2x-11)}{(3-x)^2}$,

当$f'(x)=0$,解得$x=\frac{1}{2}$或$x=\frac{11}{2}$,当x变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	0	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},1)$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{11}{3}$	递减	-4	递增	$-\frac{7}{2}$

$\therefore$ 当$x\in(0,\frac{1}{2})$时,$f(x)$是减函数;当$x\in(\frac{1}{2},1)$时,$f(x)$是增函数,

$\therefore$ 当$x\in[0,1]$时,$f(x)$的值域为$[-4,-\frac{7}{2}]$.

(2)对函数$g(x)$求导得$g'(x)=3(x^2-a^2)$,$\because g(x)$在$[0,1]$上单调递减,

$\therefore$ 当$x\in[0,1]$时,$g'(x)=3(x^2-a^2)\leqslant 0$,$\therefore x^2\leqslant a^2$,即$a\geqslant 1$或$a\leqslant -1$.

又$g(x)$在$[0,1]$上是减函数,

$\therefore B=[g(1),g(0)]$,即$B=[1-2a-3a^2,-2a]$,而$A\subseteq B$,

$\therefore\begin{cases}1-2a-3a^2\leqslant -4,\\-2a\geqslant -\frac{7}{2},\end{cases}$ 解得$1\leqslant a\leqslant\frac{7}{4}$或$a\leqslant -\frac{5}{3}$,

又$a\geqslant 1$或$a\leqslant -1$,故a的取值范围是$1\leqslant a\leqslant\frac{7}{4}$或$a\leqslant -\frac{5}{3}$.