命题调研

命题研究与备考策略

集合与简易逻辑

1. 考查形式与特点

集合与简易逻辑是学习数学的一种基本语言和基本工具，是历年高考的必考内容，考题多以选择题、填空题的形式进行考查，主要为容易题，分值占总分值的3% ~5%.

(1)集合的考查以集合的运算为主，一般是给定几个集合，求这几个集合的交、并、补或给出几个集合的一种关系，判断它们所存在的另外的一种关系或在新定义下研究集合新问题等. 在考查集合知识的同时，突出考查数学语言的理解能力以及运用数形结合、分类讨论的思想方法解决问题的能力.

①考查对集合基本概念的认识和理解，如集合的表示法，元素与集合、集合与集合的关系，集合的运算等.

【例1】 **(1)(2006年重庆卷)已知集合** $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{2,4,5,7\}$，$B=\{3,4,5\}$，**则** $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$

A. $\{1,6\}$　　B. $\{4,5\}$　　C. $\{2,3,4,5,7\}$　　D. $\{1,2,3,6,7\}$

(2)(2006年江苏卷)若 A、B、C **为三个集合，**$A\cup B=B\cap C$，**则一定有**

A. $A\subseteq C$　　B. $C\subseteq A$　　C. $A\neq C$　　D. $A=\varnothing$

解析　(1)解法一　$\because \complement_U A=\{1,3,6\}$，$\complement_U B=\{1,2,6,7\}$，$\therefore (\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\{1,2,3,6,7\}$，**故选** D.

解法二　$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$，$\because A\cap B=\{4,5\}$，$\therefore \complement_U(A\cap B)=\{1,2,3,6,7\}$. **故选** D

(2) $\because A\subseteq(A\cup B)$，$(B\cap C)\subseteq C$，**而** $A\cup B=B\cap C$，$\therefore A\subseteq C$. **故选** A.

评述　**由高考试题可以看出集合考查的不同侧面. 第(1)题考查列举法表示的有限集的集合运算，是"送分题"，这种试题是教材练习题的"摘抄"，再如2005年浙江卷文科第2小题等. 第(2)题是集合运算关系的判断，有一定的抽象性，再如2005年全国卷Ⅰ第1小题等.**

②考查集合知识的应用水平，如求不等式(组)的解集等相关问题.

【例2】 **(2006年福建卷)已知全集** $U=\mathbf{R}$，**且** $A=\{x\mid |x-1|>2\}$，$B=\{x\mid x^2-6x+8<0\}$，**则** $(\complement_U A)\cap B$ **等于**

A. $[-1,4)$　　B. $(2,3)$　　C. $(2,3]$　　D. $(-1,4)$

解析　$\because A=\{x\mid x<-1$，**或** $x>3\}$，$\therefore \complement_U A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，**又** $B=\{x\mid 2<x<$

4}，∴ $(\complement_U A)\cap B=\{x|2<x\leqslant 3\}$，故选 C.

评述　这道试题从另一个侧面考查了集合知识的运用，题目的本质是解绝对值不等式和一元二次不等式，再如 2006 年天津卷文科第 1 小题，2006 年四川卷文科第 1 小题等.

(2) 简易逻辑的考查以数学概念和性质的判断为主，一般是给出几个命题，判断其真假，或判断条件 P 是 Q 成立的充分条件还是必要条件，或求充要条件等. 在考查简易逻辑知识的同时，主要考查命题转换、逻辑推理和分析问题的能力.

①考查命题的四种形式及原命题与其逆否命题的等价性.

②考查充要条件的判定.

2. 命题趋向预测

纵观近几年的高考试题，集合与简易逻辑的考查仍以选择题形式为主，主要考查集合的运算、充要条件的判断等.

简易逻辑知识在高考中很少刻意进行考查，但实际试题中对简易逻辑的考查却又无处不在，无法回避.

预计在 2007 年的高考试题中，对集合和简易逻辑的考查仍以选择题为主，难度不大，要求对基本知识、基本题型的求解准确熟练. 特别需要注意以下几个方面：

(1) 集合考查的重点是集合与集合之间的关系，将加强对集合的计算与化简的考查，并向无限集合发展，考查抽象思维能力. 在集合的表示形式上，要分清用列举法给出的数集，用描述法给出的某一方程、不等式的解集或函数的定义域、值域，用描述法给出的某一点集等.

(2) 在试题的设问方式上，掌握集合运算的正反两侧面：一是给出确定的集合，进行集合的交、并、补运算；二是给出含有参数的集合，已知集合的某种运算满足的关系，求参数的值或取值范围. 在解题方法上，要学会利用文氏图理解集合之间的关系及其相关概念.

(3) 定义新运算在集合方面是一个新的命题背景，引进新的集合运算，可以考查考生接受新知识的能力和对集合语言的理解能力.

(4)"充分与必要条件"、命题的真伪，主要是对数学概念有准确的记忆和深层次的理解. 充要条件既可以全面认识有关数学知识的前因后果，也可以探索数学命题的来龙去脉.

3. 复习建议及应试对策

(1) 深刻理解、准确掌握集合、元素、子集、交集、并集、补集、命题、充要条件等基本概念与"或""且""非"等逻辑联结词的含义，这样才能准确地解答有关集合、简易逻辑的基本概念问题，才能对有关命题做出恰当的判断.

(2) 强化数形结合思想，自觉利用文氏图、数轴、函数图像帮助分析和理解问题，提高形象思维能力.

数学格言　托尔斯泰的分数："一个人就好像一个分数，他的实际才能好比分子，而他对自己的估价好比分母。分母越大，则分数的值就越小。"

(3) 对一些应用集合、符号进行运算及充分条件与必要条件判定的大型综合题，应给予高度关注，还应注意涉及绝对值不等式和二次不等式的综合题目.

(4) 含参数的集合问题，多根据集合的互异性来处理，有时需要分类讨论.

函数

1. 考查形式与特点

函数是高中数学最重要的内容，函数的思想方法贯穿于数学各部分的知识中. 纵观近几年高考试题，选择题、填空题、解答题中每年都有函数试题，主要考查内容有：函数的概念及性质、函数的图像及变换，以及基本函数出现的综合性问题，充分体现以' 能力立意 '的原则，低、中、高档题均有出现，分值约占总分值的 14%.

(1) 以基本技能的形式考查反函数的求法，函数多以反比例函数、二次函数、指数函数、对数函数和分段函数为原型.

【例 3】 (2006 年福建卷) 函数 $y=\log_2\dfrac{x}{x-1}(x>1)$ 的反函数是

A. $y=\dfrac{2^x}{2^x-1}(x>0)$ B. $y=\dfrac{2^x}{2^x-1}(x<0)$ C. $y=\dfrac{2^x-1}{2^x}(x>0)$ D. $y=\dfrac{2^x-1}{2^x}(x<0)$

解析一 $\because$ 函数 $y=\log_2\dfrac{x}{x-1}(x>1)$ 的图像过 $(2,1)$，$\therefore$ 其反函数的图像过 $(1,2)$，验证知函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x-1}$ 满足条件且 1 必定属于定义域 . 只有选项 A 符合. 故选 A.

解析二 当 $x>1$ 时，$\dfrac{x}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}>1$，$\therefore y=\log_2\dfrac{x}{x-1}>0$，故反函数的定义域为 $(0,+\infty)$.

又由 $y=\log_2\dfrac{x}{x-1}$，得 $\dfrac{x}{x-1}=2^y$，解得 $x=\dfrac{2^y}{2^y-1}$，$\therefore$ 反函数为 $y=\dfrac{2^x}{2^x-1}(x>0)$.

评述 反函数是函数中的一个重要概念，高考几乎每年必考，题型一般为选择题，再如 2006 年安徽卷文科第 3 小题，全国卷 Ⅱ 文科第 8 小题等. 这样的试题要求考生掌握反函数的求法，如本题解析二 (在指数、对数函数中涉及指数式与对数式的互化) 以及互为反函数的函数性质关系，如本题解析一 (图像的对称性，定义域与值域互换等).

(2) 以中档难度的试题考查函数的图像，特别是图像的平移、对称及伸缩变换，通过对图像的识别来考查函数的性质，以及利用函数的图像讨论方程根的分布及不等式的解集等.

【例 4】 (2006 年重庆卷) 如图 1－1－1 所示，单位圆中弧 AB 的长为 x，$f(x)$ 表示弧 AB 与弦 AB 所围成的弓形面积的 2 倍，则函数 $y=f(x)$ 的图像是

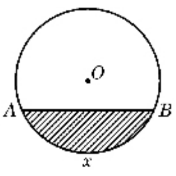
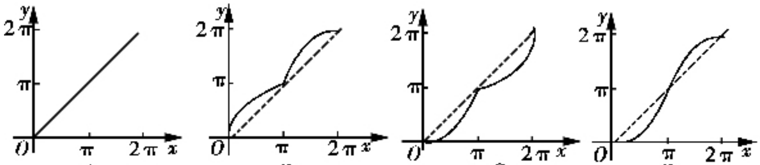


图 1－1－1



A.　　B.　　C.　　D.

解析　根据图像，显然函数 $f(x)$ 应该有下列性质 $f(\pi+t)+f(\pi-t)=2f(\pi)$，故函数 $f(x)$ 的图像以 (π,π) 为对称中心，故选 D.

评述　函数的图像是函数性质的直观反映. 本题直接避开求函数 $f(x)$ 的解析式，把图像与性质对应，通过性质，对图像作出正确判断.

(3) 以中等难度、题型新颖的试题综合考查函数的性质，包括奇偶性、单调性、周期性、图像的对称性等.

【例 5】 (1)(2006 年安徽卷) 函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足条件 $f(x+2)=\dfrac{1}{f(x)}$，若 $f(1)=-5$ 则 $f(f(5))=$ ______.

(2)(2006 年北京卷) 已知 $f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a, & x<1,\\ \log_a x, & x\geqslant 1\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的减函数，那么 a 的取值范围是

A. $(0,1)$　　B. $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$　　C. $\left[\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{3}\right)$　　D. $\left[\dfrac{1}{7},1\right)$

解析　(1) 由 $f(x+2)=\dfrac{1}{f(x)}$ 得 $f(x+4)=\dfrac{1}{f(x+2)}=f(x)$，$\therefore f(5)=f(1)=-5$，则 $f(f(5))=f(-5)=f(-1)=\dfrac{1}{f(-1+2)}=-\dfrac{1}{5}$.

(2) 由题意知 $\begin{cases}3a-1<0,\\ 0<a<1\end{cases}$，且 $(3a-1)\cdot 1+4a\geqslant \log_a 1$，故 $\dfrac{1}{7}\leqslant a<\dfrac{1}{3}$. 故选 C.

评述　第 (1) 题考查函数的周期性；第 (2) 题考查函数的单调性，但在分段讨论单调递减的情况下，不要忽视隐含条件的作用，即 $f(x)$ 在 $x\geqslant 1$ 上的最大值应小于在 $x<1$ 上的最小值.

(4) 函数与不等式、方程、最值、参数取值范围的探求及数列、三角、解析几何等知识综合在一起编拟的综合性较强的高档解答题. 以综合考查应用函数知识分析、解决问题的能力，测试对函数思想方法的理解与灵活运用，等价转化，数形结合和分类讨论等解题策略的理解和掌握程度. 在具体设计上，体现层次递进的处理原则，分步设问，分散难点，以较隐蔽的方式给出求解思路.

2. 命题趋向预测

纵观近几年的高考试题，预计在 2007 年高考中，函数知识依然会从以下几个角度进行考查.

(1)函数概念的考查.多以选择题、填空题形式考查函数的三要素.如,求函数或其反函数的解析式,求函数的定义域,求函数的值等;又考查函数的本质特征,如对集合间对应关系的研究等.与反函数有关的试题,大多是求函数的解析式,定义域、值域或函数图像等,一般不需求出反函数,只需将问题转化为与原函数有关的问题即可解决.

(2)函数图像的考查,会以选择题的形式给出.一般是给出函数的解析式或函数满足的条件,确定函数的图像;或给出函数图像,求函数的解析式;或给出函数图像,确定解析式中参数的值或取值范围;或考查函数图像的初等变换等,即考查作图、用图、变图.与函数图像有关的试题,要从图中(或列表中)读取各种信息,注意利用平移变换、伸缩变换、对称变换,注意函数的对称性、函数值的变化趋势,培养运用数形结合思想来解题的能力.

(3)函数性质的考查,仍会以选择题的中高档题出现.试题主要一般是函数的奇偶性、单调性的判定及应用;函数最值的求解;函数性质的简单综合问题研究;函数图像反映出的其他直观性质的研究等.有关函数单调性和奇偶性的试题,从试题上看,抽象函数和具体函数都有,前些年大多数考具体函数,近几年有向抽象函数发展的趋势.另外,试题注重对转化思想的考查,且都综合地考查单调性与奇偶性.

(4)对指数函数与对数函数的考查,大多以基本函数的性质为依托,结合运算推理来解决.能运用性质比较熟练地进行大小的比较、方程的求解等.会利用基本的指数函数或对数函数的性质研究简单复合函数的单调性、奇偶性等性质,熟练掌握指数、对数运算法则,明确算理,能对常见的指数型函数、对数型函数进行变形处理.

(5)通过对函数的定义、图像和性质及应用的考查,以解答题的形式考查考生对基础知识、基本方法的掌握情况,以及对通性、通法的理解.通过考查函数与其他知识的综合(如函数与方程、函数与不等式、函数与数列等),进而考查考生的思维能力及综合应用能力.文科大多以对数函数为背景,结合对数运算,以考查对数函数的性质及图像等题型为主.此类试题,一般要经过变形转化,归结为二次函数问题解决.这是近年高考的重点和热点.

3. 复习建议及应试对策

(1)函数复习的重点是:①理解函数的有关概念:定义、三要素、表示方法,特别是函数的解析式;②掌握函数的单调性和奇偶性的概念、基本的判定方法和步骤,并会运用.应熟练掌握二次函数、反比例函数、指数函数、对数函数以及形如$y=x+\frac{1}{x}$的函数等一些常见函数的性质,归纳提炼函数性质的应用规律;③理解掌握反函数的概念,明确反函数的意义及一些常见符号的意义,掌握求反函数的方法步骤,理解反函数与原函数的关系等;④理解掌握指数函数、对数函数的概念、图像及性质,能运用性质熟练地进行大小比较,方程求解等.

(2)准确理解函数的概念,充分揭示函数与各章知识的联系,强化应用意识,自

觉养成运用函数观点处理问题的习惯. 所谓函数观点就是将问题放在动态背景上去考虑,从较高的角度处理方程、不等式、数列、曲线等问题.

(3) 以函数为依托,强化思想方法的训练. ①函数是考查数形结合思想的载体. 充分注意函数的图像题型,理解掌握常见函数图像的平移变换、伸缩变换、对称变换. 学会分析"读图题型",强化由图到式和由式到图的转化训练,培养运用数形结合思想解题的能力. 要善于借助函数图像解答方程、不等式、参数讨论等有关问题. ②要抓住含参变量的函数问题,掌握含参变量的分离、集中、代换、化归、分类等解题方法和技巧. 含参数的函数讨论问题是高考的热点问题,应高度重视. ③有重点地加强函数主体知识的理解和把握,提高思维层次,善于总结常见题型的解题策略,掌握通性通法,构建思维模块,并以此为基础转化发展,运用运动变化的观点解决数学问题,发展思维能力,重视开放性和综合性问题的研究.

数列

1. 考查形式与特点

数列是中学数学的重点内容之一,也是初等数学与高等数学的一个重要衔接点. 纵观近几年的高考试题,考查内容主要有两个方面:一是数列的基本概念(如等差/比数列的定义、通项公式、等差/比中项等);二是数列的运算,即运用通项公式、求和公式以及数列的性质求数列的一些基本量. 题型一般是一道主观题和一道客观题,分值约占总分值的 10%.

(1) 考查等差与等比数列的基本知识,这是历年高考的重点,题型考查全面,难度适中.

【例 6】 (2006 年全国卷Ⅰ) 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列,$a_3=2$,$a_2+a_4=\frac{20}{3}$,求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q,则 $q\neq0$,

$\because a_2=\frac{a_3}{q}=\frac{2}{q}$,$a_4=a_3q=2q$,

又$\because a_2+a_4=\frac{20}{3}$,$\therefore \frac{2}{q}+2q=\frac{20}{3}$,解得 $q_1=\frac{1}{3}$,$q_2=3$.

当 $q=\frac{1}{3}$ 时,$a_1=18$,$\therefore a_n=18\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=2\times3^{3-n}$.

当 $q=3$ 时,$a_1=\frac{2}{9}$,$\therefore a_n=\frac{2}{9}\times3^{n-1}=2\times3^{n-3}$.

评述 等差与等比数列的基本知识也就是等差与等比数列的定义、通项公式与求和公式,其实质是五大基本量($a_1,a_n,S_n,n,d/q$)的关系. 解题的通法就是应用公式归结为首项 a_1 与公差(比) $d(q)$ 的计算,当然运用等差与等比数列的性质,可以简化运算. 再如 2006 年安徽卷文科第 21 小题,2006 年北京卷文科第 20 小题等.

数学格言 爱迪生的加号:"天才 = 1% 的灵感 + 99% 的血汗。"

(2)考查数列中 S_n 与 a_n 的关系,以及递推公式.这是高考解答题的常见题型,一直是高考的热点.

【例7】 (2006年陕西卷)已知正项数列 $\{a_n\}$,其前 n 项和 S_n 满足 $10S_n=a_n^2+5a_n+6$,且 a_1,a_2,a_{15} 成等比数列,求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n.

解析 $\because 10S_n=a_n^2+5a_n+6$, ① $\therefore 10a_1=a_1^2+5a_1+6$,解之得 $a_1=2$ 或 $a_1=3$.

又 $10S_{n-1}=a_{n-1}^2+5a_{n-1}+6(n\geqslant 2)$,②

由①-②得 $10a_n=(a_n^2-a_{n-1}^2)+5(a_n-a_{n-1})$,即 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-5)=0$,

$\because a_n+a_{n-1}>0$,$\therefore a_n-a_{n-1}=5\ (n\geqslant 2)$.

当 $a_1=3$ 时,$a_3=13$,$a_{15}=73$. a_1,a_2,a_{15} 不成等比数列,$\therefore a_1\neq 3$;

当 $a_1=2$ 时,$a_3=12$,$a_{15}=72$,有 $a_3^2=a_1a_{15}$,$\therefore a_1=2$,

$\therefore a_n=5n-3$.

评述 由 S_n 与 a_n 的关系和递推公式求通项的问题,一般很少单独成题.往往求其通项只是问题的一部分,再由通项构建新的数学问题,借以提高试题的综合程度.

(3)在数列、函数和不等式等知识网络的交汇点命题,考查考生对数学思想方法的理解.

【例8】 (2006年福建卷)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$,$a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)证明:$\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3}<\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

解析 (1)$\because a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$,$\therefore a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,

$\therefore \{a_n+1\}$ 是以 $a_1+1=2$ 为首项,2为公比的等比数列,

$\therefore a_n+1=2^n$,即 $a_n=2^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)$\because \dfrac{a_k}{a_{k+1}}=\dfrac{2^k-1}{2^{k+1}-1}=\dfrac{2^k-1}{2(2^k-\frac{1}{2})}<\dfrac{1}{2}$,$k=1,2,\cdots,n$,

$\therefore \dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{n}{2}$.

$\because \dfrac{a_k}{a_{k+1}}=\dfrac{2^k-1}{2^{k+1}-1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2(2^{k+1}-1)}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3\cdot 2^k+2^k-2}\geqslant\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^k}$,$k=1,2,\cdots,n$,

$\therefore \dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\geqslant\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)=\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)>\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3}$,

$\therefore \frac{n}{2}-\frac{1}{3}<\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

评述　这类试题一般都以压轴题的面目出现,突出考查考生的潜能与数学意识.与函数结合,可以是函数解析式与数列通项的关系,也可以是用函数观点研究数列中项的大小关系或最值.与不等式结合则主要是针对数列通项或和式的不等式证明.与解析几何结合,由点或线的解析特征,产生数列,如2006年重庆卷第22小题.

2. 命题趋向预测

纵观近几年的高考试题,2007年高考试题的命题趋向是:选择题、填空题继续以等差、等比数列为基本内容,着重考查基础知识、基本技能和基本方法,解答题突出“能力立意”,在提高等差、等比数列问题的探索性与开放性的同时,稳定数列与函数、方程、不等式等知识交汇的综合性难度.

(1)数列概念的考查,一般是先给出数列的递推公式,或前n项和公式,求数列的通项,也或是给出数列的新定义,研究该数列项的特征等.

(2)等差、等比数列基础知识的考查,一般是求通项、求前n项和,求证数列是等差或等比数列,或用通项公式和求前n项和公式进行相关的判断等.

(3)突出数列与函数、不等式、平面解析几何等其他知识的综合.考查综合运用相关数学知识解决问题的能力,考查数学建模与运用数列知识解决实际问题的能力.数列的代数推理题是新出现的命题热点,以往高考常用几何题来考查逻辑推理能力,近年来在数列题中也加强了推理能力的考查.另外,递推数列也是近年高考命题的一个热点内容.

3. 复习建议及应试对策

(1)要正确理解等差数列、等比数列的意义,掌握其通项公式、前n项和公式及其联系和内在规律.数列的通项a_n和前n项和有密切关系,但要注意$a_n=S_n-S_{n-1}$中的$n\geqslant 2$,当$n=1$时$a_1=S_1$.一般的数列求和,首先要考虑是否能转化为等差(等比)数列求和,其次再考虑错位相减、倒序相加、裂项相消等必要的化归技巧.

(2)要善于使用数列问题中的一些技巧和思想方法,如用函数的观点认识数列,以方程的思想指导“知三求二”等数列运算.同时在解题时还要学会回到定义、巧用性质.

(3)对于客观题应注意培养求简意识.解答客观题除常规方法,还可以探求简捷方法:①借助特殊数列;②灵活运用等差数列、等比数列的有关性质以及由此得到的一些重要结论.

(4)近几年高考加强了数列推理能力的考查,不仅考查等差、等比数列自身知识相综合的问题,而且数列常与函数、不等式、圆锥曲线综合考查.因此,在平时要加强对能力的培养,通过重点题型(探索型、综合型、应用题型等)进行针对性训练.近年,递推数列的考查有上升趋势,但复习时应严格控制难度.

(接上)是‘正号’还是‘负号’,倘若是‘+’,则进步;倘若是‘-’,就得吸取教训,采取措施。”

导数

1. 考查形式与特点

导数是高等数学的基础知识，也是高考的热点问题. 导数主要考查导数的概念、运算和导数的应用，难度不超过中等难度，题型多样，分值约占总分值的 10%.

（1）考查导数的概念、基本公式和基本方法的应用，如求函数的导数，切线的斜率，函数的单调区间、极值、最值等.

【例 9】（2006 年天津卷）函数 $f(x)$ 的定义域为开区间 (a,b)，导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内的图像如图 1－1－2 所示，则函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内有极小值点

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

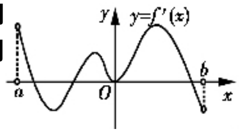


图 1－1－2

解析　极小值点是导数值由负值到正值时的零点. 从图像看，只有一个点，故正确答案选 A.

评述　导数的几何意义是导数概念的重要组成部分，2006 年高考客观题有多题涉及这一考点.

（2）考查导数的应用，利用导数判断函数的单调性，在应用题中用导数求函数的最值.

【例 10】（2006 年江苏卷）请您设计一个帐篷. 它下部的形状是高为 1 m 的正六棱柱，上部的形状是侧棱长为 3 m 的正六棱锥（如图 1－1－3 所示）. 试问当帐篷的顶点 O 到底面中心 O_1 的距离为多少时，帐篷的体积最大？

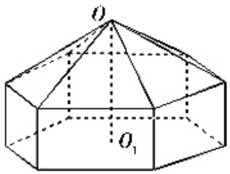


图 1－1－3

解析　设 OO_1 为 x m，则 $1<x<4$，由题设可得正六棱锥底面边长为：$\sqrt{3^2-(x-1)^2}=\sqrt{8+2x-x^2}$，（单位：m）

故底面正六边形的面积为：$6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{8+2x-x^2})^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot(8+2x-x^2)$，（单位：$m^2$）

帐篷的体积为：$V(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}(8+2x-x^2)\left[\frac{1}{3}(x-1)+1\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}(16+12x-x^3)$（单位：$m^3$）

求导数得 $V'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(12-3x^2)$.

令 $V'(x)=0$，解得 $x=-2$（不合题意，舍去）或 $x=2$，

当 $1<x<2$ 时，$V'(x)>0$，$V(x)$ 为增函数；当 $2<x<4$ 时，$V'(x)<0$，$V(x)$ 为减函数，

∴ 当 $x=2$ 时，$V(x)$ 最大，

∴ 当 OO_1 为 2 m 时，帐篷的体积最大，最大体积为 $16\sqrt{3}m^3$.

命题调研

爱因斯坦的公式：“$A=x+y+z$，A 代表成功，x 代表艰苦的劳动，y 代表正确的方法，z 代表少说空话。”

数学格言

评述　利用导数解决社会生产生活实践中的最优化问题，是导数应用的重要方面，也是高考设置应用性试题的一个立足点.

2. 命题趋向预测

纵观近几年的高考试题，2007 年导数内容的命题趋势是：导数内容仍会在求函数的导数、利用导数求解（或论证）函数的单调性、函数的极值（最值）、利用导数解决实际问题等方面出题.

（1）导数客观题的考查，一般是函数导数的求法；或利用导数研究函数的单调性与极值；或研究函数的图像；或研究导数的几何意义.

（2）通过考查导数的几何意义、函数极值（最值）的判定、单调性的判定等，从而考查考生数形结合的思想、抽象思维能力、学习能力及数学知识综合应用的能力.

3. 复习建议及应试对策

导数的方法涉及导数的定义、导数的几何意义、常用求导公式、四则运算求导法则和复合函数求导法则等求导方法；导数在研究上的应用主要涉及函数单调性的判断、极大（小）值的判断与求解，以及函数最大（小）值的求解，应该意识到会求一些实际问题的最大值与最小值才是解决问题的关键.

重点突破

重点1 集合与简易逻辑

重点诠释

本部分的重点内容是集合的概念与运算，以及简易逻辑与充要条件.本重点是高考的必考内容，但难度一般不大，试题常以选择题或填空题的形式出现.

1. 集合是高考每年必考的知识点之一，其重点是集合的有关概念以及集合的交、并、补运算. 一方面，考查对集合相关概念的认识和理解水平，如对集合中涉及的特定字母和符号、元素与集合间的关系、集合与集合间的比较，主要表现在对集合的识别和表达上；另一方面，以集合语言与集合思想为载体，考查学生对集合知识的应用水平，如函数的定义域与值域、方程与不等式的解等问题. 命题上仍以考查概念与计算为主，题型主要是选择题、填空题，但要注意对描述法表示的集合的理解，首先要确定属于哪一类集合(数集、点集或某类图形)，然后再确定处理此类问题的方法，即先"代表元素"后"元素属性".

2. 对于四种命题与充要条件，高考命题上仍以基本概念为考查对象，并且以此知识为工具来考查三角、立体几何、解析几何中的知识点，题型主要是选择题和填空题.

典例调研

题型一　集合的概念

【调研1】 **已知集合** $A=\{x|x^2-2x+a\leqslant 0\}$，$B=\{x|x^2-3x+2\leqslant 0\}$，**若** $A\subsetneqq B$，**求实数** a **的取值范围.**

解析　$B=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$，$A=\{x|x^2-2x+a\leqslant 0\}$，**由于** $A\subsetneqq B$，**则**

(1) 当 $A=\varnothing$ **时，满足** $A\subsetneqq B$，**即** $x^2-2x+a\leqslant 0$ **无解，所以其对应的二次方程的** $\Delta=(-2)^2-4a<0$，**解得** $a>1$.

(2) 当 $A\neq\varnothing$ **时，由于不等式** $x^2-2x+a\leqslant 0$ **对应的二次函数** $y=x^2-2x+a$ **的对称轴是** $x=1$，**要保证** $A\subsetneqq[1,2]$，**当且仅当** $A=\{1\}$，**即** $\Delta=0$，**解得** $a=1$.

综上，实数 a **的取值范围是** $[1,+\infty)$.

【误点警示】 **空集是一个特殊而又重要的集合，在解题的过程中不容忽视. 特别是在题设中隐含有空集参与的集合问题时(比如，**$A\subseteq B$，$A\cap B=\varnothing$**等形式的条件)，忽视空集的特殊性质往往会导致错解.**

拓展1　**设集合** $A=\{x|x^2+x-6<0\}$，**函数** $f(x)=\dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}$ **的值域为** B，**求使** B

(接上)但两圆之外的空白都是我们的无知面。圆越大其圆周接触的无知面就越多。"

数学格言

$\subseteq A$ 的实数 a 的取值范围.

【调研2】 已知平面上点 $P\in\{(x,y)\mid(x-2\cos\alpha)^2+(y-2\sin\alpha)^2=16(\alpha\in\mathbf{R})\}$，则满足条件的点 P 在平面上所组成图形的面积是

A. 36π　　B. 32π

C. 16π　　D. 4π

解析　点 P 在以 $A(2\cos\alpha,2\sin\alpha)$ 为圆心，4 为半径的圆 C_1 的圆周上，而圆心 A 又落在以 $O(0,0)$ 为圆心，2 为半径的圆 C_2 上. 随着 α 的变化，圆心 A 在圆 C_2 上移动，点 P 在平面上所组成的图形就是圆 C_1 圆周扫过的部分(如图 2－1－1 的阴影部分，恰似健身时运动着的"呼啦圈")，是一个圆环，其面积为 $(36-4)\pi=32\pi$. 故选 B.

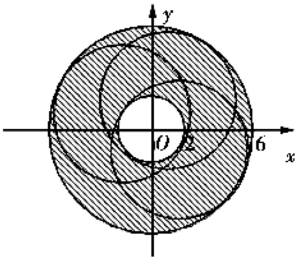


图 2－1－1

【考向预测】 集合语言是数学语言的重要组成部分，用集合语言既可以表示方程与不等式的解与解集，也可以表示空间点、线、面的位置关系，还可以表示圆锥曲线上点的轨迹. 理解用集合语言描述的数学对象，正确地将集合语言与符号语言转化为其他数学语言，这是学习集合的核心问题. 纵观近几年高考试题和各地的模拟试题，可以预见:以集合为载体，在知识交汇处设计综合性较强的选择题或填空题，已打破集合题是"送分题"的旧格式.

拓展2　若集合 $\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x\geqslant 1,\\x\geqslant y,\\2x-y\leqslant 1\end{cases}\right\}\cap\{(x,y)\mid 3x+2y-t=0\}\neq\varnothing$，则实数 t 的最大值为______.

题型二　集合的运算

【调研3】 已知集合 $P=\{0,m\}$，$Q=\{x\mid 2x^2-5x<0,x\in\mathbf{Z}\}$，若 $P\cap Q\neq\varnothing$，则 m 等于

A. 1　　B. 2　　C. 1 或 $\dfrac{5}{2}$　　D. 1 或 2

解析　$\because Q=\{x\mid 0<x<\dfrac{5}{2},x\in\mathbf{Z}\}=\{1,2\}$，又 $\because 0\notin Q$，而 $P\cap Q\neq\varnothing$，$\therefore m\in Q$，$\therefore m=1$ 或 2. 故选 D.

【知识链接】 补集、交集、并集是集合的三大运算，也是集合内容的主干知识. 从试题的设问方式看，或是给出确定的集合，进行集合的交、并、补运算;或是给出含有参数的集合，已知集合的某种运算满足的关系，求参数的值或取值范围，如本题. 解决集合的运算问题，必须理解相关运算的概念，熟练掌握交、并、补运算的一些性质，如 $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$，$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$，$\complement_U(\complement_U A)=A$.

拓展3　已知集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant\sqrt{5},x\in\mathbf{Z}\}$，则集合 $B=\{x\mid x=2a,a\in A\}$，则集合

数学诗歌　《集合、映射与函数》:

$A\cap B=$

A. $\{0,2\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{0\}$

【调研4】 已知集合 $A=\{0,2,3\}$，定义集合运算 $A※A=\{x\mid x=a\cdot b,a\in A,b\in A\}$，则 $A※A=$

A. $\{0,2\}$　　B. $\{0,6\}$　　C. $\{0,4,6,9\}$　　D. $\{0,2,3\}$

解析　注意这里的元素 a,b 可以相同，所以 $A※A$ 不仅仅是集合 A 中的互异元素之积. 故选 C.

【技巧点拨】 定义新运算在集合考查中也是一个新的命题背景，引进新的集合运算，可以考查考生接受新知识的能力和对集合语言的理解能力. 解决这类信息迁移题的基本方法是以旧带新，即把新定义的运算纳入到已有的集合运算体系之中，并用已有的解题方法来分析、解决问题.

拓展4　设※是集合 A 中元素的一种运算，如果对于任意的 $x\neq\pm y$，x、$y\in A$，都有 $x※y\in A$，则称运算※对集合 A 是封闭的，若 $M=\{x\mid x=a+\sqrt{2}b,a,b\in\mathbf{Z}\}$，则对集合 M 不封闭的运算是

A. 加法　　B. 减法　　C. 乘法　　D. 除法

题型三　逻辑联结词与四种命题

【调研5】 已知命题 p：关于 x 的不等式 $\dfrac{x^4-x^2+1}{x^2}>m$ 的解集为 $\{x\mid x\neq 0$，且 $x\in\mathbf{R}\}$；命题 q：$f(x)=-(5-2m)^x$ 是减函数. 若"p 或 q"为真命题，"p 且 q"为假命题，则实数 m 的取值范围是

A. $(1,2)$　　B. $[1,2)$　　C. $(-\infty,1]$　　D. $(-\infty,1)$

分析　首先求出命题 p、命题 q 分别为真时，实数 m 的取值范围，再根据复合命题"p 或 q""p 且 q"的真假判断，可知命题 p 与 q 必定一真一假的事实，进行推断.

解析　若不等式 $\dfrac{x^4-x^2+1}{x^2}>m$ 的解集为 $\{x\mid x\neq 0$，且 $x\in\mathbf{R}\}$，而 $x^2+\dfrac{1}{x^2}-1\geqslant 1$，则 $m<1$. 若 $f(x)=-(5-2m)^x$ 是减函数，则 $5-2m>1$，即 $m<2$. 由"p 或 q"为真命题，"p 且 q"为假命题，知实数 $m\in[1,2)$. 故选 B.

【知识链接】 "p 或 q"形式的复合命题，只要命题 p、命题 q 中有一个为真，则该复合命题就是真命题；当且仅当命题 p、命题 q 都假时，用"或"连结的复合命题才是假命题."p 且 q"形式的复合命题，当且仅当命题 p、命题 q 都为真时，该复合命题才是真命题."非 p"形式的复合命题的真假与 p 的真假相反.

拓展5　已知命题 p、q，则"命题 p 或 q 为真"是"命题 p 且 q 为真"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【调研6】 给出命题："已知 a,b,c,d 是实数，若 $a\neq b$ 且 $c\neq d$，则 $a+c\neq b+d$". 对原命题、逆命题、否命题、逆否命题而言，其中的真命题有

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 4 个

解析　**逆命题：已知 a,b,c,d 是实数，若 $a+c\neq b+d$，则 $a\neq b$ 且 $c\neq d$.**

否命题：已知 a,b,c,d 是实数，若 $a=b$ 或 $c=d$，则 $a+c=b+d$.

逆否命题：已知 a,b,c,d 是实数，若 $a+c=b+d$，则 $a=b$ 或 $c=d$.

以上四个命题都是假命题，故选 A.

【技巧点拨】 **(1)写一个命题的逆命题、否命题、逆否命题的关键是分清楚原命题的条件和结论，一般大前提不变.**

(2)在命题真假性的判断中，要借助原命题与逆否命题同真同假，逆命题与否命题同真同假，学会利用互为逆否命题的等价性，通过"正难则反"培养自己的逆向思维能力. 这也是反证法证明问题的理论依据.

拓展 6　**已知 $p>0,q>0$，若 $p^3+q^3=2$，则 $p+q\leq 2$.**

(1) 写出逆命题；

(2) 试判断原命题的真假.

题型四　充分条件和必要条件

【调研 7】　**若命题 p：$0<\log_3 x<\log_3 2$，q：$x^2-x-2<0$，则命题 p 是命题 q 的**

A. **充分非必要条件**　　B. **必要非充分条件**

C. **充分必要条件**　　D. **既非充分又非必要条件**

解析　**命题 p：$1<x<2$，命题 q：$-1<x<2$. 显然命题 p 是命题 q 的充分非必要条件. 故选 A.**

【方法探究】　**掌握充要条件的判断，必须正确理解"推出"的含义."$p\Rightarrow q$"是指由 p 经过推理可以得出 q，也就是说"若 p 成立，则 q 一定成立"，即命题"若 p 则 q"为真.**

充要条件的判断，重在"从定义出发"，利用命题"若 p 则 q"的真假进行区分，在具体解题中，要注意分清"谁是条件""谁是结论"，防止南辕北辙. 如"A 是 B 的什么条件"中，A 是条件，B 是结论，而"A 的什么条件是 B"中，A 是结论，B 是条件. 有时还可以通过其逆否命题的真假加以区分. 若 $\square p\Rightarrow\square q$，则 p 是 q 的必要条件，q 是 p 的充分条件. 另外还可以利用集合关系进行解释. 记条件 p、q 对应的集合分别为 A、B，若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件，或 q 是 p 的必要条件.

拓展 7　**不等式 $|a+b|>|a-b|$ 成立的一个充分不必要条件是**

A. $a<1,b<1$　　B. $a>1,b<1$　　C. $a<1,b>1$　　D. $a>1,b>1$

【调研 8】　**求方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负根的充要条件.**

分析　**方程至少有一个负根，包括只有一个负根、一正一负根、两个负根等三种情况. 也可以从至少有一个负根的反面出发.**

解析　**(1)当 $a=0$ 时，方程化为 $2x+1=0$，只有一个负根 $x=-\frac{1}{2}$.**

(2)当 $a\neq 0$ 时，若方程有一正一负根(无零根)，则 $\frac{1}{a}<0$，解得 $a<0$.

若方程有两个负根，则$\begin{cases}\Delta=4-4a\geqslant0,\\ x_1+x_2=-\dfrac{2}{a}<0,\\ x_1x_2=\dfrac{1}{a}>0,\end{cases}$解得 $0<a\leqslant1$.

由上述求解过程的可逆性知，当 $a=0$ 时，方程有一个负根；当 $a<0$ 时，方程有一负根一正根；当 $0<a\leqslant1$ 时，方程有两负根，$\therefore$ 当 $a\leqslant1$ 时方程至少有一负根.

综上所述，方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负根的充要条件是 $a\leqslant1$.

【误点警示】 求充要条件的问题，实质就是求使题设条件成立所需的条件，值得注意的是解题的转化过程必须是等价的，即要保证这些条件的充要性. 本题中极易忽视 a 是否为零的讨论.

拓展 8 已知命题 p：$|x-2|<a(a>0)$，命题 q：$|x^2-4|<1$，若 p 是 q 的充分不必要条件，则实数 a 的取值范围是______.

强化闯关

1. 含有三个实数的集合可表示为 $\{a,\dfrac{b}{a},1\}$，也可表示为 $\{a^2,a+b,0\}$，则 $a^{2\,006}+b^{2\,006}$的值为

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. ±1

2. 已知 a 为不等于零的实数，那么集合 $M=\{x|x^2-2(a+1)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$ 的子集的个数为

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 4 个　　D. 1 个或 2 个或 4 个

3. 若集合 $P=\{x|x=3m+1,m\in\mathbf{N}^*\}$，$Q=\{y|y=5n+2,n\in\mathbf{N}^*\}$，则 $P\cap Q=$

A. $\{x|x=15k-7,k\in\mathbf{N}^*\}$　　B. $\{x|x=15k-8,k\in\mathbf{N}^*\}$

C. $\{x|x=15k+8,k\in\mathbf{N}^*\}$　　D. $\{x|x=15k+7,k\in\mathbf{N}^*\}$

4. 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，且 $f(0)=3$，$f(3)=-1$. 设 $P=\{x||f(x+t)-1|<2\}$，$Q=\{x|f(x)<-1\}$，若“$x\in P$”是“$x\in Q$”的充分不必要条件，则实数 t 的取值范围是

A. $t\leqslant0$　　B. $t\geqslant0$　　C. $t\leqslant-3$　　D. $t\geqslant-3$

5. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x|x^2-bx+2=0\}$，问同时满足 $B\subsetneqq A$，$C\subseteq A$ 的实数 a、b 是否存在？若存在，求出 a、b 所有的值；若不存在，请说明理由.

6. 设全集 $U=\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\lg(|x+1|+a-1)(a<1)$ 的定义域为 A，集合 $B=\{x|\cos\pi x=1\}$，若 $(\complement_U A)\cap B$ 恰有 2 个元素，求 a 的取值集合.

重点突破

参考答案

【拓展】

1. 显然函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|-3<x<2\}$，若 $B\subseteq A$，则对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $-3<f(x)<2$ 成立.

$\because x^2-x+1>0$，$\therefore \begin{cases}x^2+ax-2>-3(x^2-x+1),\\x^2+ax-2<2(x^2-x+1)\end{cases}$恒成立，

即$\begin{cases}4x^2+(a-3)x+1>0,\\x^2-(a+2)x+4>0\end{cases}$恒成立，

$\therefore \begin{cases}\Delta_1=(a-3)^2-16<0,\\\Delta_2=(a+2)^2-16<0\end{cases}$解得$-1<a<2$.

2. 5　本题以集合语言表述一个线性规划问题. 在直角坐标系内画出$\begin{cases}x\geqslant 1,\\x\geqslant y,\\2x-y\leqslant 1\end{cases}$的可行域，在点$(1,1)$处，目标函数$3x+2y=t$取得最大值为5.

3. A　$\because A=\{0,1,2\}$，$B=\{0,2,4\}$，$\therefore A\cap B=\{0,2\}$. 故选A.

4. D　集合M中任意两数之商不一定可以表示为$a+\sqrt{2}b\,(a,b\in \mathbf{Z})$的形式，比如$\frac{1}{3-\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{2}}{7}=\frac{3}{7}+\frac{1}{7}\sqrt{2}$，其中$\frac{3}{7}$，$\frac{1}{7}$不是整数. 故选D.

5. B　"命题p或q为真"即命题p或q为中至少有一个为真；"命题p且q为真"需要命题p和q都为真. 故选B.

6. (1) 已知$p>0$，$q>0$，若$p+q\leqslant 2$，则$p^3+q^3=2$.

(2)原命题是真命题，证明如下：

假设$p+q>2$，则$(p+q)^3=p^3+q^3+3pq(p+q)>8$.

$\because p^3+q^3=2$，$\therefore 3pq(p+q)>6$，即$pq(p+q)>2$.

又$\because p^3+q^3=(p+q)(p^2-pq+q^2)=2$，

$\therefore pq(p+q)>(p+q)(p^2-pq+q^2)$，

$\because p>0$，$q>0$，$\therefore pq>p^2-pq+q^2$，

即$(p-q)^2<0$，矛盾. 故假设不成立，$\therefore p+q\leqslant 2$，$\therefore$ 原命题为真命题.

7. D　$|a+b|>|a-b|$成立的充要条件是$ab>0$. 故选D.

8. $0<a\leqslant\sqrt{5}-2$　由$|x-2|<a\,(a>0)$，得$2-a<x<2+a$；由$|x^2-4|<1$，得$-\sqrt{5}<x<-\sqrt{3}$或$\sqrt{3}<x<\sqrt{5}$. 若p是q的充分不必要条件，则$\begin{cases}\sqrt{3}\leqslant 2-a,\\a+2\leqslant\sqrt{5},\end{cases}$又$a>0$，$\therefore 0<a\leqslant\sqrt{5}-2$.

【强化闯关】

1. B　由题意知，集合$\{a,\frac{b}{a},1\}$中必有元素"0"，若$a=0$，则$a^2=0$，不合题意，所以$b=0$. 此时集合$\{a^2,a+b,0\}$中必有元素"1"，若$a=1$，则$a^2=1=a$，也不合题意，所以$a=-1$. 故$a^{2006}+b^{2006}=1$. 故选B.

2. D　考虑方程$x^2-2(a+1)x+1=0$的解的个数. $\because 4(a+1)^2-4=4a(a+2)$的正

负不确定，$\therefore M$元素个数可以是0、1、2，故其子集数可以是$2^0,2^1,2^2$. 故选D.

3. B 集合P是被3除余1的正整数的集合，集合Q是被5除余2的正整数的集合. 因此，只要检验选项是否同时满足这两个条件即可. 显然有$15k-8=3(5k-3)+1=5(3k-2)+2,k\in\mathbf{N}^*$. 注意！由于$k\in\mathbf{N}^*$，选项$\{x|x=15k+7,k\in\mathbf{N}^*\}$中没有元素“7”. 故选B.

4. C P: $-1<f(x+t)<3$，即$f(3)<f(x+t)<f(0)$，$\therefore 0<x+t<3$，故$-t<x<3-t$，又Q: $f(x)<f(3)$，$\therefore x>3$. 由题意：$-t\geqslant 3$，$\therefore t\leqslant -3$. 故选C.

5. $A=\{1,2\}$. $\because B\subsetneqq A$，$\therefore B$有三种可能：$\varnothing$、$\{1\}$、$\{2\}$.

若$B=\varnothing$，则$\Delta=a^2-4(a-1)<0$无解.

又当$\Delta=a^2-4(a-1)=0$，即$a=2$时，$B=\{1\}$，符合要求，$\therefore a=2$.

由$C\subseteq A$得$b^2-8<0$或$\begin{cases}b^2-8=0,\\1\in C\end{cases}$或$\begin{cases}b^2-8=0,\\2\in C\end{cases}$或$C=A$.

解得$-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$或$b=3$.

综上所述，存在$a=2$，$-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$或$b=3$满足题设要求.

6. 依题意得$|x+1|+a-1>0$，即$|x+1|>1-a$，

$\because a<1$，$\therefore 1-a>0$，$\therefore x+1>1-a$或$x+1<a-1$，即$x>-a$或$x<a-2$，

$\therefore A=(-\infty,a-2)\cup(-a,+\infty)$，$\therefore (\complement_U A)=[a-2,-a]$.

又$\because \cos\pi x=1$，$\therefore \pi x=2k\pi$，$\therefore x=2k(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore B=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$.

$\because (\complement_U A)\cap B$恰有2个元素，$\therefore \begin{cases}a<1,\\0\leqslant -a<2,\\-4<a-2\leqslant -2,\end{cases}$ 解得$-2<a\leqslant 0$.

$\therefore a$的取值集合为$(-2,0]$.

重点2 函数与反函数

重点诠释 本部分的重点内容是映射与函数的概念、函数的三要素以及反函数的求法. 高考中本重点内容一般以选择、填空题形式出现，难度一般为中低档，主要考查考生对概念的理解程度.

1. 映射概念的考查一般分为两个角度，一是以映射的相关概念为主，考查考生对基本概念的理解水平，如求象、原象等. 这样的试题一般多为容易题，停留在对知识的“识记”层次，其中对应法则的认知是关键；二是以映射知识为背景，重在考查计数原理或排列、组合的应用，即求满足一定条件的映射个数问题. 这类试题难度较大，要求考生在计数过程中能合理进行分类、分步，正确进行排列、组合运算.

2. 函数概念的考查，即考查函数的三要素：定义域、值域与解析式，这是函数概

念考查的重点. 试题既有直接考查三大要素的客观题,如求函数解析式、求函数定义域、求函数的值域等,又有与其他知识点结合进行综合考查的中档题,如定义域与反函数结合、解析式与求函数值结合、值域与求最值结合等,还有的试题特别注重考查函数的本质特征,如对集合间对应关系的研究等. 函数是高中数学的重要组成部分,试题在对函数知识考查的同时,往往都涉及对数学思想方法的考查,如函数与方程、分类讨论、数形结合等思想方法.

3. 反函数是高考常考内容之一,但在高考试题中形式最为简单,主要题型为选择题,内容一般是求函数的反函数、反函数的图像以及互为反函数的两个函数中象与原象的对应关系,以容易题为主. 其中求反函数的过程就是解方程的过程,理解反函数的概念就是对"反"字的可逆性的理解.

典例调研

题型一　映射与函数的概念

【调研 1】 已知 $f:x\to 2\sin x$ 是集合 $A(A\subseteq[0,2\pi])$ 到集合 B 的一个映射,若 $B=\{0,1,2\}$,则 A 中的元素个数最多为

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

解析　$\because A\subseteq[0,2\pi]$,由 $2\sin x=0$ 得 $x=0,\pi,2\pi$;由 $2\sin x=1$ 得 $x=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}$;由 $2\sin x=2$ 得 $x=\dfrac{\pi}{2}$. 故 A 中最多有 6 个元素. 故选 A.

【前沿考向】《考试大纲》对映射的要求是了解其概念,属第一层次的要求,也就是能判断一个对应是不是映射,以及象与原象之间的关系. 由原象求象只需将原象代入对应法则中即可;由象求原象要善于运用方程的思想来解决问题. 解决映射问题的关键在于抓住取元的"任意性"、成象的"惟一性",即对于集合 A 中的每一个元素,在集合 B 中都有惟一的元素与之对应.

在高考中,由于对映射的要求仅属"了解"层次,因而较少命制这方面内容的试题. 但在 1999 年和 2000 年,连续两年都命制了这方面的试题,并且都是与集合结合在一起的试题. 因此我们必须熟练掌握映射的概念,并能在其他知识的综合问题中灵活运用这一概念来叙述和解决问题.

拓展 1　设集合 A 和 B 都是整数集 $\mathbf{Z}$,映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 x 映射到集合 B 中的元素 x^3-x+2,则在映射 f 下,象 2 的原象所成的集合中元素的个数是

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【调研 2】 已知 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{5,6\}$,取适当的对应法则. 问:

(1) 从 A 到 B 可建立多少个不同的映射.

(2) 以 A 为定义域,B 为值域的函数有多少?

(3) 在所有以 A 为定义域,B 为值域的函数中,满足 $f(1)\leqslant f(2)\leqslant f(3)\leqslant f(4)$ 的

函数的个数有多少个？

分析　注意区分三个设问的区别，根据映射、函数的概念，进行分类或分步计数.

解析　(1)由映射的定义，A 中的每一个元素都必须找到象，有 2 种方法，按照分步计数原理，从 A 到 B 的映射有 $2^4=16$ 个.

(2)函数是非空数集上的映射，因此从 A 到 B 也可建立 16 个不同的函数. 但由于 1，2，3，4 都对应 5 或都对应 6 这两种情况下，值域不是 B，应排除，故以 A 为定义域，B 为值域的函数有 14 个.

(3)满足 $f(1)\leqslant f(2)\leqslant f(3)\leqslant f(4)$ 的函数，必须使 $f(1)=5$，$f(4)=6$，故只要考虑 $f(2)$，$f(3)$ 中等于 5 或等于 6 的情况，共有 $f(2)=f(3)=5$；$f(2)=5$，$f(3)=6$；$f(2)=f(3)=6$ 等 3 种可能. 即满足条件的函数共有 3 个.

【知识链接】　本题从映射与函数的定义出发，结合分步计数原理解决问题，并深层次地提示了定义域和值域的本质意义. 处理该类题型，最关键问题是对映射与函数概念的理解与辨析，重点是计数原理的运用.

作为映射的概念，应理解好几个关键词：A 中的“每一个”，B 中的“惟一”，这就确定了 A 中元素可多对一，但 B 中元素不允许多对一；B 中元素可以有“空闲”元素，而 A 中元素则不准有“空闲”元素. 作为集合 A 到 B 上的函数来说，A 必是函数的定义域，而 B 不一定是函数的值域，只有当 B 是 A 中元素的象集时，B 才是函数的值域.

拓展2　已知集合 $M=\{a,b,c\}$，$N=\{-1,0,1\}$，又由映射 $f:M\to N$，满足 $f(a)+f(b)+f(c)=0$，那么映射 $f:M\to N$ 的个数

A. 4　　　B. 5　　　C. 6　　　D. 7

题型二　函数的定义域

【调研3】　设 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,1]$.

(1) 如果 $f(x-c)$，$f(x-c^2)$ 的定义域的交集为空集，求实数 c 的取值范围；

(2) 证明：若 $-1\leqslant c\leqslant 2$，则 $f(x-c)$，$f(x-c^2)$ 存在公共的定义域，并求这个公共的定义域.

解析　(1) $f(x-c)$ 的定义域为 $[c-1,c+1]$，$f(x-c^2)$ 的定义域为 $[c^2-1,c^2+1]$.

$\because$ 上述两个定义域的交集为空集，则有：$c^2-1>c+1$，或 $c^2+1<c-1$，

解得 $c>2$，或 $c<-1$，即为 c 的取值范围.

(2) $\because$ $c^2+1>c-1$ 恒成立，

由(1)知：当 $-1\leqslant c\leqslant 2$ 时，$c^2-1\leqslant c+1$.

当 $1\leqslant c\leqslant 2$ 或 $-1\leqslant c\leqslant 0$ 时，$c^2+1\geqslant c+1$ 且 $c^2-1\geqslant c-1$，此时的交集为 $[c^2-1,c+1]$；

当 $0<c<1$ 时，$c^2+1<c+1$ 且 $c^2-1<c-1$，此时的交集为 $[c-1,c^2+1]$.

故 $-1\leqslant c\leqslant 2$ 时，存在公共定义域，且当 $-1\leqslant c\leqslant 0$ 或 $1\leqslant c\leqslant 2$ 时，公共定义域为 $[c^2-1,c+1]$；当 $0<c<1$ 时，公共定义域为 $[c-1,c^2+1]$.

【方法探究】 求定义域一般都是求简单函数(给出函数的解析式)的定义域,求解思路是使解析式有意义的自变量取值范围的交集,要解不等式组.解析式有意义是指①分式的分母不等于零;②偶次方根的被开方式非负;③对数的底大于零,不等于1,且真数大于零;④负指数、零指数的底不为零;⑤$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\arcsin x$、$y=\arccos x$ 等有意义.

对于复合函数求定义域问题,其一般步骤是:若已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$,其复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域应由不等式 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 解得.

拓展3 函数 $f(x)=\dfrac{1}{ax^2+4ax+3}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $(0,\dfrac{3}{4})$　　C. $(\dfrac{3}{4},+\infty)$　　D. $[0,\dfrac{3}{4})$

题型三 函数的解析式

【调研4】 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-6,6]$ 上的奇函数,且在 $[0,3]$ 上为一次函数,在 $[3,6]$ 上为二次函数,并且当 $x\in[3,6]$ 时,$f(x)\leqslant f(5)=3$,$f(6)=2$,求 $f(x)$ 的解析式.

分析 因 $f(x)$ 为 $[-6,6]$ 上的奇函数,可先求出 $f(x)$ 在 $[0,6]$ 上的解析式,再根据奇函数的性质,求 $[-6,0]$ 上的解析式.又 $f(x)$ 在 $[0,6]$ 上是由一次函数与二次函数组成,故可用待定系数法.

解析 $\because f(x)$ 在 $x\in[3,6]$ 上是二次函数,且 $f(x)\leqslant f(5)=3$,可知二次函数的最大值点为 $(5,3)$,故可设二次函数解析式为 $f(x)=a(x-5)^2+3\ (a\neq 0)$,

又 $f(6)=2$,$\therefore a(6-5)^2+3=2$,解得 $a=-1$,

$\therefore f(3)=-(3-5)^2+3=-1$,

又 $f(x)$ 为奇函数,$f(0)=0$,在 $x\in[0,3]$ 时,设 $f(x)=kx$,则 $k=-\dfrac{1}{3}$.

因此当 $x\in[0,6]$ 时,$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}x, & 0\leqslant x\leqslant 3,\\ -(x-5)^2+3, & 3\leqslant x\leqslant 6.\end{cases}$

又设 $x\in[-6,0]$,则 $-x\in[0,6]$,又 $f(x)$ 为奇函数,$\therefore f(x)=-f(-x)$,

$\therefore f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\begin{cases}(x+5)^2-3, & -6\leqslant x<-3,\\ -\dfrac{1}{3}x, & -3\leqslant x<3,\\ -(x-5)^2+3, & 3\leqslant x\leqslant 6.\end{cases}$

【方法探究】 求函数的解析式应根据不同的题意,寻求不同的方法.当已知函数的类型(如一次函数、二次函数等),一般用待定系数法,设出函数的解析式,然后根据条件求解(如本题).当已知函数满足某种关系(对定义域内的自变量总成立),可用代换法(如配凑法、换元法、方程组法等)求解函数的解析式.其中换元法求解析式时,要注意换元后变量范围应保持一致;方程组法求解析式的实质是用对称思想,一般来说,当自变量互为相反数、互为倒数或是函数具有奇偶性时,均可用此方法.

拓展 4 设函数 $f: R \to \mathbf{R}$，满足 $f(0)=1$，且对任意 $x, y \in \mathbf{R}$ 均有 $f(xy+1)=f(x)\cdot f(y)-f(y)-x+2$，则 $f(x)=$ ________

题型四 分段函数

【调研 5】 已知 $f(x)=\begin{cases} f(x+3), x \leqslant 0, \\ \log_3 x, x>0, \end{cases}$ 则 $f(-9)$ 等于

A. -1 B. 0 C. 1 D. 3

分析 设法将 -9 的函数值转化为某一个正数的函数值计算即可.

解析 由函数解析式知，$f(-9)=f(-9+4\times 3)=f(3)=\log_3 3=1$. 故选 C.

【考向预测】 函数解析式的考查一般有两类形式，一是抽象函数的解析式问题，关键是从抽象函数的性质入手；一是具体函数的解析式，这类考题一般会用分段函数来考查考生对函数概念的理解，这是近几年高考的一个热点. 解决分段函数问题的基本思想是“分段归类”，即自变量处在哪一段就充分利用这一段的函数解析式来分析解决问题.

拓展 5 已知 $x \in \mathbf{N}^*$，$f(x)=\begin{cases} x^2-35, x \geqslant 3, \\ f(x+2), x<3, \end{cases}$ 其值域设为 D. 给出下列数值：$-26, -1, 9, 14, 27, 65$，则其中属于集合 D 的元素是 ______（写出所有可能的数值）.

题型五 反函数

【调研 6】 已知函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{x+a}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=f(x)$，则 a 的值

A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

解析 由 $y=\dfrac{x+2}{x+a}$，得 $(y-1)x=2-ay$，即 $x=\dfrac{-ay+2}{y-1}$，$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-ax+2}{x-1}$. 若 $f^{-1}(x)=f(x)$，则 $a=-1$. 故选 B.

【知识链接】 求反函数的一般步骤是：①求出原函数的定义域与值域；②解关于 x 的方程，用 y 表示 x 得 $x=f^{-1}(y)$；③x, y 互换，得 $y=f^{-1}(x)$，并注明函数的定义域.

在反函数运算中要注意 $y=f(x+1)$ 与 $y=f^{-1}(x+1)$ 不是互为反函数，$y=f(x+1)$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)-1$，$y=f^{-1}(x+1)$ 是函数 $y=f^{-1}(x)$ 中自变量 x 换为 $x+1$ 的结果.

拓展 6 已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 的反函数是 $f^{-1}(x)$，而且 $|f^{-1}(-0.8)|:|f^{-1}(0.6)|=k$，则

A. $k \in (0, \frac{1}{2})$ B. $k \in (\frac{1}{2}, 1)$ C. $k \in (1, \frac{3}{2})$ D. $k \in (\frac{3}{2}, 2)$

【调研 7】 已知函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=g(x)$，若 $f(3)=-1$，则函数 $y=g(x-1)$ 的图像一定经过的一个点是

重点突破

A. $(-2,3)$　　B. $(2,-1)$　　C. $(0,3)$　　D. $(4,-1)$

解析　$\because f(3)=-1$，$y=g(x)$为$y=f(x)$的反函数，$\therefore g(-1)=3$. 而由$x-1=-1$知$x=0$，故$y=g(x-1)$的图像一定过定点$(0,3)$，故选C.

【技巧点拨】　函数与反函数的关系实质上是自变量与因变量的地位互换，即原函数的自变量和因变量分别为其反函数的因变量和自变量. 本题就是利用这个地位互换的关系，由$f(3)=-1$得出$g(-1)=3$这一结论的. 同样在本题中由这一地位互换的关系，可得出函数$y=f(x)$的图像与它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图像是关于直线$y=x$对称的. 它实质上是在解出x后，得出$x=f^{-1}(y)$，再把x与y互换，得出$y=f^{-1}(x)$所引起的图像变化.

拓展7　已知函数$f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$，函数$g(x)$与函数$y=f^{-1}(x+1)$的图像关于直线$y=x$对称，则$g(-1)$的值是

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. -1　　C. $\dfrac{-3}{2}$　　D. -3

强化闯关

1. 设$f^{-1}(x)$是函数$f(x)=\log_2(x+1)$的反函数，若$[1+f^{-1}(a)][1+f^{-1}(b)]=8$，则$f(a+b)$的值为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. $\log_2 3$

2. 已知函数$f(x)$的反函数为$y=f^{-1}(x)$，且$y=f(x)$的图像经过第三、四象限，那么函数$y=-f^{-1}(x)$的图像必经过的象限是

A. 第一、二象限　　B. 第二、三象限　　C. 第一、三象限　　D. 第二、四象限

3. 已知两个函数$f(x)$和$g(x)$的定义域和值域都是集合$\{1,2,3\}$，其定义如下表：

x	1	2	3
$f(x)$	2	3	1

x	1	2	3
$g(x)$	1	3	2

则填写$g[f(x)]$的表格，其三个数依次为

x	1	2	3
$g[f(x)]$			

A. 3，1，2　　B. 2，1，3

C. 1，2，3　　D. 3，2，1

4. 在密码学中，你直接可以看到的内容为明码，对明码进行某种处理后得到的内容为密码. 有一种密码，将英文的26个字母$a,b,c,\cdots,z$（不论大小写）依次对应1，2，3，…，26这26个自然数，见表格：

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

现给出一个变换公式：$x'=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2},(x\in\mathbf{N}^*,1\leqslant x\leqslant 26,x\text{ 为奇数}),\\ \dfrac{x}{2}+13,(x\in\mathbf{N}^*,1\leqslant x\leqslant 26,x\text{ 为偶数})\end{cases}$，可将英文的明文（明码）转换成密码，按上述规定，若将英文的明文译成的密码是 $shxc$，那么原来的明文是______.

5. 已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$，当点 $P(x_0,y_0)$ 在 $y=f(x)$ 的图像上移动时，点 $Q(\frac{x_0-t+1}{2},y_0)$ $(t\in\mathbf{R})$ 在函数 $y=g(x)$ 的图像上移动.

(1) 若点 P 坐标为 $(1,-1)$，点 Q 也在 $y=f(x)$ 的图像上，求 t 的值；

(2) 求函数 $y=g(x)$ 的解析式；

6. 已知函数 $f(x)=(1+\frac{2}{x-1})^{-2}$，$(x>1)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的解析式及其定义域；

(2) 若当 $x\in(\frac{1}{16},\frac{1}{4}]$ 时，不等式 $(1-\sqrt{x})f^{-1}(x)>a(a-\sqrt{x})$ 恒成立，试求实数 a 的取值范围.

参考答案

【拓展】

1. B　由 $x^3-x+2=2$，得 $x^3-x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=\pm1$. 故选 B.

2. D　由 $f(a)+f(b)+f(c)=-1+0+1=0$，这样的映射有 $A_3^3=6$ 个，又由 $f(a)+f(b)+f(c)=0+0+0=0$，这样的映射有 1 个，故共有 7 个. 故选 D.

3. D　由题意知，$ax^2+4ax+3=0$ 无解. 当 $a=0$ 时，$3\neq0$ 满足；当 $a\neq0$ 时，$\Delta<0$ 即 $16a^2-12a<0$，解得 $0<a<\frac{3}{4}$. 故 $a\in[0,\frac{3}{4})$. 故选 D.

4. $x+1$　令 $x=y=0$，得 $f(1)=f(0)f(0)-f(0)-0+2$，得 $f(1)=2$. 又令 $y=0$，得 $f(1)=f(x)f(0)-f(0)-x+2$，$\therefore f(x)=x+1$.

5. $-26,14,65$　注意函数的定义域是 $\mathbf{N}^*$，由分段函数解析式可知，所有自变量的函数值最终都是转化为大于等于 3 的对应自变量函数值计算的，$f(3)=9-35=-26$，$f(4)=16-35=-19$，$f(5)=25-35=-10$，$f(6)=36-35=1$，$f(7)=49-35=14$，$f(8)=64-35=29$，$f(9)=81-35=46$，$f(10)=100-35=65$. 故正确答案应填 $-26,14,65$.

6. D　$\because f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，$\therefore k=|f^{-1}(-0.8)|:|f^{-1}(0.6)|=\ln9:\ln4=\ln3:\ln2=\log_2 3$. 又 $2\sqrt{2}<3<4$，$\therefore \frac{3}{2}<k<2$. 故选 D.

7. C　$\because f^{-1}(x+1)=\frac{x+4}{x-1}$，函数 $g(x)$ 的图像与函数 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图像关于直线 y

重点突破

$=x$ 对称，$\therefore \dfrac{x+4}{x-1}=-1$ 解之得 $x=-\dfrac{3}{2}$，$\therefore g(-1)=-\dfrac{3}{2}$. 故选 C.

【强化闯关】

1. B　$\because [1+f^{-1}(a)][1+f^{-1}(b)]=8$，$\therefore 2^a\cdot 2^b=8$，即 $a+b=3$，$\therefore f(a+b)=2$. 故选 B.

2. B　$y=f(x)$ 的图像经过第三、四象限，$y=f^{-1}(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称必经过第二、三象限，$y=-f^{-1}(x)$ 关于 x 轴对称，图像仍然过第二、三象限. 故选 B.

3. D　$g[f(1)]=g(2)=3$，$g[f(2)]=g(3)=2$，$g[f(3)]=g(1)=1$. 故选 D.

4. $love$　例如 $s\to 19=\dfrac{12}{2}+13\to 12\to l$. 同理可得 $h\to o$，$x\to v$，$c\to e$.

5. (1) 当点 P 坐标为 $(1,-1)$，点 Q 的坐标为 $(\dfrac{1-t+1}{2},-1)$.

$\because$ 点 Q 也在 $y=f(x)$ 的图像上，$\therefore -1=\log_{\frac{1}{2}}(1-\dfrac{t}{2}+1)$，即 $t=0$.

(2) 设 $Q(x,y)$ 在 $y=g(x)$ 的图像上，则 $\begin{cases} x=\dfrac{x_0-t+1}{2}, \\ y=y_0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_0=2x+t-1, \\ y_0=y, \end{cases}$

而 $P(x_0,y_0)$ 在 $y=f(x)$ 的图像上，$\therefore y_0=\log_{\frac{1}{2}}(x_0+1)$，

代入得 $y=g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2x+t)$ 即为所求.

6. (1) $f(x)=(\dfrac{x-1}{x+1})^2=y$，$\because x>1$，$\therefore \dfrac{x-1}{x+1}>0$，

$\therefore \dfrac{x-1}{x+1}=\sqrt{y}$，$x=\dfrac{\sqrt{y}+1}{1-\sqrt{y}}$，$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}$，

又 $\because \dfrac{\sqrt{y}+1}{1-\sqrt{y}}=x>1$，$\therefore \dfrac{\sqrt{y}+1}{1-\sqrt{y}}-1>0$，

$\therefore \dfrac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{y}}>0$，$\therefore 0<\sqrt{y}<1$，$\therefore 0<y<1$，

即 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}$，其定义域为 $(0,1)$.

(2) 由 $(1-\sqrt{x})\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}>a(a-\sqrt{x})$，得 $(a+1)\sqrt{x}>a^2-1$，显然 $a+1\neq 0$，

$\therefore$ 当 $a+1>0$，即 $a>-1$ 时，$\sqrt{x}>a-1$，$\therefore a<\sqrt{x}+1$.

$\because \dfrac{1}{16}<x\leqslant\dfrac{1}{4}$，$\therefore \dfrac{1}{4}<\sqrt{x}\leqslant\dfrac{1}{2}$，$\therefore \dfrac{5}{4}<\sqrt{x}+1\leqslant\dfrac{3}{2}$，$\therefore -1<a\leqslant\dfrac{5}{4}$，

$\therefore$ 当 $a+1<0$，即 $a<-1$ 时，$\sqrt{x}<a-1$，$\therefore a>\sqrt{x}+1$，$\dfrac{5}{4}<\sqrt{x}+1\leqslant\dfrac{3}{2}$，$\therefore a>\dfrac{3}{2}$ 与

$a<-1$矛盾,∴ 此时 a 无解.

综上所述,a 的取值范围是$\left(-1,\frac{5}{4}\right]$.

重点 3 函数的基本性质与图像

重点诠释

函数的基本性质与图像是高考对函数内容考查的重中之重. 熟练掌握函数的基本性质与图像,是夺取高考高分的必要条件.

1. 函数的基本性质包括函数的单调性、奇偶性、周期性和函数图像的对称性等. 函数性质的考查一般是函数奇偶性的判定及应用;函数单调性的判定与应用;函数最值的判定与求法. 试题既有明确研究函数某一基本性质的中档客观题,也有隐性考查函数性质应用的高档客观题或解答题. 近年来,以组合形式一题多角度考查函数性质的高考题正成为新的热点. 掌握函数的基本性质,一要注意定义域优先的原则,不能忽视定义域对函数性质的影响;二要学会"回到定义去",特别是抽象函数,要能够从函数性质的定义出发,研究抽象函数的一些性质.

2. 函数图像的考查多以基本初等函数的图像为基础,考查考生的作图、用图与变图能力. 试题一般以选择题或填空题形式出现,内容可以是给出函数的解析式或函数满足的条件,确定函数的图像;或给出函数的图像,求函数的解析式;也可以是给出函数图像,确定解析式中参数的值或取值范围;或考查函数图像的初等变换等. 函数图像是研究函数性质的基础,应结合图像去记忆性质;反过来,研究函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性等性质能更准确地确定函数的图像.

题型一 函数的单调性

【调研 1】 设函数 $f(x)=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0\end{cases}$,$g(x)=x^2f(x-1)$,则函数 $g(x)$ 的递减区间是

A. $(-\infty,0]$ B. $[0,1)$

C. $[1,+\infty)$ D. $[-1,0]$

解析 $g(x)=\begin{cases}x^2,x>1,\\0,x=1,\\-x^2,x<1\end{cases}$,如图 2-3-1 所示,其递减区间是 $[0,1)$. 故选 B.

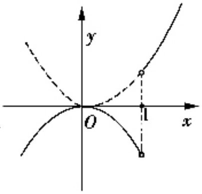


图 2-3-1

【方法探究】 判断函数单调性的方法有定义法、图像法、导数法和复合函数法,其中证明函数的单调性只能用定义法和导数法,图像法侧重图形直观,复合函数法偏重逻辑推理

(1) 定义法:作差($f(x_1)-f(x_2)$)$\to$变形(将差分解为几个能够判断正负的因式乘积的形

重点突破

式）定号（确定差值的正负）判断（结合定义下结论）.

（2）图像法：作出函数图像，观察函数图像的上升与下降.

（3）导数法：一般地，若函数 $y=f(x)$ 在某区间内可导，如果 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 为增函数 如果 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 为减函数（注意函数的定义域）.

（4）复合函数法："同增异减"，即内外函数单调性相同时为增函数，内外函数单调性相反时为减函数.

拓展 1　已知函数 $f(x)=x^3+x$，且 $a+b>0$，$b+c>0$，$c+a>0$，则 $y=f(a)+f(b)+f(c)$ 的值为

A. 正数　　B. 负数　　C. 零　　D. 正数或负数

题型二　函数的奇偶性

【调研 2】　定义在 R 上的函数 $f(x)=\log_4(x+\sqrt{x^2+\frac{a}{4}})$ $(a>0)$ 为奇函数，则 $\log_4(a+4)=$______.

解析　由条件知 $f(-x)=-f(x)$，即 $f(x)+f(-x)=0$，$\therefore \log_4(x+\sqrt{x^2+\frac{a}{4}})+\log_4(-x+\sqrt{x^2+\frac{a}{4}})=0$，化简得 $\log_4[(x^2+\frac{a}{4})-x^2]=0$，$\therefore a=4$，故 $\log_4(a+4)=\log_4 8=\frac{3}{2}$.

【方法探究】　函数的奇偶性是函数的整体性质，它研究定义域内任意互为相反数的两个量 x 与 $-x$ 的函数关系. 判断函数奇偶性的基本步骤是：①求函数定义域，看定义域是否为关于原点对称的区间；②验证 $f(-x)$ 是否等于 $f(x)$ 或 $-f(x)$.

需要引起注意的是以下方面：①函数的定义域影响函数的奇偶性，也影响函数解析式的变形，如 $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$ 就是奇函数；②在对函数式 $f(-x)$ 进行分析变形时，要注意代数式的变形技巧，如"分子有理化"对函数 $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性判定特别有效；③要学会运用函数奇偶性判定的变式，如本题中的 $f(x)+f(-x)=0$ 等. ④任一个定义域关于原点对称的函数都可表示为一个奇函数与一个偶函数的和与差的形式.

拓展 2　设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\frac{a\cdot 2^x+a-2}{2^x+1}$ $(x\in\mathbf{R})$ 是奇函数，求常数 a 的值.

题型三　函数的周期性

【调研 3】　函数 $y=f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，且当 $x\in[-2,2)$ 时，$f(x)=\frac{x}{2}+1$，则当 $x\in[2n,2n+4)$ 时，试求函数 $f(x)$ 的解析式.

解析　因为函数 $y=f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数.

(1) 当 n 为奇数时，$2n+2=2(n+1)$ 为 4 的倍数.

当 $x\in[2n,2n+4)$ 时，则 $x-2n-2\in[-2,2)$，所以 $f(x-2n-2)=\dfrac{x-2n-2}{2}+1$，于是有 $f(x)=f(x-2n-2)=\dfrac{x-2n-2}{2}+1=\dfrac{x}{2}-n$.

(2) 当 n 为偶数时，可以知道 $2n$、$2n+4$ 为 4 的倍数. 当 $x\in[2n,2n+2)$ 时，有 $x-2n\in[0,2)$，于是 $f(x-2n)=\dfrac{x-2n}{2}+1$. 从而有 $f(x)=f(x-2n)=\dfrac{x-2n}{2}+1=\dfrac{x}{2}-n+1$. 当 $x\in[2n+2,2n+4)$ 时，有 $x-2n-4\in[-2,0)$.

于是有 $f(x-2n-4)=\dfrac{x-2n-4}{2}+1$，所以 $f(x)=f(x-2n-4)=\dfrac{x-2n-4}{2}+1=\dfrac{x-2n}{2}-1=\dfrac{x}{2}-n-1$.

综合(1)(2)，可以得到：当 n 为奇数时，$f(x)=\dfrac{x}{2}-n$，$x\in[2n,2n+4)$；

当 n 为偶数时，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}-n+1, & x\in[2n,2n+2),\\ \dfrac{x}{2}-n-1, & x\in[2n+2,2n+4).\end{cases}$

【知识链接】 本题涉及到周期函数的概念. 所谓周期函数，就是存在非零常数 T，使得对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意 x，都有 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，其中 T 叫做周期函数 $f(x)$ 的周期. 若周期函数 $f(x)$ 的所有周期中，存在最小正周期 T，则 T 叫做 $f(x)$ 的最小正周期. 由于周期函数在《考试大纲》中的要求属“了解”之列，因此，在高考中仅考查到周期函数这一概念和简单函数的最小正周期的求法等问题. 求周期函数的解析式，关键是利用“$f(x+T)=f(x)$”这一性质，把问题转化到已知区间上的解析式问题，即用“$x+T$”代替已知区间上的解析式中所有的“x”.

拓展 3 对任意实数 x，定义 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数（例如 $[3.4]=3$，$[-3.4]=-4$ 等），设函数 $f(x)=x-[x]$，给出下列四个结论：① $f(x)\geqslant 0$；② $f(x)<1$；③ $f(x)$ 是周期函数；④ $f(x)$ 是偶函数. 其中正确结论的个数是

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

题型四 函数图像的对称性

【调研 4】 给出四个命题①函数 $y=a^{|x|}$ 与 $y=\log_a|x|$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称 $(a>0,a\neq1)$；②函数 $y=a^{|x|}$ 与 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{|x|}$ 的图像关于 y 轴对称 $(a>0,a\neq1)$；③函数 $y=\log_a|x|$ 与 $y=\log_{\frac{1}{a}}|x|$ 的图像关于 x 轴对称 $(a>0,a\neq1)$；④函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图像关于直线 $y=x+1$ 对称，其中正确的命题是______.

分析 画出函数的图像，或根据图像对称的函数特征进行辨别或分析推断，还可以利用具备对称性的特殊点进行验证.

重点突破

解析　①函数 $y=\log_a|x|$ 的图像过 $(-1,0)$，但函数 $y=a^{|x|}$ 的图像不过 $(0,-1)$，所以不关于直线 $y=x$ 对称；②显然点 $(2,a^2)$ 在函数 $y=a^{|x|}$ 的图像上，而其关于 y 轴的对称点 $(-2,a^2)$ 不在函数 $y=(\frac{1}{a})^{|x|}$ 的图像上故不成立；③$y=\log_{\frac{1}{a}}|x|=\log_{\frac{1}{a}}|x|=-\log_a|x|$，显然与函数 $y=\log_a|x|$ 的图像关于 x 轴对称；④因为函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，整体向左平移一个单位，所以函数 $y=f(x+1)$ 与 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图像关于直线 $y=x+1$ 对称. 设点 (x,y) 是函数 $y=f(x)$ 上的任意一点，其关于直线 $y=x+1$ 对称的对称点为 $(y-1,x+1)$. 故正确的命题只有③.

【知识链接】　函数图像的对称，一般有如下几种：

① $y=f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称；

② $y=-f(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图像关于 x 轴对称；

③ $y=-f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图像关于原点对称；

④ $y=f(a-x)$ 与 $y=f(a+x)$ 的图像关于 y 轴对称；但当 $f(a+x)=f(a-x)$ 时，则有 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称；

⑤若 $f(a+x)+f(a-x)=0$，则 $y=f(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 对称；若 $f(a+x)+f(a-x)=2b$，则 $y=f(x)$ 的图像关于点 (a,b) 对称.

拓展 4　函数 $y=a^{x+1}$ 与，$y=\log_a(x+1)$（其中 $a>0$ 且 $a\neq1$）的图像关于

A. 直线 $y=x$ 对称　　B. 直线 $y=x-1$ 对称

C. 直线 $y=x+1$ 对称　　D. 直线 $y=-x+1$ 对称

【调研 5】　已知 $y=f(2x+1)$ 是偶函数，则函数 $y=f(2x)$ 的图像关于直线______对称，函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线______对称.

解析一　函数 $y=f(2x+1)$ 的图像是由函数 $y=f(2x)$ 的图像沿 x 轴方向，向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位得到的，而 $y=f(2x+1)$ 是偶函数，其图像关于 y 轴对称，所以函数 $y=f(2x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称. 又函数 $y=f(2x)$ 的图像是由函数 $y=f(x)$ 的图像上所有点的纵坐标不变，横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 得到的，故函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称.

解析二　$\because y=f(2x+1)$ 是偶函数，$\therefore f(-2x+1)=f(2x+1)$，$\therefore f(1-x)=f(1+x)$，故函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，函数 $y=f(2x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称.

【方法探究】　函数图像的对称性是函数奇偶性图像特征的进一步拓展，我们不仅可以从函数的变换角度去理解图像的对称性（本题的解析一），也可以用函数的代数特征去处理函数的对称性（本题的解析二）. 事实上，函数 $y=f(x)$ 与 $y=f(-x)$ 的图像关于直线 $x=0$ 对称的实质是因为互为相反数的两个自变量的函数值相等，进一

步,函数 $y=f(x+a)$ 与 $y=f(-x+a)$ 的意义也是互为相反数的两个自变量的函数值相等,其图像同样关于直线 $x=0$ 对称. 而函数 $y=f(x+a)$ 与 $y=f(-x-a)$,令 $X=x+a$ 时,才有 $y=f(X)$ 与 $y=f(-X)$,所以它们的图像关于直线 $X=0$ 对称,即关于直线 $x=-a$ 对称.

拓展5 若函数 $y=f(x)$ 是周期为 t 的奇函数,则 $y=f(2x+1)$ 是

A. 周期为 $2t$ 的周期函数且图像有对称中心 $(-1,0)$

B. 周期为 $2t$ 的周期函数且图像有对称中心 $(-\frac{1}{2},0)$

C. 周期为 $\frac{1}{2}t$ 的周期函数且图像有对称中心 $(-1,0)$

D. 周期为 $\frac{1}{2}t$ 的周期函数且图像有对称中心 $(-\frac{1}{2},0)$

题型五 函数的图像

【调研6】 由函数 $y=\log_2 x$ 的图像经过下列哪种平移可得函数 $y=\log_2(x-1)-3$ 的图像

A. 向左平移1个单位,向下平移3个单位

B. 向左平移1个单位,向上平移3个单位

C. 向右平移1个单位,向下平移3个单位

D. 向右平移1个单位,向上平移3个单位

解析 由函数 $y=\log_2 x$ 的图像,首先向右平移1个单位得函数 $y=\log_2(x-1)$ 的图像,再向下平移3个单位,即得函数 $y=\log_2(x-1)-3$ 的图像,故选C.

【知识链接】 作函数图像的常用方法是描点法和变换作图法,其中变换作图法是近几年高考的热点之一. 变换作图有平移变换、伸缩变换、对称变换等.

(1)平移变换:$y=f(x\pm a)(a>0)$ 的图像,可由 $y=f(x)$ 的图像向左或向右平移 a 个单位得到;$y=f(x)\pm b(b>0)$ 的图像,可由 $y=f(x)$ 的图像向上或向下平移 b 个单位得到.

(2)伸缩变换:$y=af(x)(a>0)$ 的图像,可将 $y=f(x)$ 图像上每个点的纵坐标伸长($a>1$)或缩短($0<a<1$)为原来的 a 倍(横坐标不变);$y=f(ax)(a>0)$ 的图像,可将 $y=f(x)$ 图像上每个点的横坐标伸长($0<a<1$)或缩短($a>1$)为原来的 $\frac{1}{a}$ 倍(纵坐标不变).

(3)对称变换:$y=f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称;$y=f(x)$ 与 $y=-f(x)$ 的图像关于 x 轴对称;$y=-f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图像关于原点对称;$y=f(|x|)$ 的图像当 $x\geqslant 0$ 与 $y=f(x)$ 的图像重合,当 $x<0$ 时的图像与 $x>0$ 时图像关于 y 轴对称;$y=|f(x)|$ 的图像可将 $y=f(x)$ 的图像在 x 轴下方部分以 x 轴为对称轴翻折到 x 轴上方,其余部分不变.

重点突破

拓展6　将函数 $f(x)=\frac{2}{x+a}$ 的图像按向量 $\boldsymbol{m}=(-1,0)$ 平移后,得到函数 $y=g(x)$ 的图像 C,若曲线 C 关于原点对称,那么实数 a 的值是

A. -1　　B. -3　　C. 0　　D. 1

【调研7】　若函数 $y=\frac{(2-m)x}{x^2+m}$ 的图像如图2-3-2所示,则 m 的取值范围为

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(1,2)$

C. $(-1,2)$　　D. $(0,2)$

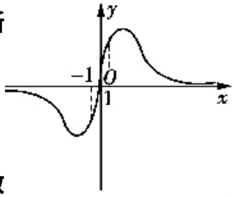


图2-3-2

解析　$\because x>0$ 时,$f(x)>0$,$\therefore 2-m>0$,即 $m<2$. $\because$ 函数的定义域为R,即 x^2+m 恒不等于0,$\therefore m>0$. 又在 $(0,+\infty)$ 上函数 $f(x)$ 在 $x=x_0(x_0>1)$ 处取得最大值,而 $y=\frac{2-m}{x+\frac{m}{x}}$,$\therefore x_0=\sqrt{m}>1$,即 $m>1$. 故 $1<m<2$,故选B.

【技巧点拨】　由函数解析式,可以画出函数的图像,反之,由图像也可以确定函数解析式的代数结构特征,其中建立二者关联的纽带就是函数的性质. 本题由函数的图像特征反映出函数的函数性质(如定义域、值域、单调性、奇偶性等),再由函数性质确定相应参数的取值范围. 解决这类问题需要充分挖掘图形的几何特征,正确解读函数图像所突显的函数性质.

拓展7　已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像如图2-3-3所示,若 $M=|a-b+c|+|2a+b|$,$N=|a+b+c|+|2a-b|$,则 M 与 N 的大小关系是

A. $M\geqslant N$　　B. $M\leqslant N$

C. $M<N$　　D. $M>N$

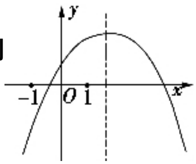


图2-3-3

【调研8】　已知函数 $f(x)=-\sqrt{x+1}$,设 $a_n=\frac{f(x_n)-2}{x_n}$,若 $-1\leqslant x_1<0<x_2<x_3$,则

A. $a_2<a_3<a_1$　　B. $a_1<a_2<a_3$　　C. $a_1<a_3<a_2$　　D. $a_3<a_2<a_1$

解析　如图2-3-4,画出函数 $f(x)=-\sqrt{x+1}$ 的图像,则 $a_n=\frac{f(x_n)-2}{x_n}$ 表示曲线上动点 $(x_n,f(x_n))$ 与定点 $(0,2)$ 所在直线的斜率,显然 $a_2<a_3<0<a_1$. 故选A.

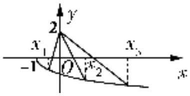


图2-3-4

【考向预测】　数形结合是高中数学重要的数学思想方法之一. 数形结合的实质是将抽象的数学语言与直观的图形语言结合起来,使抽象思维和形象思维结合起来,实现抽象概念与具体形象的联系和转化,化难为易,化抽象为直观. 高考试题在突出

能力和素质要求的同时，十分注重数形结合思想的考查. 数形结合就是充分利用图形进行定性分析，避免对数据进行定量计算的繁冗.

拓展8 **定义在$[-2,2]$上的偶函数$f(x)$，它在$[0,2]$上的图像是一条如图2-3-5所示的线段，则不等式$f(x)+f(-x)>x$的解集为______.**

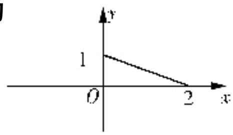


图2-3-5

题型六 抽象函数

【调研9】 $f(x)$**定义域为**$(0,+\infty)$**，且对一切**$x>0,y>0$**都有**$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$**，当**$x>1$**时，有**$f(x)>0$.

(1) 求$f(1)$**的值；**

(2) 判断$f(x)$**的单调性并证明；**

(3) 若$f(6)=1$**，解不等式**$f(x+3)-f(\frac{1}{x})<2$.

解析 (1) $f(1)=f(\frac{x}{x})=f(x)-f(x)=0$，$x>0$.

(2) 设$0<x_1<x_2$，则由$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$，得$f(x_2)-f(x_1)=f(\frac{x_2}{x_1})$，

$\because \frac{x_2}{x_1}>1$，$\therefore f(\frac{x_2}{x_1})>0$，

$\therefore f(x_2)-f(x_1)>0$，即$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数.

(3) $\because f(6)=f(\frac{36}{6})=f(36)-f(6)$，$\therefore f(36)=2$，

原不等式化为$f(x^2+3x)<f(36)$，

$\because f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，

$\therefore \begin{cases} x+3>0, \\ \frac{1}{x}>0, \\ x^2+3x<36, \end{cases}$ 解得$0<x<\frac{3\sqrt{17}-3}{2}$.

【技巧点拨】 **对于抽象函数单调性的判断，关键是如何充分利用抽象函数的性质，这时往往需要赋值尝试，按图索骥. 本题的另一个"看点"就是函数单调性的可逆性，函数的单调性使得自变量的不等关系和函数之间的不等关系可以"正逆互推"，利用函数单调性的可逆性，可以"脱去"函数符号"f".**

拓展9 **若函数**$f(x)$**是定义在**$(0,+\infty)$**上的增函数，且对一切**$x>0,y>0$**满足**$f(xy)=f(x)+f(y)$**，则不等式**$f(x+6)+f(x)<2f(4)$**的解集为**

A. $(-8,2)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $(0,2)$　　D. $(0,+\infty)$

【调研10】 **已知**$f(x)$**是定义在R上的不恒为零的函数，且对任意的**$a,b\in \mathbf{R}$**都满足**$f(a\cdot b)=af(b)+bf(a)$. **试判断**$f(x)$**的奇偶性，并证明你的结论.**

重点突破

解析　$f(x)$是奇函数. 证明如下：

令 $a=b=1$，得$f(1\cdot1)=1\cdot f(1)+1\cdot f(1)$，即$f(1)=2f(1)$，解得$f(1)=0$.

又令 $a=b=-1$，得$f(1)=f[(-1)\cdot(-1)]=(-1)\cdot f(-1)+(-1)\cdot f(-1)=-2f(-1)$，$\therefore f(-1)=0$，

$\therefore f(-x)=f[(-1)\cdot x]=-f(x)+xf(-1)=-f(x)$，

$\therefore f(x)$是奇函数.

【技巧点拨】　这是一类研究抽象函数性质的问题，利用奇偶函数的定义，计算$f(-x)$是此题的切入点.

拓展 10　函数 $g(x)$满足 $g(x)g(-x)=1$，且 $g(x)\neq1$，$g(x)$不恒为常数，则函数 $F(x)=\dfrac{g(x)+1}{g(x)-1}$

A. 是奇函数不是偶函数　　B. 是偶函数不是奇函数

C. 既是奇函数又是偶函数　　D. 既不是奇函数也不是偶函数.

强化闯关

1. 设函数 $F(x)=f(x)+f(-x)$，$x\in\mathbf{R}$，$[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$是函数 $F(x)$的单调递增区间，将 $F(x)$的图像按 $\boldsymbol{a}=(\pi,0)$平移得到一个新的函数 $G(x)$的图像，则 $G(x)$的单调递减区间必定是

A. $[-\frac{\pi}{2},0]$　　B. $[\frac{\pi}{2},\pi]$　　C. $[\pi,\frac{3\pi}{2}]$　　D. $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$

2. 已知函数 $y=f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$满足$f(x+1)=f(x-1)$，且$x\in[-1,1]$时，$f(x)=x^2$，则 $y=f(x)$与 $y=\log_5x$ 的图像的交点个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 关于函数$f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$，有下列三个命题：①对于任意 $x\in(-1,1)$，都有$f(x)+f(-x)=0$；②$f(x)$在$(-1,1)$上是减函数；③对于任意 $x_1,x_2\in(-1,1)$，都有$f(x_1)+f(x_2)=f(\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2})$. 其中正确的命题序号是______.

4. 已知函数$f(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx+c}$$(a,b,c\in\mathbf{R})$是奇函数，又 $f(1)=2$，$f(2)=3$.

(1) 求 a,b,c 的值；

(2) 当 $x>0$ 时，讨论函数$f(x)$的单调性，并写出证明过程.

5. 定义在区间$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足对任意的实数 x、y 都有 $f(x^y)=yf(x)$.

(1) 求$f(1)$的值；

(2) 若 $a>b>c>1$，且 a,b,c 成等比数列，求证：$f(a)f(c)<[f(b)]^2$；

(3) 若$f(\frac{1}{2})<0$，求证：$f(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数.

参考答案

【拓展】

1. A　函数$f(x)=x^3+x$是奇函数且是增函数，由$a+b>0$，$b+c>0$，$c+a>0$，得$f(a)+f(b)>0$，$f(b)+f(c)>0$，$f(c)+f(a)>0$则$y=f(a)+f(b)+f(c)>0$. 故选A.

2. 由条件知，$f(x)+f(-x)=0$，而$f(x)+f(-x)=\frac{a\cdot 2^x+a-2}{2^x+1}+\frac{a\cdot 2^{-x}+a-2}{2^{-x}+1}=\frac{a\cdot 2^x+a-2}{2^x+1}+\frac{a+(a-2)\cdot 2^x}{1+2^x}=\frac{(2a-2)\cdot 2^x+2a-2}{2^x+1}=2a-2$，所以$a=1$.

3. C　由题意有$[x]\leqslant x<[x]+1$，$\therefore f(x)=x-[x]\geqslant 0$，且$f(x)<1$，$\therefore$ ①②正确. $\because f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-([x]+1)=x-[x]=f(x)$，$\therefore f(x)$为周期函数. $\because f(-0.1)=-0.1-[-0.1]=-0.1-(-1)=0.9$，$f(0.1)=0.1-[0.1]=0.1-0=0.1\neq f(-0.1)$，$\therefore f(x)$不是偶函数. 故选C.

4. C　$\because$ 函数$y=a^x$与$y=\log_a x$的图像关于直线$y=x$对称，而函数$y=a^{x+1}$与$y=\log_a(x+1)$的图像分别是由函数$y=a^x$与$y=\log_a x$的图像向左平移1个单位而得，$\therefore$ 函数$y=a^x$与$y=\log_a x$的图像的对称轴可以是由直线$y=x$向左平移1个单位可得对称轴为$y=x+1$. 故选C.

5. D　根据函数$y=f(2x+1)$与$y=f(x)$的图像关系，易知周期为$\frac{1}{2}t$，对称中心为$(-\frac{1}{2},0)$. 故选D.

6. A　函数$f(x)=\frac{2}{x+a}$的图像按向量$\boldsymbol{m}=(-1,0)$平移后，函数解析式为$f(x)=\frac{2}{x+1+a}$，因其关于原点对称，所以$1+a=0$，即$a=-1$，故选A.

7. C　由二次函数的图像可以看出，$\begin{cases}a<0, & ①\\ f(-1)<0, & ②\\ f(1)>0, & ③\\ -\frac{b}{2a}>1, & ④\end{cases}$ 即$\begin{cases}a<0,\\ a-b+c<0,\\ a+b+c>0,\\ \frac{2a+b}{2a}<0,\end{cases}$

$\therefore M=b-a-c+2a+b=a+2b-c$，$N=a+b+c+b-2a=-a+2b+c$，

$\therefore M-N=2(a-c)<0$，即$M<N$. 故选C.

8. $[-2,1)$　$\because$ 函数$f(x)$是偶函数，$\therefore$ 原不等式可化为$f(x)>\frac{x}{2}$. 如图2-3-6，容易求得不等式解集为$[-2,1)$.

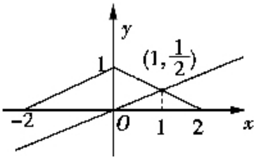


图2-3-6

9. C　$\because f(xy)=f(x)+f(y)$，$\therefore$ 由$f(x+6)+f(x)<$

重点突破

$2f(4)$，得$\begin{cases}x+6>0,\\x>0,\\f[(x+6)x]<f(16),\end{cases}$ 又函数 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的增函数，

$\therefore\begin{cases}x>0,\\x(x+6)<16,\end{cases}$ 解得 $\{x|0<x<2\}$. 故选 C.

10. A $F(-x)=\dfrac{g(-x)+1}{g(-x)-1}$，$\because g(x)g(-x)=1$，$\therefore F(-x)=\dfrac{\frac{1}{g(x)}+1}{\frac{1}{g(x)}-1}=\dfrac{1+g(x)}{1-g(x)}=$

$-F(x)$. $\therefore F(x)$ 是奇函数. 故选 A.

【强化闯关】

1. D 由已知可得 $F(x)$ 为偶函数，$\because F(x)$ 在 $[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$ 上为增函数，$\therefore F(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 上是减函数. 而 $G(x)$ 由 $F(x)$ 向右平移 π 个单位而得，故它一个减区间是 $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$. 故选 D.

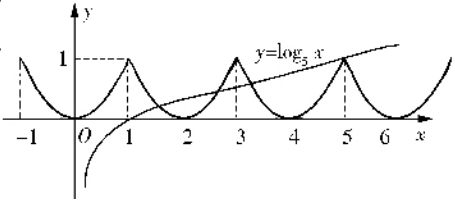


图 2-3-7

2. D $\because f(x+1)=f(x-1)$，$\therefore f(x+2)=f(x)$，即 $y=f(x)$ 是周期函数且 2 为它的一个周期. 又$\because x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=x^2$，利用周期性作出函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=\log_5 x$ 的图像，如图 2-3-7 所示，观察即得交点个数为 4 个.

3. ①②③ ①$f(x)+f(-x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}+\lg\dfrac{1+x}{1-x}=\lg 1=0$ 成立；②$\because \dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{2-(1+x)}{1+x}$

$=\dfrac{2}{1+x}-1$ 在 $(-1,1)$ 上为减函数，故 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$ 在 $(-1,1)$ 上是减函数；

③$\because f(x_1)+f(x_2)=\lg\dfrac{1-x_1}{1+x_1}+\lg\dfrac{1-x_2}{1+x_2}=\lg\dfrac{1-x_1-x_2+x_1x_2}{1+x_1+x_2+x_2x_2}=\lg\dfrac{1-\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}{1+\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}=$

$f(\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2})$ 成立，故 3 个命题都正确.

4. (1)$\because f(x)$ 为奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$，即 $\dfrac{ax^2+1}{-bx+c}=\dfrac{ax^2+1}{-bx-c}$，

比较分母的系数，得 $c=0$，又 $f(1)=2$，$f(2)=3$，

得$\begin{cases}\dfrac{a+1}{b}=2,\\\dfrac{4a+1}{2b}=3,\end{cases}$ 解得 $a=2$，$b=\dfrac{3}{2}$.

$\therefore a=2, b=\frac{3}{2}, c=0$ 即为所求.

(2) $f(x)=\frac{2x^2+1}{\frac{3}{2}x}=\frac{4x^2+2}{3x}\geqslant\frac{4\sqrt{2}x}{3x}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$,

由 $f(x)$ 取最值 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 时, $4x^2=2(x>0)$ 得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 在 $(0,+\infty)$ 上任取 $x_1<x_2$,

$\because f(x_2)-f(x_1)=\frac{4x_2^2+2}{3x_2}-\frac{4x_1^2+2}{3x_1}=\frac{(4x_2-4x_1)(x_1x_2-\frac{1}{2})}{3x_1x_2}$.

$\therefore$ 当 $0<x_1<x_2\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $f(x_2)<f(x_1)$, $f(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$ 上是减函数.

$\therefore$ 当 $\frac{\sqrt{2}}{2}<x_1<x_2$ 时, $f(x_2)>f(x_1)$, $f(x)$ 在 $(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 上是增函数.

5. (1) $\because$ 对任意的实数 x、y 都有 $f(x^y)=yf(x)$, 若令 $x=1, y=2$, 则有 $f(1^2)=2f(1)$,
$\therefore f(1)=0$.

(2) $\because a>b>c>1$, $\therefore$ 存在正数 p、q $(p\neq q)$, 使得 $a=b^p, c=b^q$,

$\because a, b, c$ 成等比数列, $\therefore b^2=ac=b^{p+q}$, 故 $p+q=2$, $\therefore pq<(\frac{p+q}{2})^2=1$,

$\therefore f(a)f(c)=f(b^p)f(b^q)=pq\,f^2(b)<f^2(b)$.

(3) 对任意 $0<x_1<x_2$, 存在 s、t 使得 $x_1=(\frac{1}{2})^s, x_2=(\frac{1}{2})^t$, 且 $s>t$,

$\therefore f(x_1)-f(x_2)=f[(\frac{1}{2})^s]-f[(\frac{1}{2})^t]=(s-t)f(\frac{1}{2})<0$, 即 $f(x_1)<f(x_2)$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

重点 4　指数函数与对数函数

重点诠释

指数函数与对数函数是高中数学的两大重要函数，是高考函数部分试题的重点考核内容. 试题常见考查形式是中等难度的选择题或填空题，有时也会出现以指(对)数函数为背景的综合问题.

1. 指数式、对数式是代数式运算问题，一般高考试题不单独考查，但式的运算、变形、求值及化简是研究方程、不等式和函数的必备工具，必须熟练掌握分数指数幂的运算性质与对数运算法则.

2. 指数、对数函数的基本性质与图像是高考考查的重点内容，题型一般也为选择题或填空题，但难度偏大. 从试题内容看，一是利用它们的概念、图像与性质，研究简单复合函数的单调性、奇偶性等性质；二是利用它们的图像，通过图像变换作图，画出其他函数的图

像;三是会利用指数函数、对数函数的性质,去解决相关函数的其他问题.

另外,高考中的代数推理题也常以指数函数和对数函数为背景进行考查. 解题中,要注意等价转换、化归思想、整体意识及分类讨论思想方法的运用.

典例调研

题型一　指数式与对数式

【调研 1】下表给出了 x 与 10^x 的七组近似对应值:

组号	一	二	三	四	五	六	七
x	0.301 03	0.477 11	0.698 97	0.778 15	0.903 09	1.000 00	1.079 18
10^x	2	3	5	6	8	10	12

假设在上表的各组对应值中,有且仅有一组是错误的,它是第______组.

分析　通过数表寻求数值之间的关联!显然这种数值关联从 10^x 的值入手比较容易.

解析　联想幂的运算法则,知 $10^{x_1+x_2}=10^{x_1}\cdot 10^{x_2}$,即 x_1 与 10^{x_1} 对应,x_2 与 10^{x_2} 对应,x_1+x_2 与 $10^{x_1+x_2}$ 对应. $\because 8=2^3$,$\therefore$ 应该有 $0.903\ 09=0.301\ 03\times 3$,$\because 10=2\times 5$,$\therefore$ 应该有 $0.301\ 03+0.698\ 97=1.000\ 00$,显然这些成立. 但$\because 2\times 3=6$,$0.301\ 03+0.477\ 11=0.778\ 15$ 不成立,而 $2\times 6=12$,$0.301\ 03+0.778\ 15=1.079\ 18$ 成立,在有且仅有一组错误的前提下,只有第二组是错误的.

【知识链接】　分数指数幂是整数指数幂与根式的合理统一,有理指数幂的运算性质与整数指数幂运算性质相同. 对数是指数的逆运算,对数的运算性质是进行对数运算的重要依据,也是学生的薄弱环节. 当 $a>0,a\neq 1,M>0,N>0$ 时,有

$$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N,\ \log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N,\ \log_a M^n=n\log_a M(n\in\mathbf{R}).$$

拓展 1　求值:(1) $\lg 4+2\lg 5$;(2) $\lg^3 2+\lg^3 5+3\lg 2\cdot\lg 5$.

【调研 2】　方程 $x\lg(x+2)-1=0$ 的解所在的区间是

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$　　C. $(2,3)$　　D. $(3,4)$

分析　方程的解转化为函数图像有交点,但确定交点所在区间,需要进行对数值的估计.

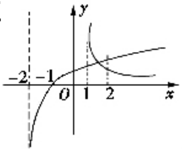


图 2-4-1

解析　$x>-2$,在同一坐标系内作出函数 $y=\lg(x+2)$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 的图像,如图 2-4-1,显然只有一个解. $\because$ 当 $x=1$ 时,$\lg 3<1$,当 $x=2$ 时,$\lg 4>\lg\sqrt{10}=\frac{1}{2}$,$\therefore$ 方程解的区间是 $(1,2)$,故选 B.

【考向预测】　从近几年高考试题来看,直接命制有关指数式或对数式运算的试题较为少见,一般都是在考查指数函数与对数函数有关性质的同时,考查指数式或对数式的运算.

拓展 2 **若函数** $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{4})^{x}, & -1\leqslant x<0,\\ 4^{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$ **,则** $f(\log_4 3)=$

A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $\frac{4}{3}$ D. 4

题型二 指数函数与对数函数的图像

【调研 3】 **已知函数** $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$ **,则方程** $(\frac{1}{2})^{|x|}=|f(x)|$ **的实根个数是**

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

分析 **利用函数图像的变换作图法,作出方程两边对应两个函数的图像,观察交点个数.**

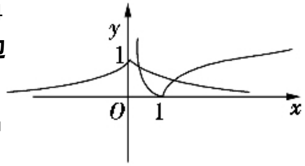


图 2-4-2

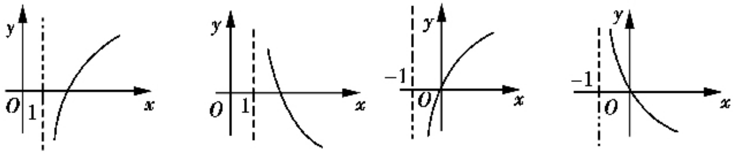
解析 **在同一直角坐标系中作出函数** $y=(\frac{1}{2})^{|x|}$ **及** $y=|f(x)|$ **的图像(如图 2-4-2),故选** B.

【误点警示】 **指数函数与其反函数对数函数的交点个数问题,一直是中学数学数形结合思想应用的一个典型范例,也是考生容易出错的地方. 事实上,当** $0<a<1$ **时,函数** $y=a^x$ **与函数** $y=\log_a x$ **不一定只有一个交点,例如函数** $y=(\frac{1}{16})^x$ **与函数** $y=\log_{\frac{1}{16}}x$ **有两个交点,分别为** $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ **与** $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$.

拓展 3 **在同一平面直角坐标系中,函数** $f(x)=2^{x+1}$ **与** $g(x)=2^{1-x}$ **的图像关于**

A. **直线** $x=1$ **对称** B. x **轴对称**
C. y **轴对称** D. **直线** $y=x$ **对称**

【调研 4】 **如果函数** $y=a^{-x}(a>0$ **且** $a\neq 1)$ **是减函数,那么函数** $f(x)=\log_a\frac{1}{x+1}$ **的图像大致是**



分析 **根据函数的单调性和定义域进行区分.**

解析 $\because$ **函数** $y=a^{-x}(a>0$ **且** $a\neq 1)$ **是减函数,** $\therefore a>1$ **,故函数** $f(x)=\log_a\frac{1}{x+1}$ **为其定义域上的减函数,其定义域为** $(-1,+\infty)$ **,故选** D.

你的脸是为了呈现上帝赐给人类最贵重的礼物——微笑,一定要成为你工作最大的资产。

【知识链接】 指数函数与对数函数的图像是分析、解决与指数函数和对数函数的有关问题及理解和记忆指数函数和对数函数性质的关键，因此我们必须熟练地掌握它们. 首先，要抓住底数对它的图像的制约作用，把握它们图像的特征：①底数与 1 的大小关系决定了图像的升降，即 $a>1$ 时，图像上升；$0<a<1$ 时，图像下降；②底数的大小决定了图像的高低，即在 y 轴右边，指数函数 $y=a^x$ 的图像"底大图高"；在 x 轴上方，对数函数 $y=\log_a x$ 的图像"底大图右". 其次，要熟练掌握函数图像的作法，特别是变换作图法，如本题.

拓展 4　若函数 $y=(\frac{1}{2})^{|1-x|}+m$ 的图像与 x 轴有公共点，则 m 的取值范围是

A. $m\leqslant -1$　　B. $-1\leqslant m<0$　　C. $m\geqslant 1$　　D. $0<m\leqslant 1$

题型三　指数函数与对数函数的性质

【调研 5】　已知函数 $f(x)=\log_a(x^2-ax+3)$ ($a>0$，且 $a\neq 1$) 满足：对任意实数 x_1,x_2，当 $x_1<x_2\leqslant\frac{a}{2}$ 时，总有 $f(x_1)-f(x_2)>0$，则实数 a 的取值范围是

A. $(0,3)$　　B. $(1,3)$　　C. $(2,2\sqrt{3})$　　D. $(1,2\sqrt{3})$

解析　由题意知，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\frac{a}{2}]$ 上是减函数，又 $y=x^2-ax+3$ 在区间 $(-\infty,\frac{a}{2}]$ 上也是减函数，$\therefore a>1$ 且 $(\frac{a}{2})^2-a\cdot\frac{a}{2}+3>0$，解得 $1<a<2\sqrt{3}$. 故选 D.

【考向预测】　指数函数与对数函数的性质是每年高考必考内容之一，其中它们的单调性和对数函数的定义域问题是高考的热点. 利用指数函数与对数函数的单调性，可以解决有关的大小比较问题，进而可以求解指(对)数不等式和方程.

【误点警示】　处理对数函数的单调性问题，必须时刻注意函数定义域对单调区间的影响，即对数的真数必须大于零. 本题中，不可忽视 $x^2-ax+3>0$ 在区间 $(-\infty,\frac{a}{2}]$ 上恒成立的隐含条件.

拓展 5　是否存在实数 a，使函数 $f(x)=\log_a(ax^2-x)$ 在区间 $[2,4]$ 上是增函数. 若存在，求出 a 的值，若不存在，说明理由.

【调研 6】　已知函数 $f(x)=a^x-2\sqrt{4-a^x}-1$ ($a>0,a\neq 1$).

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域、值域；

(2) 是否存在实数 a，使得函数 $f(x)$ 满足：对于区间 $(2,+\infty)$ 上的一切 x，都有 $f(x)\geqslant 0$.

分析　就 a 进行分类讨论，确定定义域，通过换元法考查函数的值域.

解析　(1) 由 $4-a^x\geqslant 0$，得 $a^x\leqslant 4$.

当 $a>1$ 时，$x\leqslant\log_a 4$；当 $0<a<1$ 时，$x\geqslant\log_a 4$.

即当 $a>1$ 时,$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,\log_a 4]$;

当 $0<a<1$ 时,$f(x)$ 的定义域为 $[\log_a 4,+\infty)$.

令 $t=\sqrt{4-a^x}$,则 $0\leqslant t<2$,且 $a^x=4-t^2$,$\therefore$ 原函数则变为 $g(t)=4-t^2-2t-1=-(t+1)^2+4$,

当 $t\geqslant 0$ 时,$g(t)$ 是 t 的单调减函数,$\therefore g(2)<g(t)\leqslant g(0)$,即 $-5<g(t)\leqslant 3$,

$\therefore g(t)$ 的值域为 $(-5,3]$,即函数 $f(x)$ 的值域是 $(-5,3]$.

(2)若存在实数 a 使得对于区间 $(2,+\infty)$ 上使函数 $f(x)$ 有意义的一切 x,都有 $f(x)\geqslant 0$,则区间 $(2,+\infty)$ 是定义域的子集.

由(1)知,$a>1$ 不满足条件;

若 $0<a<1$,则 $\log_a 4<2$,且 $f(x)$ 是 x 的减函数.

当 $x>2$ 时,$a^x<a^2$. 由于 $0<a^2<1$,$\therefore t=\sqrt{4-a^x}>\sqrt{3}$,

$\because t>-1$ 时,$g(t)$ 为减函数,且当 $t=1$ 时 $g(t)=0$,$\therefore t>\sqrt{3}$时,$g(t)<0$,

即 $f(x)<0$,$\therefore f(x)\geqslant 0$ 不成立.

综上,满足条件的 a 的取值范围是$\varnothing$.

【技巧点拨】 注意用整体的思想处理问题. 在解题时,为将指数式或对数式转化为熟知的代数式,常采用换元的方法. 分类讨论是学习本考点知识必须牢记的思想方法,分类的标准往往是底数的取值.

拓展 6 已知 $y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上是 x 的减函数,求函数 $f(x)=x^2-ax+1$ 在 $[0,1]$ 上的最大值和最小值.

强化闯关

1. 函数 $f(x)$ 满足 $4^x=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$,且 $f(x_1)+f(x_2)=1$ $(x_1,x_2\in\mathbf{R}^+)$,则 $f(x_1+x_2)$ 的最小值为

A. 4　　B. 2　　C. $\dfrac{4}{5}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

2. 已知函数 $f(x)=\log_a\dfrac{1-m(x-2)}{x-3}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$,对于函数定义域内的任意 x,都有 $f(2-x)+f(x+2)=0$ 成立,则实数 m 的值为______.

3. 已知实数 a,b 满足等式 $\log_2 a=\log_3 b$,给出下列 5 个关系式:①$a>b>1$;②$b>a>1$;③$a<b<1$;④$b<a<1$;⑤$a=b$. 其中可能成立的关系式是______.(填序号)

4. 对于任意实数 x,符号 $[x]$ 表示 x 的整数部分,即 $[x]$ 是不超过 x 的最大整数,则 $[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 2\ 007]=$ ______.

5. 已知函数 $f(x)=a^x-\dfrac{10}{3}a$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的图像过点 $(-1,2)$,且函数 $f(x)$ 为减函数.

(1)求 $f(x)$ 的解析式;

(2)求满足 $f^{-1}(2x)>f^{-1}(x^2+1)$ 的 x 的取值范围.

参考答案

【拓展】

1. (1) $\lg 4+2\lg 5=2\lg 2+2\lg 5=2(\lg 2+\lg 5)=2\lg 10=2$；

(2) $\lg^3 2+\lg^3 5+3\lg 2\cdot\lg 5=(\lg 2+\lg 5)(\lg^2 2-\lg 2\cdot\lg 5+\lg^2 5)+3\lg 2\cdot\lg 5=\lg^2 2+2\lg 2\cdot\lg 5+\lg^2 5=(\lg 2+\lg 5)^2=1.$

2. B　$\because 0<\log_4 3<1$，$\therefore f(\log_4 3)=4^{\log_4 3}=3.$

3. C　两个函数可分别写成 $y=2\cdot 2^x$ 与 $y=2\cdot 2^{-x}$，其图像关于 y 轴对称.

4. B　首先作出 $y=(\frac{1}{2})^{|1-x|}$ 的图像(如图 2－4－3)，欲使 $y=(\frac{1}{2})^{|1-x|}+m$ 的图像与 x 轴有交点，则 $-1\leqslant m<0$.

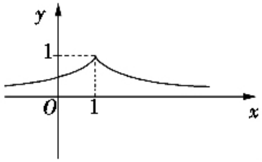


图 2－4－3

5. 由题意知 $a>0$，二次函数 $y=ax^2-x$ 的对称轴为 $x=\frac{1}{2a}$，若 $f(x)=\log_a(ax^2-x)$ 在区间 $[2,4]$ 上是增函数，则 $0<a<1$ 且 $\begin{cases}4\leqslant\frac{1}{2a},\\ a\cdot 4^2-4>0\end{cases}$ 或 $a>1$ 且 $\begin{cases}2\geqslant\frac{1}{2a},\\ a\cdot 2^2-2>0,\end{cases}$

解得 $a>1$ 即为所求.

6. $\because a>0$ $\therefore t=2-ax$ 在 $[0,1]$ 递减，于是 $2-a\times 1>0\Rightarrow a<2$.

又 $\because y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 递减，$\therefore a>1$，$\therefore a\in(1,2)$.

$\because f(x)=x^2-ax+1$ 关于 $x=\frac{a}{2}$ 对称，且 $\frac{1}{2}<\frac{a}{2}<1$，

$\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(0)=1$ 最小值为 $f(\frac{a}{2})=1-\frac{a^2}{4}$.

【强化闯关】

1. C　$4^{x_1+x_2}=\frac{1+f(x_1+x_2)}{1-f(x_1+x_2)}=-1+\frac{2}{1-f(x_1+x_2)}$. 记 $f(x_1)=a$，$f(x_2)=b$，则

$4^{x_1}\cdot 4^{x_2}=\frac{1+f(x_1)}{1-f(x_1)}\cdot\frac{1+f(x_2)}{1-f(x_2)}=\frac{1+a}{1-a}\cdot\frac{1+b}{1-b}$.

$\because f(x_1)+f(x_2)=1$，$\therefore a+b=1$，$\therefore -1+\frac{2}{1-f(x_1+x_2)}=\frac{1+a}{b}\cdot\frac{1+b}{a}=\frac{2}{ab}+1$，

$\therefore f(x_1+x_2)=\frac{1}{ab+1}$. 而 $ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2=\frac{1}{4}$，故 $f(x_1+x_2)\geqslant\frac{4}{5}$. 故选 C.

2. -1　$\because f(2-x)+f(x+2)=0$，$\therefore \log_a\frac{1+mx}{-x-1}+\log_a\frac{1-mx}{x-1}=0$，即 $1-(mx)^2=(-1)^2-x^2$，解得 $m^2=1$. 又 $\because m=1$ 时，原函数无意义.

$\therefore m=-1$.

3. ②④⑤　如图 2－4－4，成立的情况有三种，分别是 $0<b<a<1$，$a=b=1$，$1<a<b$.

4. 18 034　研究函数 $y=[\log_2 x]$，$x\in\mathbf{N}^*$. 当 $x=1$ 时，$y=0$；当 $2\leqslant x<2^2$ 时，$y=1$；当 $2^2\leqslant x<2^3$ 时，$y=2$；当 $2^3\leqslant x<2^4$ 时，$y=3$；…，以此类推，当 $2^{10}\leqslant x<2^{11}$ 时，$y=10$. 又 $1\ 024<2\ 007<2\ 048$，∴ 原式 $=0+1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+9\times2^9+10\times2^{10}-10\times40=9\times2^{11}+2-400=18\ 034$.

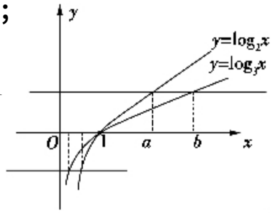


图 2－4－4

5. (1) ∵ $f^{-1}(x)$ 的图像过点 $(-1,2)$ ∴ 函数 $f(x)$ 的图像过点 $(2,-1)$，∴ $-1=a^2-\frac{10}{3}a$，得 $a=3$ 或 $a=\frac{1}{3}$.

又∵ $f(x)$ 为减函数，∴ $a=\frac{1}{3}$，∴ $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x-\frac{10}{9}$.

(2) ∵ $f(x)>-\frac{10}{9}$，∴ $f^{-1}(x)$ 是减函数，且定义域为 $\left(-\frac{10}{9},+\infty\right)$.

若 $f^{-1}(2x)>f^{-1}(x^2+1)$，则 $\begin{cases}2x>-\frac{10}{9},\\2x<x^2+1,\end{cases}$ 解得 $x>-\frac{5}{9}$，且 $x\neq1$，

故满足 $f^{-1}(2x)>f^{-1}(x^2+1)$ 的 x 的取值范围是 $\left\{x \mid x>-\frac{5}{9}，且\ x\neq1\right\}$.

重点5　数列和导数

重点诠释　在高考试题中，数列是必考内容. 在题型设计上，选择题和填空题侧重考查数列的概念、等差数列和等比数列的基础知识与基本技能，突出“小、巧、活”的特点；解答题以数列为背景常与函数、不等式等知识整合，在交汇点处命题，综合考查应用意识、推理能力和数学思想方法，呈现综合性强、立意新、角度新、难度大的特点.

1. 数列的概念与递推公式

(1) 考查数列的概念，侧重于用数列的方法去理解相应的数学问题，建立与自然数有关的序列，即数列通项公式.

(2) 从数列的函数特征出发，运用函数的思想方法去研究处理数列问题. 如利用函数的单调性处理数列的大小关系或最值问题.

(3) 由数列的递推公式确定的数列，在试题考查中一般只要求写出数列前几项中的某一项. 对于由数列的递推公式求数列通项 a_n 的问题，试题一般局限于一些常见的特殊数列.

2. 等差、等比数列

(1) 等差、等比数列的通项公式与前 n 项和公式涵盖了五个基本量（a_1，a_n，S_n，d

(q),n)之间的关系,其中“知三求二”是数列计算中的基本问题,方程观点是解决这类问题的基本思想和方法.

(2)理解等差(比)数列的概念,要注重理解“等差(比)”二字的内涵,这是运用等差(比)数列性质解题的基础.掌握等差(比)数列的一些性质,运用性质解题往往能简化运算过程,达到事半功倍的效果.

3.由于导数与高等数学的联系密切,因此也是高考必考内容之一,试题既有考查基础知识的选择、填空题,也有考查综合运用能力的解答题.

(1)从考查角度看,高考对导数内容的考查主要有两个层次:①考查导数的概念和某些实际背景.求导公式和求导法则等基础知识.②导数的运用.

(2)在题型设计上,高考对导数的考查主要有以下特点:

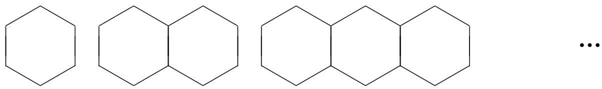
① 以填空、选择题型考查导数的概念、导数的几何意义、利用导数研究函数的性质等.

② 解答题主要涉及以导数为工具解决函数、解析几何、不等式及有关的综合问题,包括解决应用问题.将导数内容与传统内容中有关不等式和函数的单调性等知识有机结合,可以设计出高质量的综合性试题.

典例调研

题型一　数列的概念

【调研1】 如图2-5-1,这是一个正六边形的序列,则第 n 个图形的边数为______.



(1)　　(2)　　(3)

图2-5-1

解析　每增加一个正六边形,图形的边数就增加5,这是一个公差为5的等差数列,因此 $a_n=6+(n-1)\times5=5n+1$.即第 n 个图形的边数为 $5n+1$.

【技巧点拨】 求数列的通项公式,要求考生通过观察、分析、对比、转换等方法寻求数列的项与项数之间的关系.对于符号(数字、字母、运算符号)、图形、文字所表示的数学问题,要有目的地从局部到整体多角度进行观察、分析(如分式的分子与分母分别处理等),从而得出结论.我们要熟知一些常见数列的通项公式,如:数列 $\{n^2\}$、$\{2^n\}$、$\{(-1)^n\}$、$\{2n\}$、$\{2n-1\}$,并了解 $a_n=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$ 的表示形式不止一种,如 $a_n=|\sin\frac{n\pi}{2}|$,$a_n=\frac{1^n-(-1)^n}{2}$ 等.

拓展1　正奇数集合 $\{1,3,5,\cdots\}$,现在由小到大按第 n 组有 $(2n-1)$ 个奇数进行分0组:

$\{1\}$，　　$\{3,5,7\}$，　　$\{9,11,13,15,17\}$，　　…

（第一组）　　（第二组）　　（第三组）

则 2 005 位于第______组中.

【调研2】 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=\dfrac{n-\sqrt{79}}{n-\sqrt{80}}$（$n\in\mathbf{N}^*$），则在数列 $\{a_n\}$ 的前 50 项中最小项和最大项分别是

A. a_1,a_{50}　　B. a_1,a_8　　C. a_8,a_9　　D. a_9,a_{50}

解析　数列 $a_n=1+\dfrac{\sqrt{80}-\sqrt{79}}{n-\sqrt{80}}$，当 $n<\sqrt{80}$ 时，a_n 是减函数且 $a_n<1$ 当 $n>\sqrt{80}$ 时，a_n 是减函数且 $a_n>1$，所以前 50 项中最小项是 a_8，最大项是 a_9，故选 C.

【知识链接】 数列是特殊的函数，我们可以从数列的函数特征出发，利用函数的单调性处理数列的大小关系或最值问题. 如本题中，对应的函数是 $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{79}}{x-\sqrt{80}}$，其函数单调性既可以通过分离常数把问题转化为一个反比例函数的单调性问题，也可以利用函数单调性的定义或导数方法研究.

拓展2　若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=5\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^{2n-2}-4\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$（$n\in\mathbf{N}^*$），$\{a_n\}$ 的最大项为第 x 项，最小项为第 y 项，则 $x+y$ 等于

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

题型二　递推数列

【调研3】 数列 $\{a_n\}$ 的构成法则如下：$a_1=1$，如果 a_n-2 为自然数且之前未出现过，则用递推公式 $a_{n+1}=a_n-2$. 否则用递推公式 $a_{n+1}=3a_n$. 则 $a_6=$______.

解析　$\because a_1-2=-1\notin\mathbf{N}$，$\therefore a_2=3a_1=3$. $\because a_2-2=1=a_1$，$\therefore a_3=3a_2=9$，$\because a_3-2=7$，$\therefore a_4=7$，$\because a_4-2=5$，$\therefore a_5=5$，$\because a_5-2=3=a_2$，$\therefore a_6=3a_5=15$.

【技巧点拨】 本题中的递推公式是一个分段递推，用数学语言可表示为 $a_{n+1}=\begin{cases}a_n-2, & a_n-2\in\mathbf{N}\text{ 且 }a_n-2\notin\{a_1,\cdots,a_n\},\\ 3a_n, & a_n-2\notin\mathbf{N}\text{ 或 }a_n-2\in\{a_1,\cdots,a_n\}.\end{cases}$ 由数列的递推公式确定的数列，在试题考查中一般只要求写出数列前几项中的某一项. 但此时递推关系确定的数列往往比较特殊，除数列为等差、等比数列外，还经常出现“周期数列”“倒数数列”“等和数列”等.

拓展3　数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & 0\leqslant a_n<\dfrac{1}{2},\\ 2a_n-1, & \dfrac{1}{2}\leqslant a_n<1,\end{cases}$ 若 $a_1=\dfrac{6}{7}$，则 $a_2=$______，$a_{24}=$______.

【调研4】 数列 $\{a_n\}$ 满足递推式 $a_n=3a_{n-1}+3^n-1$（$n\geqslant2$），其中 $a_4=365$.

重点突破

(1) 求 a_1, a_2, a_3;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

分析　根据递推关系可以采用累加方法,或设法转化为等差、等比数列,进而求出通项.

解析　(1) 由 $a_n=3a_{n-1}+3^n-1$,及 $a_4=365$,知 $a_4=3a_3+3^4-1=365$,则 $a_3=95$.

同理求得 $a_2=23, a_1=5$.

(2) 解法一　$\because a_n=3a_{n-1}+3^n-1$,

$\therefore 3a_{n-1}=3^2\cdot a_{n-2}+3(3^{n-1}-1)$,

$3^2\cdot a_{n-2}=3^3\cdot a_{n-3}+3^2\cdot(3^{n-2}-1)$,

$3^3\cdot a_{n-3}=3^4\cdot a_{n-4}+3^3\cdot(3^{n-3}-1)$,

……

$3^{n-2}a_2=3^{n-1}\cdot a_1+3^{n-2}\cdot(3^2-1)$,

等式两边相加,得
$$a_n=3^{n-1}\cdot a_1+(3^n-1)+3(3^{n-1}-1)+3^2\cdot(3^{n-2}-1)+3^3\cdot(3^{n-3}-1)+\cdots+3^{n-2}\cdot(3^2-1)$$
$$=(n+\frac{1}{2})\cdot 3^n+\frac{1}{2}.$$

故 $a_n=(n+\frac{1}{2})\cdot 3^n+\frac{1}{2}$.

解法二　$\because a_n=3a_{n-1}+3^n-1$, $\therefore \dfrac{a_n-\frac{1}{2}}{3^n}=\dfrac{a_{n-1}-\frac{1}{2}}{3^{n-1}}+1$.

令 $b_n=\dfrac{a_n-\frac{1}{2}}{3^n}$,则 $b_n=b_{n-1}+1$,则数列 $\{b_n\}$ 是公差为 1 的等差数列,

又 $b_1=\dfrac{a_1-\frac{1}{2}}{3}$, $\therefore b_n=b_1+(n-1)=n+\frac{1}{2}$,故 $a_n=(n+\frac{1}{2})\cdot 3^n+\frac{1}{2}$.

【方法探究】　对于由数列的递推公式求数列通项 a_n 的问题,一般有以下几种模型:

(1) 递推模型 $a_{n+1}=ca_n+d$,可以通过待定系数法 $(a_{n+1}+\lambda)=c(a_n+\lambda)$,化为等比数列;

(2) 递推模型 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{c\cdot a_n+1}$,可以通过取倒数 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=c+\dfrac{1}{a_n}$,化为等差数列;

(3) 递推模型 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 与 $a_{n+1}=f(n)\cdot a_n$,可以分别通过叠加、叠乘方法求得通项.

在解题时要注意两个重要的变形:

① $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$；② $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\cdots\times\frac{a_2}{a_1}\times a_1(a_n\neq0)$.

拓展4 **已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$，求该数列的通项公式$a_n$.**

题型三 等差、等比数列的综合问题

【调研5】 **在正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_1+a_2+a_3=7$. 等差数列$\{b_n\}$满足$b_1=a_1$，且存在自然数$m(m\geqslant3)$使得$b_m=a_m$. 记数列$\{a_n\}$的前m项和为S_m，数列$\{b_n-\frac{1}{2}\}$的前m项和为T_m，试比较S_m与T_m的大小，并给出证明.**

分析 **首先求出等差数列的通项公式，进而根据求和公式分别求出S_m与T_m，作差比较大小.**

解析 **设数列$\{a_n\}$的公比为q，则$q>0$，**

$\because a_1+a_2+a_3=7$，$a_1=1$，$\therefore 1+q+q^2=7$，**解得**$q=2$，**或**$q=-3$**（舍去）**，

$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$，$\therefore S_m=2^m-1$.

又数列$\{b_n\}$是等差数列，$b_1=a_1=1$，$b_m=a_m=2^{m-1}$，

$$\therefore T_m=(b_1-\frac{1}{2})+(b_2-\frac{1}{2})+\cdots+(b_m-\frac{1}{2})=(b_1+b_2+\cdots+b_m)-\frac{1}{2}m$$

$$=\frac{m(1+2^{m-1})}{2}-\frac{1}{2}m=m\cdot2^{m-2}.$$

$\therefore T_m-S_m=m\cdot2^{m-2}-(2^m-1)=(m-4)\cdot2^{m-2}+1$，

当$m=3$**时**，$T_3-S_3=-1$，$\therefore T_3<S_3$；

当$m\geqslant4$**时**，$(m-4)\cdot2^{m-2}+1\geqslant1>0$，$\therefore T_m>S_m$.

【发散类比】 **解答本题要注意条件"存在自然数$m(m\geqslant3)$使得$b_m=a_m$"的含义，这里的m是一个未知的常数，它与"$b_n=a_n(n\in\mathbf{N}^*)$"不同. 那么在本题的条件下，当$n\in\mathbf{N}^*$时，$b_n$与$a_n$的大小关系如何呢？当然我们可以根据已知条件求出数列$\{b_n\}$的通项公式后，再作差比较大小. 实际上，用函数观点认识等差与等比数列的通项公式，在同一直角坐标内作出等差和等比数列的图像，如图2－5－2所示，显然应该有：当$n=1$或m时，$a_n=b_n$；当$1<n<m$时，$a_n<b_n$；当$n>m$时，$a_n>b_n$.**

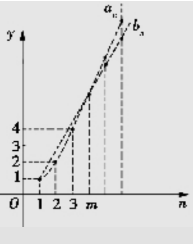


图2－5－2

拓展5 **已知a、b、c为正整数$(a\neq1)$，等差数列$\{a_n\}$的首项为a，公差为b，等比数列$\{b_n\}$的首项为b，公比为a，满足条件：$a<b$，且$b_2<a_3$，在数列$\{a_n\}$和数列$\{b_n\}$中各存在一项a_m与b_n有$a_m+1=b_n$成立，又设$c_n=(\frac{a_n-14}{3})\cdot\log_2\frac{b_{2n+1}}{3}$.**

(1)求 a，b 的值；

(2)求数列 $\{c_n\}$ 中的最小项,并说明该项是数列 $\{c_n\}$ 中的第几项；

(3)若数列 $\{\frac{c_n}{n+p}\}$ 为等差数列,求常数 p.

【调研6】 等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=2$,公差 d 是自然数,等比数列 $\{b_n\}$ 中,$b_1=a_1$,$b_2=a_2$.

(1)试找出一个 d 的值,使 $\{b_n\}$ 的所有项都是 $\{a_n\}$ 中的项;再找出一个 d 的值,使 $\{b_n\}$ 的项不都是 $\{a_n\}$ 中的项(不必证明)；

(2)判断 $d=4$ 时,是否 $\{b_n\}$ 所有的项都是 $\{a_n\}$ 中的项,并证明你的结论；

(3)探索当且仅当 d 取怎样的自然数时，$\{b_n\}$ 的所有项都是 $\{a_n\}$ 中的项,并说明理由.

解析 (1)$d=0$ 时，$\{b_n\}$ 的项都是 $\{a_n\}$ 中的项(任一非负偶数均可).

$d=1$ 时，$\{b_n\}$ 的项不都是 $\{a_n\}$ 中的项(任一正奇数均可).

(2)$d=4$ 时，$a_n=4n-2=2(2n-1)$，$b_n=2\times3^{n-1}=2(2\times\frac{3^{n-1}+1}{2}-1)=a_m$，($m=\frac{3^{n-1}+1}{2}$为正整数)

$\therefore$ $\{b_n\}$ 的项一定都是 $\{a_n\}$ 中的项.

(3)当且仅当 d 取 $2k(k\in\mathbf{N})$(即非负偶数)时，$\{b_n\}$ 的项都是 $\{a_n\}$ 中的项.理由如下：

①当 $d=0$ 时，$\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都是常数列,符合题意；

②当 $d=2k(k\in\mathbf{N}^*)$时,$a_n=2+(n-1)\cdot2k=2[1+(n-1)\cdot k]$，

当 $n>2$ 时,$b_n=2\cdot(k+1)^{n-1}=2(k^{n-1}+\mathrm{C}_{n-1}^{1}k^{n-2}+\cdots+\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}k+1)$，

其中 $k^{n-1}+\mathrm{C}_{n-1}^{1}k^{n-2}+\cdots+\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}k$ 是 k 的正整数倍,设为 $Ak(A\in\mathbf{N}^*)$,只要取 $m=A+1$(m 为正整数)即可得 $b_n=a_m$,即 $\{b_n\}$ 的项都是 $\{a_n\}$ 中的项；

③当 $d=2k+1(k\in\mathbf{N})$时,$b_3=\frac{(2k+3)^2}{2}$不是整数,也不可能是 $\{a_n\}$ 的项.

【技巧点拨】 一般情况下,等差数列的通项公式是 n 的一次函数,等比数列的通项公式是关于 n 的幂函数形式.很显然"某一等差数列中的每一项"不可能都是"某一等比数列中的项",而考虑"某一等比数列的每一项"是否可以都是"某一等差数列中的项"的基本出发点是"幂的形式"如何转化为"直线形式",二项展开式往往是处理该类问题的常用工具.

拓展6 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=6$,$a_2=b_2=4$,$a_3=b_3=3$,且数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$($n\in\mathbf{N}^*$)是等差数列,$\{b_n-2\}$($n\in\mathbf{N}^*$)是等比数列.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 通项公式；

(2)是否存在 $k\in\mathbf{N}^*$ 使得 $a_k-b_k\in(0,\frac{1}{2})$?若存在,求出 k;若不存在,请

说明理由.

题型四 导数的概念与几何意义

【调研 7】 设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，则 $f'(0)=$

A. 30　　B. 24　　C. 18　　D. 12

分析 直接先求出导函数 $f'(x)$，再求 $f'(0)$，显然不是明智之举. 换一个角度！在多项式函数中，对于"0"的函数值，我们只需关心函数的常数项. 而由多项式函数的导数性质，只要考虑原函数的一次项系数.

解析 $f'(0)$ 的值就是 $f(x)$ 中 x 一次项的系数，即 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 展开式中的常数项，故 $f'(0)=(-1)(-2)(-3)(-4)=24$. 故选 B.

【知识链接】 高考很少直接考查导数的计算，但导数的应用是高考的热点. 导数的应用离不开导数的运算.

拓展 7 若点 P 在曲线 $y=x^3-3x^2+(3-\sqrt{3})x+\frac{3}{4}$ 上移动，经过点 P 的切线的倾斜角为 α，则角 α 的取值范围是

A. $[0,\frac{\pi}{2})$　　B. $[0,\frac{\pi}{2})\cup[\frac{2\pi}{3},\pi)$

C. $[\frac{2\pi}{3},\pi)$　　D. $[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}]$

强化闯关

1. 曲线 $y=x\sin x$ 在点 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 处的切线与 x 轴、直线 $x=\pi$ 所围成的三角形的面积为

A. $\frac{\pi^2}{2}$　　B. π^2　　C. $2\pi^2$　　D. $\frac{1}{2}(2+\pi)^2$

2. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_2>a_3=1$，则使不等式：$(a_1-\frac{1}{a_1})+(a_2-\frac{1}{a_2})+\cdots+(a_n-\frac{1}{a_n})\geqslant 0$ 成立的最大自然数 n 是

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

3. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\frac{n}{n^2+2\ 004}$，则该数列最大项的 $n=$

A. 44　　B. 45　　C. 46　　D. 45 或 46

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，S_n 是它的前 n 项和，若 $S_{16}>0$，且 $S_{17}<0$，则当 S_n 最大时，n 的值为

A. 16　　B. 9　　C. 8　　D. 10

5. 由 $1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots$ 构成数列 $\{a_n\}$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=2$，当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=a_{b_{n-1}}$，

则 b_5 等于

A. 63　　B. 33　　C. 17　　D. 15

6. 在数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中，b_n 是 a_n 和 a_{n+1} 的等差中项，$a_1=2$，且对任意 $n\in \mathbf{N}^*$ 都有 $3a_{n+1}-a_n=0$，则 $\{b_n\}$ 的通项 $b_n=$______.

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前三项与数列 $\{b_n\}$ 的前三项对应相同，且 $a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-1}a_n=8n$ 对任意的 $n\in \mathbf{N}^*$ 都成立，数列 $\{b_{n+1}-b_n\}$ 是等差数列.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）问是否存在 $k\in \mathbf{N}^*$，使得 $b_k-a_k\in(0,1)$？请说明理由.

参考答案

【拓展】

1. 32　不是一个数列而是"集合列"，第 n 组是一个有 $(2n-1)$ 个正奇数组成的集合. 因为 2 005 是第 1 003 个正奇数，而 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$，$31^2<1\ 003<32^2$，所以 2 005 位于第 32 组.

2. A　令 $t=\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$，则 $a_n=5t^2-4t$，$t\in(0,1]$，当 $t=\frac{2}{5}$，即 $n=2$ 时，a_n 有最小值，当 $t=1$，即 $n=1$ 时，a_n 有最大值，$\therefore x+y=1+2=3$.

3. $\frac{5}{7}$　$\frac{3}{7}$　由递推关系，知 $a_2=2a_1-1=\frac{5}{7}>\frac{1}{2}$，$a_3=2a_2-1=\frac{3}{7}<\frac{1}{2}$，$a_4=2a_3=\frac{6}{7}=a_1$. 数列 $\{a_n\}$ 是周期数列，$a_{24}=a_3$.

4. 由条件得，$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a_n}$，$\therefore$ 数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是以 $\frac{1}{a_1}=1$ 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列，故 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$，因此 $a_n=\frac{2}{n+1}$.

5. (1) 由 $b_2<a_3$ 即题意有 $ab<a+2b<3b$（$\because a<b$，b 为正整数），

$\because a$ 为正整数且 $a\neq 1$，$\therefore a>1$，

$\therefore 1<a<3$，而 a 为正整数，$\therefore a=2$.

又 $a_m+1=b_n$，$\therefore 1+2+(m-1)b=b\cdot 2^{n-1}$，即 $b=\frac{3}{2^{n-1}-m+1}\in \mathbf{Z}^+$，

只有 $2^{n-1}-m+1=1$ 时符合题意，$\therefore b=3$.

(2) $a_n=2+3(n-1)$，$b_n=3\times 2^{n-1}$，$\therefore b_{2n+1}=3\times 2^{2n}$，

$\therefore c_n=(n-5)\times 2n=2n^2-10n$，

利用二次函数并结合 n 为正整数，当 $n=2$ 或 3 时，c_n 取得最小值 -12.

(3) 解法一　设 $\frac{c_n}{n+p}=\frac{2n^2-10n}{n+p}=2n+t$，

则 $2n^2-10n=2n^2+(2p+t)n+pt$，

$\therefore \begin{cases} 2p+t=-10, \\ pt=0. \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} p=0, \\ t=-10 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} t=0, \\ p=-5. \end{cases}$

$\therefore$ 当 $p=0$ 或 $p=-5$ 时,数列 $\{\frac{c_n}{n+p}\}$ 为等差数列.

解法二 $\because \frac{c_1}{1+p}=\frac{-8}{1+p}$,

$\frac{c_2}{2+p}=\frac{-12}{2+p}$, $\frac{c_3}{3+p}=\frac{-12}{3+p}$,

又$\because$ $\{\frac{c_n}{n+p}\}$ 为等差数列,

$\therefore 2\times\frac{-12}{2+p}=\frac{-8}{1+p}+\frac{-12}{3+p}$,即 $p^2+5p=0$,

$\therefore p=0$ 或 -5.

6.(1)依题意得:

$(a_3-a_2)-(a_2-a_1)=-1-(-2)=1$,

$\therefore a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)+(n-1)\cdot 1=n-3$,

故当 $n\geqslant 2$ 时,有 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=(n-4)+(n-5)+\cdots+(-1)+(-2)+6=\frac{n^2-7n+18}{2}$,

又$\because n=1$ 时,$a_1=6$ 也适合上式,

$\therefore a_n=\frac{n^2-7n+18}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$,$\because b_1-2=4$,$\frac{b_2-2}{b_1-2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,

$\therefore b_n-2=4\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}=(\frac{1}{2})^{n-3}$,即 $b_n=(\frac{1}{2})^{n-3}+2(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)设 $c_k=a_k-b_k$. $\because c_1=c_2=c_3=0$,$c_4=\frac{4^2-7\times 4+18}{2}-[(\frac{1}{2})^{4-3}+2]=\frac{1}{2}$,

当 $k\geqslant 4$ 时,$c_{k+1}-c_k=\frac{(k+1)^2-7(k+1)+18}{2}-[(\frac{1}{2})^{k+1-3}+2]-\{\frac{k^2-7k+18}{2}-[(\frac{1}{2})^{k-3}+2]\}=(k-3)+2^{2-k}>0$,

$\therefore c_{k+1}>c_k\geqslant c_4(k\geqslant 4)$,即当 $k\geqslant 4$ 时,$a_k-b_k\geqslant c_4=\frac{1}{2}$.

而 $k=1$、2、3 时,$a_k-b_k=0$,故不存在 $k\in\mathbf{N}^*$,使 $a_k-b_k\in(0,\frac{1}{2})$.

7.$\because y'=3x^2-6x+3-\sqrt{3}=3(x-1)^2-\sqrt{3}\geqslant-\sqrt{3}$,$\therefore \tan\alpha\geqslant-\sqrt{3}$,故 $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]\cup$

重点突破

$[\frac{2\pi}{3},\pi)$.

【强化闯关】

1. A　曲线 $y=x\sin x$ 在点$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$处的切线方程为 $y=-x$，所围成的三角形的面积为$\frac{\pi^2}{2}$. 故选 A.

2. B　本题解法有二. 最简单的方法是特征分析法，由条件知数列$\{a_n\}$是正项单调递减数列，且 $a_1=\frac{1}{a_5}$，$a_2=\frac{1}{a_4}$，即当 $n=5$ 时，$(a_1-\frac{1}{a_1})+(a_2-\frac{1}{a_2})+\cdots+(a_5-\frac{1}{a_5})=0$. 因此$(a_1-\frac{1}{a_1})+(a_2-\frac{1}{a_2})+\cdots+(a_n-\frac{1}{a_n})\geqslant 0$ 的正整数 n 的最大值为 5. 而通法则比较复杂，首先由条件知 $a_2>1$，$0<q<1$，当 $n\geqslant 4$ 时 $0<a_n<1$；其次$(a_1-\frac{1}{a_1})+(a_2-\frac{1}{a_2})+\cdots+(a_n-\frac{1}{a_n})=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}-\frac{\frac{1}{a_1}(1-\frac{1}{q^n})}{1-\frac{1}{q}}=\frac{1-q^n}{a_1q^{n-1}(1-q)}\cdot(a_1^2q^{n-1}-1)=\frac{1-q^n}{a_1q^{n-1}(1-q)}(a_1q^{n-3}-1)$，最后由$(a_1-\frac{1}{a_1})+(a_2-\frac{1}{a_2})+\cdots+(a_n-\frac{1}{a_n})\geqslant 0$，得 $a_1q^{n-3}\geqslant 1$，$\therefore n\leqslant 5$.

3. B　变形得 $a_n=\frac{1}{n+\frac{2\,004}{n}}$，当 $n=\sqrt{2\,004}$时 a_n 取得最大值，由 $n\in\mathbf{N}^*$，$44<\sqrt{2\,004}<45$，比较 a_{44} 与 a_{45} 大小知 $a_{45}>a_{44}$. 故选 B.

4. C　由 $S_{16}>0$，得$\frac{16(a_1+a_{16})}{2}>0$，即 $a_1+a_{16}>0$，也即 $a_8+a_9>0$；由 $S_{17}<0$，得 $17a_9<0$，即 $a_9<0$，$\therefore a_9<0$，$a_8>0$，$\therefore$ 当 $n=8$ 时，S_n 最大. 故选 C.

5. C　弄清递推关系 $b_n=a_{b_{n-1}}$ 的含义. $b_2=a_{b_1}=a_2=3$，$b_3=a_{b_2}=a_3=5$，$b_4=a_{b_3}=a_5=9$，$b_5=a_{b_4}=a_9=17$. 故选 C.

6. $\frac{4}{3}(\frac{1}{3})^{n-1}$　$\because 3a_{n+1}-a_n=0\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$，$\therefore$ $\{a_n\}$是公比为$\frac{1}{3}$的等比数列，$\therefore a_n=2\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}$，$\therefore b_n=\frac{1}{2}(a_n+a_{n+1})=\frac{1}{2}[2\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}+2\cdot(\frac{1}{3})^n]=\frac{4}{3}\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}$.

7. (1) 已知 $a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-1}a_n=8n(n\in\mathbf{N}^*)$，①

$n\geqslant 2$ 时，$a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-2}a_{n-1}=8(n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$，②

①－②得，$2^{n-1}a_n=8$，求得 $a_n=2^{4-n}$，

在①中令 $n=1$，可得 $a_1=8=2^{4-1}$，

所以 $a_n=2^{4-n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

由题意 $b_1=8$，$b_2=4$，$b_3=2$，所以 $b_2-b_1=-4$，$b_3-b_2=-2$，

$\therefore$ 数列 $\{b_{n+1}-b_n\}$ 的公差为 $-2-(-4)=2$，

$\therefore b_{n+1}-b_n=-4+(n-1)\times2=2n-6$，

$b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})$

$=8+(-4)+(-2)+\cdots+(2n-8)=n^2-7n+14(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) $b_k-a_k=k^2-7k+14-2^{4-k}$，

当 $k\geqslant4$ 时，$f(k)=(k-\frac{7}{2})^2+\frac{7}{4}-2^{4-k}$ 单调递增，且 $f(4)=1$，

所以 $k\geqslant4$ 时 $f(k)=k^2-7k+14-2^{4-k}\geqslant1$，

又 $f(1)=f(2)=f(3)=0$，

所以，不存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $b_k-a_k\in(0,1)$.

重点突破

难点透视

难点1　函数的值域和最值

难点诠释

函数的值域和最值问题在高考试题中几乎年年出现,是高考的难点问题之一,特别是导数知识的引入,更让函数最值问题焕发新的活力. 在题型设计上,不仅有以函数基本性质面目出现的选择题或填空题,考查考生对函数性质的理解和函数最值求解方法的掌握程度,也有侧重函数思想综合应用的解答题,考查考生运用函数性质分析、解决问题的能力,试题难度中等偏上.

1. 求解函数的值域或最值问题,要熟悉求函数值域的几种方法(如均值定理、单调性、配方法、换元法、图像法等),遇到求值域的问题,应首先考虑有哪几种基本方法,一般方法是什么?特殊方法是什么?在多种方法中选出最优方法. 求函数值域没有通用方法和固定模式,要靠自己积累经验,掌握规律.

2. 函数的值域问题常常化归为求函数的最值问题,要注意在利用基本不等式、二次函数及函数的单调性确定函数的值域时,不但要重视对应法则的作用,而且要特别注意定义域的制约作用.

典例调研

题型一　求函数最值的基本方法

【调研1】 (1)函数 $y=\dfrac{x^2}{x+2}(0<|x|\leqslant1)$ 的值域是

A. $(-\infty,-8]\cup[0,+\infty)$　　B. $[0,+\infty)$
C. $[0,1]$　　D. $(0,1]$

(2)已知 $-3<x<0$,则 $y=x\sqrt{9-x^2}$ 的最小值为

A. $-\dfrac{9}{2}$　　B. $-\dfrac{3}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{9}{2}$

(3)函数 $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ 的值域为

A. $[0,2]$　　B. $(0,\sqrt{2}]$　　C. $[-\sqrt{2},0)$　　D. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

分析　对函数式进行适当变形,转化为熟悉的函数结构,利用函数值域的常用方法求解.

解析　(1)解法一　$y=\dfrac{(x+2)^2-4(x+2)+4}{x+2}=(x+2)+\dfrac{4}{x+2}-4$,

$\because 0<|x|\leqslant 1$，$\therefore x+2\in[1,2)\cup(2,3]$，

又$\because$ 函数 $g(t)=t+\dfrac{4}{t}-4$ 在$[1,2)$上是减函数，在$(2,3]$上是增函数，

$\therefore$ 原函数的值域是$(0,1]$，故选 D.

解法二 $\because y'=\dfrac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2}=\dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$，$\therefore$ 函数 $y=\dfrac{x^2}{x+2}$在$[-1,0)$上是减函数，在$(0,1]$上是增函数，

$\therefore$ 原函数的值域为$(0,1]\cup(0,\dfrac{1}{3}]=(0,1]$.

(2) 解法一 $\because y=x\sqrt{9-x^2}=-(-x)\sqrt{9-x^2}\geqslant-\dfrac{(-x)^2+(\sqrt{9-x^2})^2}{2}=-\dfrac{9}{2}$，当且仅当 $x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$时，可以取"="，$\therefore$ 最小值为$-\dfrac{9}{2}$，故选 A.

解法二 $\because -3<x<0$，$\therefore$ 可设 $x=3\sin\alpha$，$\alpha\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$，则 $y=3\sin\alpha\cdot 3\cos\alpha=\dfrac{9}{2}\sin 2\alpha$.

$\because \alpha\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$，$\therefore 2\alpha\in(-\pi,0)$，$\therefore y=\dfrac{9}{2}\sin 2\alpha\in[-\dfrac{9}{2},0)$.

解法三 $\because x<0$，$\therefore y=x\sqrt{9-x^2}=-\sqrt{x^2\cdot(9-x^2)}=-\sqrt{9x^2-x^4}$.
令 $h(x)=9x^2-x^4$，则 $h'(x)=18x-4x^3=2x(9-2x^2)$，由 $h'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

$\because$ 函数 $y=h(x)$在$(-3,-\dfrac{3\sqrt{2}}{2})$上是增函数，在$(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},0)$上是减函数，

$\therefore h(x)\in(0,\dfrac{81}{4}]$，故原函数 $y=x\sqrt{9-x^2}$的值域为$[-\dfrac{9}{2},0)$.

(3) 函数定义域为$[1,+\infty)$.

$\because y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$，当 $x\geqslant 1$ 时是减函数，

$\therefore y=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. 故函数的值域为$(0,\sqrt{2}]$. 故选 B.

【方法探究】 求函数的值域（或最值）的常用方法有很多，有(1)观察法；(2)均值不等式法，利用基本不等式求最值时一定要注意应用的条件；(3)逆求法（反函数法）；(4)配方法，主要适用于可化为二次函数的函数，要特别注意自变量的范围；(5)图像法，对于图形较容易画出的函数的最值问题可借助图像直观求出；(6)换元法，用换元法时一定要注意新变元的取值范围；(7)判别式法，主要适用于可化为关于 x 的二次方程 $a(y)x^2+b(y)x+c(y)=0$ 的函数 $y=f(x)$. 在由 $\Delta\geqslant 0$ 且 $a(y)\neq 0$，求出

y 的值后，要检验这个最值在定义域内是否有相应的 x 的值；(8) 单调性法，要注意函数的单调性对函数最值的影响，特别是闭区间上函数的最值；(9) 导数法等. 通过本例，可以看出 根据具体问题要注意挖掘隐含的条件，选择适当的方法求最值（或值域），从而简化运算，得到问题的合理解答.

拓展 1　求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{3x}{x^2+4}$　　　　(2) $y=x+\sqrt{9-x^2}$

题型二　区间上的函数最值问题

【调研 2】　已知 $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant 1$，$f(x)=ax^2-2x+1$ 在区间 $[1,3]$ 上的最大值为 $M(a)$，最小值为 $N(a)$，令 $g(a)=M(a)-N(a)$.

(1) 求 $g(a)$ 的解析式；

(2) 求 $g(a)$ 的最小值.

分析　从二次函数的对称轴与给定区间的关系入手，进行分类讨论，求出其最值.

解析　(1) 二次函数 $f(x)$ 开口向上，对称轴 $x=\frac{1}{a}\in[1,3]$，

$\therefore f(x)$ 在区间 $[1,3]$ 上的最小值 $N(a)=f(\frac{1}{a})=1-\frac{1}{a}$.

当 $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\because \frac{1}{a}\in[2,3]$，$\therefore f(x)$ 在区间 $[1,3]$ 上的最大值 $M(a)=f(1)=a-1$；

当 $\frac{1}{2}<a\leqslant 1$ 时，$\because \frac{1}{a}\in[1,2)$，$\therefore f(x)$ 在区间 $[1,3]$ 上的最大值 $M(a)=f(3)=9a-5$

$$\therefore g(a)=M(a)-N(a)=\begin{cases}a+\dfrac{1}{a}-2, & \dfrac{1}{3}\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 9a+\dfrac{1}{a}-6, & \dfrac{1}{2}<a\leqslant 1.\end{cases}$$

(2) 当 $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\because g(a)=a+\frac{1}{a}-2$ 在区间 $(0,1)$ 上是减函数，$\therefore g(a)$ 的最小值为 $g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+2-2=\frac{1}{2}$；

当 $\frac{1}{2}<a\leqslant 1$ 时，$\because g(a)=9a+\frac{1}{a}-6$ 在区间 $(\frac{1}{3},1)$ 上是增函数，$\therefore g(a)>g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，

故 $g(a)$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

【技巧点拨】 含参数的二次函数区间上的最值问题，是各级各类考试中的一种常见题型. 解这类题目的基本方法是根据二次函数的对称轴与定义域区间的相对位置，对参数进行分类讨论，其核心都在于确定二次函数在该区间上的单调性，进而确定其最值. 本题中，由于二次函数的对称轴恰好在给定区间 $[1,3]$ 上，所以函数的最小值恰好在对称轴位置取得，但随着对称轴在区间 $[1,3]$ 内的移动，函数的最大值是在区间左、右端点取得的情况将产生变化. 因此，必须利用二次函数的对称性，分类讨论对称轴与区间‘中值’的大小关系. 第(2)问求分段函数的最值问题，其中涉及典型函数“$y=x+\frac{c}{x}\ (c>0)$”的单调性问题，结论是“函数 $y=x+\frac{c}{x}\ (c>0)$ 在区间 $(-\infty,-\sqrt{c})$ 和 $(\sqrt{c},+\infty)$ 上是增函数，在区间 $(-\sqrt{c},0)$ 和 $(0,\sqrt{c})$ 上是减函数”.

拓展2 已知对一切实数 x，函数 $y=x^2-4ax+2a+6$ 的值均为非负数，求函数 $f(a)=2-a|a+3|$ 的值域.

【调研3】 设 $a>0$ 且 $a\neq1$，函数 $f(x)=\log_a\frac{x-3}{x+3}$. 若存在实数 $m,n(m<n)$，使函数 $f(x)$ 的定义域和值域分别是 $[m,n]$ 和 $[1+\log_a(n-1),1+\log_a(m-1)]$，求实数 a 的取值范围.

分析 由 m,n 大小关系，首先判断出 a 与 1 的大小关系，进而由函数的单调性确定函数在区间 $[m,n]$ 上的值域，与条件所给值域对照，建立相关方程求解.

解析 $\because m<n$，$\therefore m-1<n-1$. 由 $1+\log_a(n-1)<1+\log_a(m-1)$，知 $\log_a(n-1)<\log_a(m-1)$，$\therefore 0<a<1$.

而由 $\frac{x-3}{x+3}>0$，得 $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$，$\because m>1$，$\therefore [m,n]\subset(3,+\infty)$，

$\therefore$ 函数 $f(x)=\log_a\frac{x-3}{x+3}$ 在区间 $[m,n]$ 上减函数，

$\therefore\begin{cases}1+\log_a(n-1)=\log_a\frac{n-3}{n+3},\\1+\log_a(m-1)=\log_a\frac{m-3}{m+3},\end{cases}$ 整理得 $\begin{cases}an^2+(2a-1)n+3(1-a)=0,\\am^2+(2a-1)m+3(1-a)=0,\end{cases}$ 其中 $n>m>3$，

$\therefore$ 方程 $ax^2+(2a-1)x+3(1-a)=0$ 在区间 $(3,+\infty)$ 内有两个不同的实根，

即 $\begin{cases}\Delta=(2a-1)^2-12a(1-a)>0,\\-\frac{2a-1}{2a}>3,\\a\times3^2+(2a-1)\times3+3(1-a)>0,\end{cases}$ 解得 $0<a<\frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

【方法探究】 本题的核心是确定 a 的取值范围，解题从函数的值域入手，层层深入，步步转化，最终化归为一个容易解决的问题. 一是利用所给定义域与值域中的不等关系，初步确定 a 与 1 的大小，进而确定单调性；二是利用函数的单调性，把已知

难点透视

条件中的不等关系转化为等量关系;三是把等量关系转化为二元二次方程组有解的问题;四是把方程组有解转化为一元二次方程在区间$(3,+\infty)$内有两个不同的实根;五是把一元二次方程有解通过数形结合转化为关于a的不等式组.

拓展3 (1)若函数$y=\log_{0.5}(x^2-2kx+k)$的值域为$\mathbf{R}$,则k的取值范围是

A. $0<k<1$　　B. $0\leqslant k<1$　　C. $k\leqslant 0$或$k\geqslant 1$　　D. $k=0$或$k\geqslant 1$

(2)若函数$y=x^2-3x-4$的定义域为$[0,m]$,值域为$[-\frac{25}{4},-4]$,则m的取值范围是______.

题型三　函数最值与恒成立问题

【调研4】 设函数$f(x)=x^2-2ax+2$,当$x\in[-1,+\infty)$,$f(x)\geqslant a$恒成立,求实数a的取值范围.

分析　求$f(x)$在区间$[-1,+\infty)$上的最小值,或者转化为二次函数$f(x)-a\geqslant 0$在$[-1,+\infty)$上恒成立.

解析一　由已知,得$g(x)=x^2-2ax+2-a\geqslant 0$在区间$[-1,+\infty)$上恒成立,结合二次函数性质及图像可知,恒成立的充要条件是

$\Delta\leqslant 0$或$\begin{cases}\Delta>0,\\a<-1,\\g(-1)\geqslant 0,\end{cases}$ 解得$a\in[-2,1]$或$a\in[-3,-2)$,

综上得实数a的取值范围是$[-3,1]$.

解析二　函数$f(x)=x^2-2ax+2$的对称轴为$x=a$.

当$a\leqslant -1$时,$f(x)$在区间$[-1,+\infty)$上的最小值为$f(-1)=3+2a$,由$3+2a\geqslant a$,解得$a\geqslant -3$,$\therefore -3\leqslant a\leqslant -1$.

当$a>-1$时,$f(x)$在区间$[-1,+\infty)$上的最小值为$f(a)=2-a^2$,则$2-a^2\geqslant a$,解得$-2\leqslant a\leqslant 1$,$\therefore -1<a\leqslant 1$,

综上,实数a的取值范围是$[-3,1]$.

【技巧点拨】 不等式恒成立问题,常常可以转化为求函数的最值问题,例如,$f(x)\geqslant N$对$x\in\mathbf{R}$恒成立$\Rightarrow f_{\min}(x)\geqslant N$成立;$f(x)\leqslant M$对$x\in\mathbf{R}$恒成立$\Rightarrow f_{\max}(x)\leqslant M$成立. 本题的解析二就是应用这种方法处理的.

【发散类比】 本题给出两种解法,从形式上看解法有一定的差距,但其本质上是相同的. 解析一利用"三个二次"(二次函数、二次方程、二次不等式)的关系解决问题,即从二次函数的图像出发,给出二次不等式$x^2-2ax+2-a\geqslant 0$在区间$[-1,+\infty)$上恒成立的充要条件,其实条件Ⅰ"$\Delta\leqslant 0$"即说明函数$g(x)$在$\mathbf{R}$上的最小值$g(a)\geqslant 0$;条件Ⅱ"$\begin{cases}\Delta>0,\\a<-1,\\g(-1)\geqslant 0\end{cases}$"即说明当函数对称轴在区间$[-1,+\infty)$左侧时,函数$g(x)$在$[-1,+\infty)$上的最小值$g(-1)\geqslant 0$. 由此可以看出,解析一的条件Ⅱ可简化为$\begin{cases}a<-1,\\g(-1)\geqslant 0\end{cases}$.

《试题调研》(第二辑)

拓展4 已知函数$f(x)=\lg\frac{ax^2+x+1}{3}$,若$x\in(0,1]$时,$f(x)$有意义,求$a$的取值范围.

【调研5】 已知函数$f(x)=\sqrt{x}$,$g(x)=x+a$ $(a>0)$.

(1) 求a的值,使函数$h(x)=|f(x)+g(x)-1|$的最小值为2;

(2) 若不等式$|\frac{f(x)-ag(x)}{f(x)}|\leqslant 1$在$x\in[1,4]$上恒成立,求$a$的取值范围.

分析 第(1)问考虑关于$\sqrt{x}$的二次函数最值问题;第(2)问可以考虑函数$y=\frac{f(x)-ag(x)}{f(x)}$的最大值和最小值都介于$-1$与1之间.

解析 (1)$h(x)=|f(x)+g(x)-1|=|\sqrt{x}+x+a-1|=|(\sqrt{x}+\frac{1}{2})^2+a-\frac{5}{4}|$.

若$a\geqslant 1$,$\because (\sqrt{x}+\frac{1}{2})^2\geqslant\frac{1}{4}$,$\therefore$当$\sqrt{x}=0$时,$h(x)$有最小值$|a-1|$,

由$a-1=2$,得$a=3$.

若$0<a<1$,$\because h(x)$的最小值为0,这与最小值为2矛盾.

故当$a=3$时,函数$h(x)=|f(x)+g(x)-1|$的最小值为2.

(2) $|\frac{f(x)-ag(x)}{f(x)}|\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant 1-\frac{ag(x)}{f(x)}\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant\frac{ag(x)}{f(x)}\leqslant 2$,即$\frac{a(x+a)}{\sqrt{x}}\leqslant 2$在$x\in[1,4]$上恒成立.

解法一 设$h(x)=a(\sqrt{x}+\frac{a}{\sqrt{x}})$,$x\in[1,4]$,其最大值必在$x=1$或$x=4$处取得,则

$$\begin{cases}h(1)\leqslant 2,\\ h(4)\leqslant 2,\end{cases}\text{即}\begin{cases}a(1+a)\leqslant 2,\\ a(2+\frac{a}{2})\leqslant 2,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}-2\leqslant a\leqslant 1,\\ -2-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{2}-2.\end{cases}$$

又$a>0$,$\therefore 0<a\leqslant 2\sqrt{2}-2$.

解法二 令$t=\sqrt{x}$,则$1\leqslant t\leqslant 2$,问题等价于$at^2-2t+a^2\leqslant 0$在$t\in[1,2]$上恒成立.

设$\varphi(x)=at^2-2t+a^2(a>0,1\leqslant t\leqslant 2)$,则

$$\begin{cases}\varphi(1)=a-2+a^2\leqslant 0,\\ \varphi(2)=4a-4+a^2\leqslant 0,\end{cases}$$

解得$0<a\leqslant 2\sqrt{2}-2$.

【技巧点拨】 本题第(2)问的解法一,同样是求最值问题,但解题没有追究于函数的最大值是多少,而是退而求其次. 因为问题是函数$y=a(\sqrt{x}+\frac{a}{\sqrt{x}})$,$x\in[1,4]$的所

难点透视

有值都要小于等于 2，在无法确认谁是最大值的基础上，可以考虑让几个可能取得最大值的函数值都小于等于 2. 对于含参数的最值问题在分类讨论中，有时需要充分挖掘题目中的隐含条件，洞察问题的本质，尽量避免分类讨论或减少分类讨论的环节，从而优化解题过程，缩短解题途径.

拓展 5　已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x}$，$x\in[1,+\infty)$.

（1）当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值；

（2）若对任意 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)>0$ 恒成立，试求实数 a 的取值范围.

强化闯关

1. 函数 $y=\dfrac{1}{1-x(1-x)}$ 的最大值是

A. $\dfrac{4}{5}$　　B. $\dfrac{5}{4}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{4}{3}$

2. 已知函数 $f(x)=3-2|x|$，$g(x)=x^2-2x$，构造函数 $F(x)$，定义如下：当 $f(x)\geqslant g(x)$，$F(x)=g(x)$；当 $f(x)<g(x)$ 时，$F(x)=f(x)$. 那么 $F(x)$

A. 有最大值 3，最小值 −1　　B. 有最大值 $7-2\sqrt{7}$，无最小值

C. 有最大值 3，无最小值　　D. 无最大值，也无最小值

3. 规定记号 '$\otimes$' 表示一种运算，即 $a\otimes b=\sqrt{ab}+a+b(a,b\in\mathbf{R}^+)$，若 $1\otimes k=3$，则 k 的值为______；函数 $f(x)=k\otimes x$ 的值域为______.

4. 已知函数 $f(x)=ax^2+(b-8)x-a-ab$，当 $x\in(-3,2)$ 时，$f(x)>0$；当 $x\in(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$，$f(x)<0$. 求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内的值域.

5. 已知函数 $f(x)=x^2+ax+b(a、b\in\mathbf{R})$，$g(x)=2x^2-4x-16$.

(1) 求不等式 $g(x)<0$ 的解集；

(2) 若 $|f(x)|\leqslant|g(x)|$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 a,b；

(3) 在 (2) 的条件下，若对一切 $x>2$，均有 $f(x)\geqslant(m+2)x-m-15$ 成立，求实数 m 的取值范围.

参考答案

【拓展】

1. (1) 当 $x=0$ 时，$y=0$；当 $x\neq0$ 时，$y=\dfrac{3x}{x^2+4}=\dfrac{3}{x+\dfrac{4}{x}}\in[-\dfrac{3}{4},0)\cup(0,\dfrac{3}{4}]$，$\therefore y=\dfrac{3x}{x^2+4}$ 的值域为 $[-\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{4}]$.

(2) 设 $x=3\sin\alpha$，$\alpha\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$，则 $y=x+\sqrt{9-x^2}=3\sin\alpha+3\cos\alpha=3\sqrt{2}\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})\in[-3,3\sqrt{2}]$.

2. $\because$ 函数 $y=x^2-4ax+2a+6$ 的值均为非负数，$\therefore (4a)^2-4(2a+6)\leqslant 0$，

解得 $-1\leqslant a\leqslant \frac{3}{2}$，

$\therefore$ 函数 $f(a)=2-a|a+3|=2-a(a+3)=-a^2-3a+2=-(a+\frac{3}{2})^2+\frac{17}{4}$，

$\because -1\leqslant a\leqslant \frac{3}{2}$，$\therefore \frac{1}{4}\leqslant (a+\frac{3}{2})^2\leqslant 9$，

故函数 $f(a)=2-a|a+3|$ 的值域为 $[-\frac{19}{4},4]$.

3. (1) C $\because$ 函数 $y=\log_{0.5}(x^2-2kx+k)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，$\therefore$ 函数 $y=x^2-2kx+k$ 能取到所有的正实数，故 $\Delta=(2k)^2-4k\geqslant 0$，解得 $k\leqslant 0$ 或 $k\geqslant 1$，故选 C.

(2) $\frac{3}{2}\leqslant m\leqslant 3$ 函数 $y=x^2-3x-4$ 的对称轴为 $x=\frac{3}{2}$，$\because f(0)=-4$，$f(\frac{3}{2})=-\frac{25}{4}$，$\therefore \frac{3}{2}\leqslant m\leqslant 3$.

4. 由条件得 $ax^2+x+1>0$ 在 $x\in(0,1]$ 恒成立，即 $a>-(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x})$，$x\in(0,1]$ 恒成立.

$\because$ 函数 $y=-(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x})$ 在 $(0,1]$ 上为增函数，$\therefore y=-(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x})$ 在 $(0,1]$ 上的最大值为 -2，

故 a 的取值范围是 $(-2,+\infty)$.

5. (1) 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x+\frac{1}{2x}+2$，$f'(x)=1-\frac{1}{2x^2}$.

$\because x\geqslant 1$，$\therefore f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上为增函数，

$\therefore f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的最小值为 $f(1)=\frac{7}{2}$.

(2) $\because f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}>0$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上恒成立，

$\therefore x^2+2x+a>0$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上恒成立，

$\therefore x^2+2x>-a$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上恒成立.

$\because$ 函数 $y=x^2+2x$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的最小值为 3，

$\therefore -a<3$，

即 $a>-3$.

【强化闯关】

1. D $\because 1-x(1-x)=x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$，$\therefore y=\frac{1}{1-x(1-x)}$ 的最大值为 $\frac{4}{3}$. 故选 D.

2. B　如图 3－1－1，作出两个函数 $f(x)=3-2|x|$ 与 $g(x)=x^2-2x$ 的图像，则 $F(x)$ 的图像为图中实线部分，显然只有小于 3 的最大值，没有最小值. 故选 B.

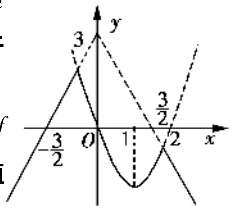


图 3－1－1

3. 1，$(1,+\infty)$　由已知 $1\otimes k=\sqrt{k}+1+k=3$ 解得 $k=1$，$\therefore f(x)=k\otimes x=\sqrt{x}+1+x=(\sqrt{x}+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$，又$\because x\in\mathbf{R}^+$，$\therefore$ 值域为 $(1,+\infty)$.

4. 由题目知 $f(x)$ 的图像是开口向下，交 x 轴于两点 $A(-3,0)$ 和 $B(2,0)$ 的抛物线，对称轴方程为 $x=-\frac{1}{2}$，那么，当 $x=-3$ 和 $x=2$ 时，有 $y=0$，

代入原式得

$$\begin{cases}0=a(-3)^2+(b-8)\times(-3)-a-ab,\\0=a\times2^2+(b-8)\times2-a-ab,\end{cases}$$

解得：$\begin{cases}a=0,\\b=8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-3,\\b=5.\end{cases}$

经检验知 $\begin{cases}a=0,\\b=8\end{cases}$ 不符合题意，舍去，$\therefore f(x)=-3x^2-3x+18$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内为单调递减，又当 $x=0$ 时，$y=18$，当 $x=1$ 时，$y=12$，

$\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 内的值域为 $[12,18]$.

5. (1) $g(x)=2x^2-4x-16<0$，

$\therefore (2x+4)(x-4)<0$，$\therefore -2<x<4$，

$\therefore$ 不等式 $g(x)<0$ 的解集为 $\{x|-2<x<4\}$.

(2) 在 $|x^2+ax+b|\leqslant|2x^2-4x-16|$ 中取 $x=4$，$x=-2$，

得 $\begin{cases}|16+4a+b|\leqslant0,\\|4-2a+b|\leqslant0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}16+4a+b=0,\\4-2a+b=0,\end{cases}$ $\therefore a=-2,b=-8$.

(3) 由 (2) 知 $f(x)=x^2-2x-8$，

$x^2+ax+b\geqslant(m+2)x-m-15\ (x>2)$，

$\therefore x^2-2x-8\geqslant(m+2)x-m-15$，即

$x^2-4x+7\geqslant m(x-1)$，

$\therefore$ 对一切 $x>2$，均有不等式 $\frac{x^2-4x+7}{x-1}\geqslant m$ 成立.

而 $\frac{x^2-4x+7}{x-1}=(x-1)+\frac{4}{x-1}-2\geqslant2\sqrt{(x-1)\times\frac{4}{x-1}}-2=2$，

当 $x=3$ 时等号成立，

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $(-\infty,2]$.

《试题调研》（第二辑）

难点 2　数列的通项与求和

难点诠释

数列的通项与求和,是研究数列的两大基本工具. 高考试题一般以等差、等比数列的通项公式和前 n 项和公式为基础,通过数列的通项或求和考查考生对数列知识的掌握情况,从而形成数列问题的一大难点. 题型一般是一道客观题和一道解答题,客观题属中档题,解答题难度较高.

1. 数列通项的考查一般有两个角度:一是求数列的通项,如递推、S_n 与 a_n 的关系等;二是从函数或方程的观点出发,研究数列通项的性质,如最大(小)项、项的存在性等问题.

2. 数列求和也有相似的两个考查角度:一是求数列的前 n 项和,如倒序相加法、错位相减法、裂项相消法等;二是把数列求和与函数、不等式、方程等知识结合,综合考查数列和式的相关性质,如和式的最值、单调性、解不等式等.

典例调研

题型一　子数列的通项

【调研 1】 设数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2,公比为 2 的等比数列,数列 $\{b_n\}$ 是首项为 5,公差为 3 的等差数列,由这两个数列中相同的项依次组成一个新数列 $\{c_n\}$,求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式 c_n.

解析　由条件知,$a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$,$b_n=5+(n-1)\cdot 3=3n+2$.

设数列 $\{a_n\}$ 中的第 k 项与数列 $\{b_n\}$ 的第 m 项相同,则 $2^k=3m+2$,其中 $m,k\in\mathbf{N}^*$,

即 $m=\frac{1}{3}(2^k-2)=\frac{1}{3}[(3-1)^k-2]=\frac{1}{3}[\mathrm{C}_k^0 3^k-\mathrm{C}_k^1 3^{k-1}+\cdots+(-1)^{k-1}\mathrm{C}_k^{k-1}\cdot 3+(-1)^k-2]=[\mathrm{C}_k^0 3^{k-1}-\mathrm{C}_k^1 3^{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\mathrm{C}_k^{k-1}]+\frac{1}{3}[(-1)^k-2]$,

而 $\mathrm{C}_k^0 3^{k-1}-\mathrm{C}_k^1 3^{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\mathrm{C}_k^{k-1}$ 为正整数,要使 m 为正整数,k 必为奇数.

当 $k=1$ 时,$a_1=2$,而 $b_1>2$,$n\in\mathbf{N}^*$,$\therefore k\neq 1$,令 $k=2n+1$,$n\in\mathbf{N}^*$,

$\therefore c_n=2^{2n+1}=8\cdot 4^{n-1}$,$n\in\mathbf{N}^*$.

【方法探究】 探索两个数列公共项的有关性质,首先要知道公共项构成的数列是两个数列的子数列,抓住它们的通项是解题的关键.

(1) 本题中,在求新数列 $\{c_n\}$ 时,有些学生可能是找出它的前几项就得出数列 $\{c_n\}$ 为等比数列,这是不严密的,必须要严格论证.

(2) 本解答中探索 k 的取值时,利用了整数整除的有关性质,即若 a 被 d 整除,且 $a\pm b$ 被 d 整除,则必有 b 被 d 整除. 因此在分析 $m=\frac{2^k-2}{3}$ 这一式子时,由于 m,k 均为正整数,则 2^k-2 必须要能被 3 整除,故可将 2 改写为 $3-1$,再结合二项式定理和上述整数整除的性质,做进一步的分析.

拓展1 从数列 $\{a_n\}$ 中取出部分项，并将它们按原来顺序组成一个数列 $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \cdots$，称之为数列 $\{a_n\}$ 的一个子数列，设数列 $\{a_n\}$ 是一个公差不为零的等差数列，且 $a_3=6$. 取 $n_1=1, n_2=3$.

（1）若 $a_1=4$，那么数列 $\{a_n\}$ 是否存在无穷等比子数列 $\{a_{n_k}\}$，为什么；

（2）若数列 $\{a_n\}$ 存在无穷等比子数列 $\{a_{n_k}\}$，求最小整数 a_1 的值及此时 n_k 的表达式？

题型二 复合数列的通项

【调研2】 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}(x<-2)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}\cdot f^{-1}(a_n)=-1, n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求通项 a_n；

（2）设 $S_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2, b_n=S_{2n+1}-S_n$，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $b_n<\dfrac{m}{15}$ 成立，求 m 的取值范围.

解析 （1）$\because f^{-1}(x)=-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+4}(x>0)$，$\therefore a_{n+1}\cdot\left(-\sqrt{\dfrac{1}{a_n^2}+4}\right)=-1$，即 $\dfrac{1}{a_n^2}+4=\dfrac{1}{a_{n+1}^2}$，

$\therefore$ 数列 $\{\dfrac{1}{a_n^2}\}$ 为等差数列，公差为 4，首项为 $\dfrac{1}{a_1^2}=1$，

故 $\dfrac{1}{a_n^2}=4n-3$，$\therefore a_n=\dfrac{1}{\sqrt{4n-3}}$.

（2）$\because S_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{4n-3}$，

$\therefore b_n=S_{2n+1}-S_n=\dfrac{1}{4n+1}+\dfrac{1}{4n+5}+\cdots+\dfrac{1}{8n+1}$.

$\because b_{n+1}-b_n=\left(\dfrac{1}{4n+5}+\dfrac{1}{4n+9}+\cdots+\dfrac{1}{8n+9}\right)-\left(\dfrac{1}{4n+1}+\dfrac{1}{4n+5}+\cdots+\dfrac{1}{8n+1}\right)=\dfrac{1}{8n+9}+\dfrac{1}{8n+5}-\dfrac{1}{4n+1}<\dfrac{1}{8n+2}+\dfrac{1}{8n+2}-\dfrac{1}{4n+1}=0$，

$\therefore b_1>b_2>b_3>\cdots>b_n>b_{n+1}>\cdots$，

$\therefore$ 要使 $b_n<\dfrac{m}{15}$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，则 $b_1<\dfrac{m}{15}$，

又 $\because b_1=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{14}{45}$，$\therefore \dfrac{14}{45}<\dfrac{m}{15}$，解得 $m>\dfrac{14}{3}$.

【技巧点拨】 本题的第(1)问是先证明由数列 $\{a_n\}$ 产生的复合数列 $\{\dfrac{1}{a_n^2}\}$ 成等差数列，再求 a_n. 解决这一问的难点是如何对递推关系进行适当变形，得出 $\dfrac{1}{a_{n+1}^2}-\dfrac{1}{a_n^2}=4$ 这一等差数列特征.

拓展 2 已知$f(x)=\frac{x}{2x+1}$,数列$\{a_n\}$满足$a_n=f(a_{n-1})(n>1,n\in\mathbf{N}^*)$,且$a_1=f(2)$,求数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n$.

题型三 通项中的方程与不等式

【调研 3】 已知数列$\{a_n\}$中,$a_1>0$,且$a_{n+1}=\sqrt{\frac{3+a_n}{2}}$.

(1)试求a_1的值,使得数列$\{a_n\}$是一个常数数列;

(2)试求a_1的取值范围,使得$a_{n+1}>a_n$对任何自然数n都成立.

分析 第(1)问由$a_{n+1}=a_n$建立方程,求解即可. 第(2)问显然不是求出通项公式后,解不等式的问题,要充分利用递推关系解题.

解析 (1)欲使数列$\{a_n\}$是一个常数数列,则$a_{n+1}=\sqrt{\frac{3+a_n}{2}}=a_n$,又由$a_1>0$,可以推得$a_n>0$,

解得$a_n=\frac{3}{2}$,即$a_1=a_2=\frac{3}{2}$.

(2)$\because a_{n+1}-a_n=\sqrt{\frac{3+a_n}{2}}-\sqrt{\frac{3+a_{n-1}}{2}}=\frac{a_n-a_{n-1}}{2\left(\sqrt{\frac{3+a_n}{2}}+\sqrt{\frac{3+a_{n-1}}{2}}\right)}(n\geqslant2)$,

而$2\left(\sqrt{\frac{3+a_n}{2}}+\sqrt{\frac{3+a_{n-1}}{2}}\right)>0$,

$\therefore a_{n+1}-a_n$与a_n-a_{n-1}有相同的符号,

$\therefore a_{n+1}-a_n$与a_2-a_1有相同的符号.

要使$a_{n+1}>a_n$对任意自然数都成立,故只需$a_2-a_1>0$,

即$\sqrt{\frac{3+a_1}{2}}-a_1>0$,解得$0<a_1<\frac{3}{2}$.

【技巧点拨】 数列是特殊的函数,数列的通项公式既可以从代数式的角度出发,研究相应的方程或不等式的求解,也可以从函数角度出发,研究相应的大小关系与最值. 本题的特别之处在于由递推关系式很难求出数列的通项公式,因此不能从通项公式的特征出发,去解决相关问题. 这种情况下如何合理使用递推关系式显得尤为重要. 由"$a_{n+1}-a_n$与a_n-a_{n-1}同号""传递"到"$a_{n+1}-a_n$与a_2-a_1同号"是本题的核心要略.

拓展 3 已知数列$\{a_n\}$是以a为首项,a为公比的等比数列($a>0,a\neq1$),令$b_n=a_n\lg a_n$,若$\{b_n\}$中每一项总小于它后面的项,求a的范围.

题型四 数列的求和

【调研 4】 数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,当$n\geqslant2$时,其前n项和S_n满足$S_n^2=a_n\left(S_n-\frac{1}{2}\right)$.

难点透视

(1) 求 S_n 的表达式；

(2) $b_n=\frac{S_n}{2n+1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

分析　注意本题第(1)问是求 S_n 而不是 a_n，因此在使用 S_n 与 a_n 的关系时，应将 a_n 用 S_n 表示，把 $\{S_n\}$ 视为数列，求其通项. 第(2)问分析 b_n 的结构，需选择正确的求和方法.

解析　(1) 当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n^2=a_n(S_n-\frac{1}{2})=(S_n-S_{n-1})(S_n-\frac{1}{2})$，

化简得 $S_n\cdot S_{n-1}=\frac{1}{2}(S_{n-1}-S_n)$，

$\therefore \frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=2$，$\therefore$ $\{\frac{1}{S_n}\}$ 是以 $\frac{1}{S_1}=1$ 为首项，2 为公差的等差数列，

$\therefore$ $\frac{1}{S_n}=1+(n-1)\times 2=2n-1$，$\therefore S_n=\frac{1}{2n-1}$.

(2) $b_n=\frac{S_n}{2n+1}=\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，

$\therefore T_n=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$

$=\frac{n}{2n+1}$.

【知识链接】　数列求和是数列的难点内容. 数列求和的常用方法有：

(1) 公式法：等差或等比数列的前 n 项和直接利用求和公式求得.

(2) 错位相减法：由等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 的对应项乘积构成的新数列 $\{a_nb_n\}$，可将数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和的两边分别乘以数列 $\{b_n\}$ 的公比后，再错位相减求出其前 n 项的和.

(3) 倒序相加法：如果在数列 $\{a_n\}$ 中，与首末两项等距离的两项之和等于首末两项之和，那么可以采用把正向和逆向的两个数列对应各项依次相加的方法进行求和. 如等差数列前 n 项和公式的推导.

(4) 裂项相消法：把一个数列的每一项变为两项(或以上)之差的形式，再化简求和. 如 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ 等(如本题).

(5) 分组求和法：把一个数列分解成两个(或以上)可以求和的数列进行求和.

拓展 4　已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，且点 $P(a_n,a_{n+1})(n\in\mathbf{N}^*)$ 在直线 $x-y+1=0$ 上.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n=\frac{1}{a_n}$，S_n 表示数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，试问：是否存在关于 n 的整式 $g(n)$，使得 $S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}=(S_n-1)g(n)$ 对一切 $n\geqslant 2$ 的自然数 n 恒成立？若存

在，写出 $g(n)$ 的解析式并证明之 若不存在，则说明理由.

题型五 数列和式的放缩

【调研5】 已知数列3，7，13，…的各项是由一个等比数列和一个等差数列的对应项相加得到的，其中等差数列的首项为1，记等比数列为数列 $\{a_n\}$，等差数列为 $\{b_n\}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的通项公式 a_n、b_n；

(2) 设 $T_n=\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}$，证明：$T_n<3$.

分析 由题设条件知，数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，因此数列 $\{\frac{b_n}{a_n}\}$ 的前 n 项和 T_n 可以利用错位相减法求得，再与3比较大小即可.

解析 (1) 设 q、d 分别为数列 $\{a_n\}$、数列 $\{b_n\}$ 的公比与公差，而 $b_1=1$，且

$$\begin{cases}a_1+b_1=3,\\ a_1q+b_1+d=7,\\ a_1q^2+b_1+2d=13,\end{cases}$$ 解之得 $d=2$，$q=2$，$a_1=2$，$\therefore a_n=2^n$，$b_n=2n-1$.

(2) $T_n=\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，①

当 $n=1$ 时，$T_1=\frac{1}{2}$，当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$，②

①－②，得

$$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

$$\therefore T_n=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}<3.$$

【技巧点拨】 对于数列求和中的不等式证明问题，由于不等式的一端是数列的前 n 项和，另一端是一个具体的数值或代数式，因此解决问题的关键是如何对这 n 个数或式进行求和. 这样的问题一般可分为两大类：一是"先求和再放缩"，即数列的前 n 项和可以直接运用数列求和的方法求得，这时只要将所得数或式与欲证数或式进行比较即可，如本题所示. 二是"先放缩再求和"，即当数列的前 n 项和难以运用数列求和的方法直接求得时，可以先对数列的每一项进行适当放缩，使其便于前 n 项求和，然后再与欲证数或式建立可以传递的不等关系(见调研6).

拓展5 已知函数 $f(x)=2n\sqrt{1+x^2}-x$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值是 $a_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明：$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}<\frac{1}{2}$.

【调研6】 已知函数$f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$,$x\in(0,+\infty)$,数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=f(x_n)$($n=1,2,\cdots$),且$x_1=1$.

(1)设$a_n=|x_n-\sqrt{2}|$,证明:$a_{n+1}<a_n$;

(2)设(1)中的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,证明$S_n<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

分析 对于第(1)问,利用x_{n+1}与x_n、a_n与x_n的关系,进行转化即可达到目的.而第(2)问很显然无法求出a_n的通项公式,自然无法直接求S_n,此时可借助第(1)问所得a_{n+1}与a_n的等量关系进行不等式放缩,将a_n放大为等比数列求和.

解析 (1)$a_{n+1}=|x_{n+1}-\sqrt{2}|=(\sqrt{2}-1)\cdot\dfrac{|x_n-\sqrt{2}|}{|x_n+1|}<(\sqrt{2}-1)|x_n-\sqrt{2}|<|x_n-\sqrt{2}|=a_n$.

(2)由$a_{n+1}<(\sqrt{2}-1)a_n$,得$a_n<(\sqrt{2}-1)^n$,

$\therefore S_n<(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)^2+\cdots+(\sqrt{2}-1)^n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}[1-(\sqrt{2}-1)^n]<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

【方法探究】 对数列进行放缩的难点是适量问题,既要考虑到放缩为容易求和的数列形式,又要兼顾放缩后的和式与目的值接近.在本题中,若直接利用第(1)问的结论$a_{n+1}<a_n$进行放缩,即$a_n<a_{n-1}<\cdots<a_2<a_1$,可得$S_n<na_1=n(\sqrt{2}-1)$不小于$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,不能达到预期效果.进一步调整放缩量,控制$a_{n+1}<(\sqrt{2}-1)a_n$,即$a_n<(\sqrt{2}-1)^n$,放缩为等比数列,求和才容易证明结论.所以要善于从结论中挖掘隐含信息,为解题提供有益的帮助.

拓展6 已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=a$($a>2$),对一切$n\in\mathbf{N}^*$,$a_n>0$,$a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{2(a_n-1)}$.

(1)求证:$a_n>2$,且$a_{n+1}<a_n$;

(2)证明:$a_1+a_2+\cdots+a_n<2(n+a-2)$.

强化闯关

1. 全体正奇数排成下表:

1

3 5

7 9 11

13 15 17 19

21 23 25 27 29

… …

浮躁的人分两种:a)只观望而不学的人;b)只学而不坚持的人。

其构成规律是:第 n 行恰有 n 个连续奇数;从第二行起,每一行第一个数与上一行最后的一个数是相邻奇数,则 2 007 是第______行的第______ 个数.

2. 方程 $f(x)=x$ 的根称为 $f(x)$ 的不动点,若函数 $f(x)=\dfrac{x}{a(x+2)}$ 有惟一不动点,且 $x_1=1\ 000$,$x_{n+1}=\dfrac{1}{f(\frac{1}{x_n})}(n\in\mathbf{N}^*)$,则 $x_{2\ 005}=$______ .

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项的和为 10,且 a_2,a_3,a_7 成等比数列.

(1)求通项公式 a_n;

(2)设 $b_n=2^{a_n}$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和 S_n.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=2$,且 $2a_{n+1}=a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)设 $b_n=na_n$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n;

(2)求使不等式 $|a_{n+1}-a_n|<10^{-9}$ 成立的最小正整数 n.(已知 $\lg 2=0.301\ 0$)

5. 已知函数 $f(x)=2+\dfrac{1}{x}$,在数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=a$,$a_{n+1}=f(a_n)(n\in\mathbf{N}^*)$. 当 a 取不同的值时,得到不同的数列 $\{a_n\}$,如当 $a=1$ 时,得到无穷数列 $1,3,\dfrac{7}{3},\dfrac{17}{7},\cdots$,当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时,得到有穷数列 $-\dfrac{1}{2},0$.

(1)求 a 的值,使得 $a_3=0$;

(2)设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=-\dfrac{1}{2}$,$b_n=f(b_{n+1})(n\in\mathbf{N}^*)$,求证:不论 a 取 $\{b_n\}$ 中的任何数,都可以得到一个有穷数列 $\{a_n\}$;

(3)求 a 的取值范围,使得当 $n\geqslant 2$ 时,有 $\dfrac{7}{3}<a_n<3$.

参考答案

【拓展】

1. (1)假设数列 $\{a_n\}$ 存在无穷等比子数列 $\{a_{n_k}\}$,设数列 $\{a_n\}$ 公差为 d,数列 $\{a_{n_k}\}$ 公比为 q,则 $d=\dfrac{a_3-a_1}{2}=1$,$a_{n_k}=a_3+(n_k-3)d=n_k+3$,

又 $q=\dfrac{a_3}{a_1}=\dfrac{3}{2}$,$\therefore a_{n_k}=a_1q^{k-1}=4(\dfrac{3}{2})^{k-1}$,

$\therefore n_k+3=4(\dfrac{3}{2})^{k-1}$,即 $n_k=4(\dfrac{3}{2})^{k-1}-3$,

$\because n_4=4(\dfrac{3}{2})^{4-1}-3=\dfrac{21}{2}$ 不是正整数,这与 $n_4\in\mathbf{N}^*$ 矛盾,

故数列 $\{a_n\}$ 不存在无穷等比子数列 $\{a_{n_k}\}$.

(2)若数列 $\{a_n\}$ 存在无穷等比子数列 $\{a_{n_k}\}$,则 $a_{n_2}^2=a_{n_1}\cdot a_{n_3}$,即 $a_3^2=a_1\cdot a_{n_3}$,

$\therefore 36=a_1[6+(n_3-3)d]$,又 $d=\dfrac{a_3-a_1}{2}=\dfrac{6-a_1}{2}$,$\therefore 36=a_1[6+(n_3-3)\cdot\dfrac{6-a_1}{2}]$,

又$\because d\neq0$,$\therefore a_1\neq6$,$\therefore n_3-3=\dfrac{12}{a_1}$.

$\because n_3-3$ 为正整数且 $a_1\neq6$,$\therefore$ 整数 $a_1=1,2,3,4,12$.

$\because a_{n_k}=6+(n_k-3)\dfrac{6-a_1}{2}$且 $a_{n_k}=a_1(\dfrac{6}{a_1})^{k-1}$,$\therefore n_k=\dfrac{2}{6-a_1}[a_1\cdot(\dfrac{6}{a_1})^{k-1}-6]+3$.

当 $a_1=1$ 时,$n_k=\dfrac{2}{5}(6^{k-1}-6)+3$,当 $k>2$ 时,由 6^{k-1} 的末位数为 6,可知 $6^{k-1}-6$ 的末位数必为 0,

即 n_k 必为正整数,故最小整数 $a_1=1$,此时 $n_k=\dfrac{2}{5}[6^{k-1}-6]+3$.

2. $a_1=f(2)=\dfrac{2}{5}$,又$\because a_n=f(a_{n-1})(n\geqslant2)$,$\therefore a_n=\dfrac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}(n\geqslant2)$,

$\therefore \dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}}=2+\dfrac{1}{a_{n-1}}$,即$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=2(n\geqslant2)$,

$\therefore$ 数列 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ 是等差数列,且公差为 2,

$\therefore \dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1}+(n-1)\cdot d=\dfrac{5}{2}+(n-1)\cdot2=\dfrac{4n+1}{2}$,

故 $a_n=\dfrac{2}{4n+1}$.

3. 由已知得 $a_n=a^n$,则 $b_n=na^n\lg a$,又 $b_{n+1}>b_n$,则 $n\lg a<(n+1)a\lg a$.

(1)当 $a>1$ 时,$a>\dfrac{n}{n+1}$显然成立;

(2)当 $0<a<1$ 时 $a<\dfrac{n}{n+1}$,令 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$,则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,

$\because (\dfrac{n}{n+1})_{\min}=\dfrac{1}{2}(n\in\mathbf{N})$,$\therefore 0<a<\dfrac{1}{2}$,

$\therefore$ 符合条件的 a 的范围是 $a>1$ 或 $0<a<\dfrac{1}{2}$.

4. (1)由题设,知 $a_1=1$,且 $a_{n+1}-a_n=1$,即 $a_n=1+(n-1)\cdot1=n$.

(2)$b_n=\dfrac{1}{n}$,$S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$,

$\therefore S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{n-1}$

$=1+(1+\dfrac{1}{2})+(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3})+\cdots+(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n-1})$

$=(n-1)+\dfrac{1}{2}(n-2)+\dfrac{1}{3}(n-3)+\cdots+\dfrac{1}{n-1}[n-(n-1)]$

$=n(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})-(n-1)$

$=n+n(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})-n+1$

$=n(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})$

$=n(S_n-1)$，

$\therefore$ 使得 $S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}=(S_n-1)g(n)$ 成立的 $g(n)$ 存在，且 $g(n)=n$.

5. (1) 由 $f'(x)=\frac{2nx}{\sqrt{1+x^2}}-1$ 知，$f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}})$ 上是减函数，在 $(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}},+\infty)$ 上是增函数，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的最小值 $a_n=f(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}})=\sqrt{4n^2-1}$.

(2) $\because \frac{1}{a_n^2}=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，

$\therefore \frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]$

$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})<\frac{1}{2}$.

6. (1) $\because a_{n+1}=\frac{a_n^2}{2(a_n-1)}>0$，

$\therefore a_n>1$，$\therefore a_n-2=\frac{a_{n-1}^2}{2(a_{n-1}-1)}-2=\frac{(a_{n-1}-2)^2}{2(a_{n-1}-1)}\geqslant 0$，即 $a_n\geqslant 2$.

若存在 $a_k=2$，则 $a_{k-1}=2$，由此可推出 $a_{k-2}=2,\cdots,a_1=2$，

$\because a_1=a>2$，故 $a_n>2$.

又 $\because a_{n+1}-a_n=\frac{a_n(2-a_n)}{2(a_n-1)}<0$，$\therefore a_{n+1}<a_n$.

(2) $\because a_n-2=\frac{a_{n-1}-2}{2}\cdot\frac{a_{n-1}-2}{a_{n-1}-1}<\frac{a_{n-1}-2}{2}$，$\therefore a_n-2<\frac{a_{n-1}-2}{2}<\frac{a_{n-2}-2}{2^2}<\cdots<\frac{a_1-2}{2^{n-1}}(n\geqslant 2)$，

$\therefore (a_1-2)+(a_2-2)+\cdots+(a_n-2)\leqslant(a-2)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})=2(a-2)(1-\frac{1}{2^n})<2(a-2)$，

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_n<2(n+a-2)$.

【强化闯关】

1. 45、14 n 行共有 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 个奇数，因此，第 n 行的最后一个数是 2

难点透视

$\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}-1=n^2+n-1$，从而第 n 行的第一个数是 $(n^2+n-1)-2(n-1)=n^2-n+1$，令 $n^2-n+1<2\ 007<n^2+n-1$，解得 $n=45$，$n^2-n+1=1\ 981$，故 $2\ 007$ 是第 45 行第 m 个数，则 $2\ 007=1\ 981+(m-1)\times 2$，得 $m=14$. 所以 $2\ 007$ 是第 45 行的第 14 个数.

2. $2\ 002$　由题意知关于 x 的方程 $\dfrac{x}{a(x+2)}=x$ 有惟一解，即 $x(ax+2a-1)=0(x\neq-2)$ 有惟一解. 因此方程 $ax+2a-1=0$ 的解必为 $x=0$，$\therefore a=\dfrac{1}{2}$. 此时 $x_{n+1}=\dfrac{1}{f(\frac{1}{x_n})}=\dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{x_n}+2)}{\frac{1}{x_n}}=\dfrac{1}{2}+x_n$. 故 $x_{2\ 005}=x_1+1\ 002=2\ 002$.

3. (1) 由题意知 $\begin{cases}4a_1+6d=10,\\(a_1+2d)^2=(a_1+d)(a_1+6d),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=-2,\\d=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=\dfrac{5}{2},\\d=0,\end{cases}$

$\therefore a_n=3n-5$ 或 $a_n=\dfrac{5}{2}$.

(2) 当 $a_n=3n-5$ 时，数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $\dfrac{1}{4}$，公比为 8 的等比数列，

$S_n=\dfrac{\frac{1}{4}(1-8^n)}{1-8}=\dfrac{8^n-1}{28}$；

当 $a_n=\dfrac{5}{2}$ 时，$S_n=2^{\frac{5}{2}}n$，

综上，$S_n=\dfrac{8^n-1}{28}$ 或 $S_n=2^{\frac{5}{2}}n$.

4. (1) 由 $2a_{n+1}=a_n+1$ 得 $a_{n+1}-1=\dfrac{1}{2}(a_n-1)$，

可知数列 $\{a_n-1\}$ 是以 $a_1-1=1$ 为首项，$\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列，

$\therefore a_n=(\dfrac{1}{2})^{n-1}+1(n\in\mathbf{N}^*)$，

$\therefore b_n=na_n=n\cdot(\dfrac{1}{2})^{n-1}+n$，

$\because T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，

$\therefore T_n=1\cdot(\dfrac{1}{2})^0+2\cdot(\dfrac{1}{2})^1+3\cdot(\dfrac{1}{2})^2+\cdots+n\cdot(\dfrac{1}{2})^{n-1}+(1+2+\cdots+n)$，①

$\dfrac{1}{2}T_n=1\cdot(\dfrac{1}{2})^1+2\cdot(\dfrac{1}{2})^2+\cdots+(n-1)\cdot(\dfrac{1}{2})^{n-1}+n\cdot(\dfrac{1}{2})^n+\dfrac{1}{2}\cdot$

$\frac{n(n+1)}{2}$,②

① - ②并整理得 $T_n=4-(4+2n)\cdot(\frac{1}{2})^n+\frac{n(n+1)}{2}$.

(2) $|a_{n+1}-a_n|=(\frac{1}{2})^n<10^{-9}$,两边取常用对数得 $n>\frac{9}{\lg 2}\approx 29.9$,

∴ 使不等式成立的最小正整数 n 为30.

5. (1) ∵ $a_1=a$,$a_{n+1}=2+\frac{1}{a_n}$,∴ $a_2=2+\frac{1}{a_1}=\frac{2a+1}{a}$,$a_3=2+\frac{1}{a_2}=\frac{5a+2}{2a+1}$,

若 $a_3=0$,即 $a=-\frac{2}{5}$, 所以 $a=-\frac{2}{5}$时,$a_3=0$.

(2) 由题知 $b_1=-\frac{1}{2}$,$2+\frac{1}{b_{n+1}}=b_n$. 不妨设 a 取 b_n,则

$a_2=2+\frac{1}{b_n}=b_{n-1}$,$a_3=2+\frac{1}{a_2}=2+\frac{1}{b_{n-1}}=b_{n-2}$,…,

$a_n=2+\frac{1}{a_{n-1}}=2+\frac{1}{b_2}=b_1=-\frac{1}{2}$,

∴ $a_{n+1}=0$,

∴ 不论 a 取 $\{b_n\}$ 中的任何数,都可以得到一个有穷数列 $\{a_n\}$.

(3) $\frac{7}{3}<a_n<3\Rightarrow\frac{7}{3}<2+\frac{1}{a_n}<\frac{17}{7}\Rightarrow\frac{7}{3}<a_{n+1}<\frac{17}{7}$,∴ 只要有 $\frac{7}{3}<a_2<3$,就有 $\frac{7}{3}<a_n<3(n\geqslant 3)$.

∴ 由 $\begin{cases}\frac{2a+1}{a}>\frac{7}{3},\\ \frac{2a+1}{a}<3\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}0<a<3,\\ a<0 \text{ 或 } a>1,\end{cases}$ 即 $1<a<3$,

∴ a 的取值范围是 $(1,3)$.

难点3　函数数列综合应用

难点诠释

函数或数列综合应用问题是高中数学的一大难点,也是历年高考的热点内容. 试题常以压轴题的形式出现,通过知识与方法的融合,多角度、多层次地考查考生分析问题、解决问题的能力.

1. 函数综合题的类型一般可以分为三类:一类是函数内部多种知识(如奇偶性、单调性、反函数、值域、最值等)的综合或函数同其他知识(如方程、不等式等)的综合;一类是函数问题在解题过程中蕴含着重要的数学思想方法;一类是函数论证题(见热点1). 其函数模型主要是二次函数、反比例函数、指数函数、对数函

数，或者是它们简单的复合.

2. 数列综合题的类型一般有两类：一类是数列与函数的综合，从数列是一种特殊的函数的角度，用函数观点研究数列性质，或用数列方法处理函数问题，解决此类问题的基本方法是先结合函数的性质对问题进行转化，再融入数列知识；一类是数列与不等式的综合，如用不等式的性质解决数列有关项或与式的大小比较，数列的不等式证明等.

典例调研

题型一　函数的综合应用

【调研1】　对于函数$f(x)=ax^2+(b+1)x+b-2(a\neq 0)$，若存在实数$x_0$，使$f(x_0)=x_0$成立，则称$x_0$为$f(x)$的不动点.

(1) 当$a=2,b=-2$时，求$f(x)$的不动点；

(2) 若对于任何实数b，函数$f(x)$恒有两相异的不动点，求实数a的取值范围；

(3) 在(2)的条件下，若$y=f(x)$的图像上A、B两点的横坐标是函数$f(x)$的不动点，且直线$y=kx+\dfrac{1}{2a^2+1}$是线段AB的垂直平分线，求实数b的取值范围.

分析　第(1)问直接求解即可；第(2)问利用二次方程的判别式处理；第(3)问由AB垂直平分线的惟一性，建立实数b与a的函数关系，进而求出取值范围.

解析　(1)当$a=2,b=-2$时，$f(x)=2x^2-x-4$. 设x为其不动点，

则$2x^2-x-4=x$，即$2x^2-2x-4=0$，

解得$x=-1$或$x=2$，即$f(x)$的不动点是-1，2.

(2)由$f(x)=x$，得$ax^2+bx+b-2=0$，根据题意该方程恒有两个相异的实根，

$\therefore b^2-4a(b-2)>0$对任意的$b\in\mathbf{R}$恒成立，即关于b的二次不等式$b^2-4ab+8a>0$恒成立，

$\therefore 16a^2-32a<0$，解得$0<a<2$.

(3)设$A(x_1,x_1)$，$B(x_2,x_2)$，则直线AB的斜率$k_{AB}=1$，$\therefore k=-1$.

由(2)知AB中点M的坐标为$\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{b}{2a}\right)$，

又线段AB的垂直平分线方程是$y=kx+\dfrac{1}{2a^2+1}$，

$\therefore -\dfrac{b}{2a}=\dfrac{b}{2a}+\dfrac{1}{2a^2+1}$，

整理得$b=-\dfrac{a}{2a^2+1}=-\dfrac{1}{2a+\dfrac{1}{a}}\geqslant-\dfrac{1}{2\sqrt{2a\cdot\dfrac{1}{a}}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$（当$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，等号成立），故$b\geqslant-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

【技巧点拨】 本题将函数与方程、不等式知识有机地结合在一起. 第(2)问首先将函数有不动点的问题转化为方程有解的问题. 在恒成立问题的处理上,要分清谁是变量,谁是参数,即理解"恒"的意义是在谁的变化过程中永恒不变(本题中,"对于任何实数 b,函数 $f(x)$ 恒有两相异的不动点"). 这就是第一次使用判别式($b^2-4a(b-2)>0$)后,为什么要针对关于 b 的不等式第二次使用判别式($16a^2-32a<0$)的原因. 第(3)问利用双变量的函数关系,将范围问题转化为函数的值域问题,体现了函数思想方法的应用性.

拓展1 已知函数 $f(x)=\lg\dfrac{2x}{ax+b}$,且 $f(1)=0$,当 $x>0$ 时,恒有 $f(x)-f(\dfrac{1}{x})=\lg x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若方程 $f(x)=\lg(m+x)$ 的解集为空集,求实数 m 的取值范围.

题型二 数列的综合应用

【调研2】 数列 $\{a_n\}$ 中,首项 $a_1=2$,前 n 项和为 S_n,且 $4tS_{n+1}-(3t+8)S_n=8t$,其中 $t<-3$,$n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 判断 $\{a_n\}$ 是否为等比数列,并证明你的结论;

(2) 若对每个正整数 n,以 a_n,a_{n+1},a_{n+2} 为边长都能构成三角形,求 t 的取值范围.

分析 首先通过 S_n 与 a_n 的关系,确定 a_{n+1} 与 a_n 的递推关系,再判断数列 $\{a_n\}$ 是否满足等比数列的定义. 第(2)问根据三角形任意两边之和大于第三边,建立不等式求解即可.

解析 (1)由 $S_1=a_1=2$,$S_2=a_1+a_2=2+a_2$,得 $4t(2+a_2)-2(3t+8)=8t$,

$\therefore a_2=\dfrac{3t+8}{2t}$,于是 $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{3t+8}{4t}$.

又 $4tS_{n+1}-(3t+8)S_n=8t$,$4tS_n-(3t+8)S_{n-1}=8t(n\geqslant 2)$,

两式相减得 $4ta_{n+1}=(3t+8)a_n(n\geqslant 2)$,即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3t+8}{4t}(n\geqslant 2)$,

故 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3t+8}{4t}(n\in\mathbf{N}^*)$,

$\therefore$ $\{a_n\}$ 是首项为2,公比为 $\dfrac{3t+8}{4t}$ 的等比数列.

(2)由(1)知 $a_n=2(\dfrac{3t+8}{4t})^{n-1}$,$n\in\mathbf{N}^*$.

$\because t<-3$ 时,$0<\dfrac{3t+8}{4t}<1$,又 $a_1=2>0$,

$\therefore$ $\{a_n\}$ 是一个单调递减的数列,即对每一个正整数 n,都有 $a_n>a_{n+1}>a_{n+2}>0$,故以 a_n,a_{n+1},a_{n+2} 为边长能构成三角形的充要条件是:$a_{n+1}+a_{n+2}>a_n$,

$\therefore 2(\dfrac{3t+8}{4t})^{n}+2(\dfrac{3t+8}{4t})^{n+1}>2(\dfrac{3t+8}{4t})^{n-1}$,

难点透视

解得 $t > -8+\frac{16\sqrt{5}}{5}$ 或 $t < -8-\frac{16\sqrt{5}}{5}$，

$\because t < -3$，$\therefore t < -8-\frac{16\sqrt{5}}{5}$.

【误点警示】 由 S_n 与 a_n 的关系，通过题设条件 $4tS_{n+1}-(3t+8)S_n=8t$，确定 a_{n+1} 与 a_n 的递推关系是本题解题的突破口. 但由于 $a_n=\begin{cases}S_1, n=1,\\ S_n-S_{n-1}, n\geqslant 2\end{cases}$ 的分段特征，考生容易错误地从结论 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3t+8}{4t}$ 出发，直接对数列 $\{a_n\}$ 成等比数列给出定论. 实际上，结论 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3t+8}{4t}$ 只在 $n\geqslant 2$ 时成立，也就是说至少是 $\frac{a_3}{a_2}=\frac{3t+8}{4t}$，不能忽视对 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{3t+8}{4t}$ 的补充说明.

拓展 2 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2$，$a_{n+1}=2(1+\frac{1}{n})^2a_n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n=(An^2+Bn+C)\cdot 2^n$，试推断是否存在常数 A，B，C，使得对于一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $a_n=b_{n+1}-b_n$ 成立？说明你的理由；

(3) 求证：$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant 2^{n+2}-6$.

题型三 函数与数列的综合应用

【调研 3】 设单调函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(0)\neq 0$，对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，恒有 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=f(0)$，$f(a_{n+1})=\frac{1}{f(-2-a_n)}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求 $f(0)$ 的值；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(3) 是否存在正数 k，使 $(1+\frac{1}{a_1})\cdot(1+\frac{1}{a_2})\cdot(1+\frac{1}{a_3})\cdot\cdots\cdot(1+\frac{1}{a_n})\geqslant k\sqrt{2n+1}$ 对一切正自然数 n 均成立？若存在，求出 k 的最大值 若不存在，说明理由.

分析 由 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，通过赋值可以求得 $f(0)$. 利用函数的单调性可以脱去函数符号"f"，建立 a_{n+1} 与 a_n 之间的递推关系，进而求出通项. 利用分离法，将第(3)问化为 $k\leqslant g(n)$ 恒成立的问题.

解析 (1) $\because$ 对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，恒有 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，$\therefore$ 令 $x=y=0$，得 $f(0)=f^2(0)$，

$\because f(0)\neq 0$，$\therefore f(0)=1$.

(2) $\because a_1=f(0)=1$，$f(a_{n+1})=\frac{1}{f(-2-a_n)}$，$\therefore f(a_{n+1})\cdot f(-2-a_n)=f(0)$，即

别指望看第一遍书就能记住和掌握什么——请看第二遍、第三遍。

$f(a_{n+1}-2-a_n)=f(0)$.

又$\because y=f(x)$是单调函数,$\therefore a_{n+1}-2-a_n=0$,即$a_{n+1}-a_n=2(n\in\mathbf{N}^*)$,

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是首项为1,公差为2的等差数列,即$a_n=2n-1$.

(3)要使命题恒成立,只要$k\leqslant\dfrac{(1+\frac{1}{a_1})(1+\frac{1}{a_2})(1+\frac{1}{a_3})\cdots(1+\frac{1}{a_n})}{\sqrt{2n+1}}$($*$)恒成立即可.

令$g(n)=\dfrac{(1+\frac{1}{a_1})(1+\frac{1}{a_2})(1+\frac{1}{a_3})\cdots(1+\frac{1}{a_n})}{\sqrt{2n+1}}$,

则$\dfrac{g(n+1)}{g(n)}=\dfrac{(1+\frac{1}{a_{n+1}})\cdot\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+3}}=\dfrac{2n+2}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}>1$,

$\therefore g(n+1)>g(n)$,即$g(n)$是关于正自然数n的单调增函数.

要使($*$)式恒成立,只要$k\leqslant g_{\min}(n)$即可,而$g_{\min}(n)=g(1)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore k$的最大值是$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

【技巧点拨】 本题的第(3)问转化为证明$k\leqslant g(n)$恒成立问题.$g(n)$是关于自然数n的函数,但关键不是如何求出$g(n)$,而是如何研究$g(n)$的单调性.在比较$g(n+1)$与$g(n)$的大小关系时,因作差以后变形较为复杂,故改为作商比较.另外本题中直接给出单调性函数,降低了问题的难度,可以隐去函数的单调性,增加本题难度.

拓展3 已知等差数列$\{a_n\}$,定义$f_n(x)=a+a_1x+\cdots+a_nx^n$,$n\in\mathbf{N}^*$,若对任意的$n\in\mathbf{N}^*$,满足:$y=f_n(x)$的图像经过点$(1,n^2)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)当n为奇数时,设$g(x)=\dfrac{1}{2}[f_n(x)-f_n(-x)]$,是否存在自然数$m$和$M$,使不等式$m<g(\frac{1}{2})<M$恒成立?若存在,求出$M$的最小值与$m$的最大值;若不存在,说明理由.

【调研4】 某个体经营者把开始六个月试销A、B两种商品的逐月投资与所获纯利润列成下表:

投资A种商品金额(万元)	1	2	3	4	5	6
获纯利润(万元)	0.65	1.39	1.85	2	1.84	1.40

难点透视

投资 B 种商品金额（万元）	1	2	3	4	5	6
获纯利润（万元）	0.25	0.49	0.76	1	1.26	1.51

该经营者准备下月投入 12 万元经营这两种产品，但不知投入 A、B 两种商品各多少才最合算. 请你帮助制定一个资金投入方案，使得该经营者能获得最大利润，并按你的方案求出该经营者下月可获得的最大纯利润（结果保留两个有效数字）.

解析　以投资额为横坐标，纯利润为纵坐标，在直角坐标系中画出散点图（如图 3－3－1）.

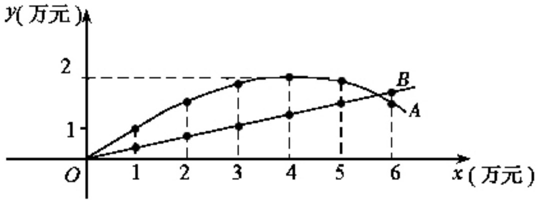


图 3－3－1

据此，可考虑用下列函数分别描述上述两组数据之间的对应关系：

$y=-a(x-4)^2+2(a>0)$，①　$y=bx$，②

把 $x=1$，$y=0.65$ 代入①式，得 $0.65=-a(1-4)^2+2$，解得 $a=0.15$.

故前六个月所获纯利润关于月投资于 A 商品的金额的函数关系式可近似地用 $y=-0.15(x-4)^2+2$ 表示.

再把 $x=4$，$y=1$ 代入②式，得 $b=0.25$，故前六个月所获纯利润关于月投资于 B 种商品的金额的函数关系可近似地用 $y=0.25x$ 表示.

设下月投资于 A 种商品 x 万元，则投资于 B 种商品为 $(12-x)$ 万元，可获纯利润：

$y=-0.15(x-4)^2+2+0.25(12-x)=-0.15x^2+0.95x+2.6$.

当 $x=\dfrac{-0.95}{2\times(-0.15)}\approx3.2$ 时，$y_{max}=\dfrac{4\times(-0.15)\times2.6-0.95^2}{4\times(-0.15)}\approx4.1$.

故下月分别投资 A、B 两种商品 3.2 万元和 8.8 万元，可获最大利润 4.1 万元.

【方法技巧】　根据问题所提供的数据作出散点图，再连线，用熟悉的函数模拟实际问题，再检验修正，然后用所得的函数模型解决实际问题，这是人类用数学解决实际问题的过程，也就是在实际问题中建立函数模型的过程. 它必将进入高考，因此我们必须熟练掌握这一思想方法.

拓展 4　**某种细胞分裂时，由 1 个分裂成 2 个，2 个分裂成 4 个，…，按此规律一直分裂下去.**

(1) 列表表示 1 个细胞分裂 1、2、3、4、5、6、7、8 次后，得到的细胞个数；

(2) 写出得到的细胞个数 y 与 1 个细胞分裂次数 n 之间的关系式，试用计算器计算细胞分裂 15 次、20 次得到的细胞个数.

强化闯关

1. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的奇函数,且 $f(1)=1$,若 $m,n\in[-1,1]$,$m+n\neq 0$ 时有 $\frac{f(m)+f(n)}{m+n}>0$.

(1) 用定义证明 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数;

(2) 解不等式 $f(x+\frac{1}{2})<f(\frac{1}{x-1})$;

(3) 若 $f(x)\leqslant t^2-2at+1$ 对所有 $x\in[-1,1]$,$a\in[-1,1]$ 恒成立,求实数 t 的取值范围.

2. 设关于 x 的方程 $2x^2-ax-2=0$ 的两根为 α、$\beta(\alpha<\beta)$,函数 $f(x)=\frac{4x-a}{x^2+1}$.

(1) 求 $f(\alpha)\cdot f(\beta)$ 的值;

(2) 证明 $f(x)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的增函数;

(3) 当 a 为何值时,$f(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的最大值与最小值之差最小?

3. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足:$S_n=2a_n-3n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 中是否存在三项,它们可以构成等差数列?若存在,请求出一组适合条件的项;若不存在,请说明理由.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=na^n+a(a>0)$,数列 $\{a_n\}$ 中是否存在最大的项?若存在,指出是第几项最大;若不存在,请说明理由.

5. 一列火车自 A 城驶往 B 城,沿途有 n 个车站(包括起点站 A 和终点站 B),车上有一节邮政车厢,每停靠一站便要卸下前面各站发往该站的邮袋各一个,同时又要装上该站发往后面各站的邮袋各一个,试求:

(1) 列车从第 k 站出发时,邮政车厢内共有邮袋数多少个;

(2) 第几站的邮袋数最多,最多是多少?

参考答案

【拓展】

1. (1) 由 $f(1)=0$,得 $\frac{2}{a+b}=1$,即 $a+b=2$.

又 $f(x)-f(\frac{1}{x})=\lg x$ 恒成立,$\therefore (a-b)(x^2-x)=0$ 恒成立,$\therefore a=b$.

故 $a=b=1$,$f(x)=\lg\frac{2x}{x+1}$.

(2) 由方程 $f(x)=\lg(m+x)$,得 $\begin{cases}\frac{2x}{x+1}=m+x,\\ \frac{2x}{x+1}>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x^2+(m-1)x+m=0, & ①\\ x<-1\text{ 或 }x>0, & ②\end{cases}$

依题意方程 $f(x)=\lg(m+x)$ 无实数解,

$\therefore$ 方程①无实数解,或方程①有实数解但不满足不等式②,

难点透视

$$\therefore \Delta=(m-1)^2-4m<0 \text{ 或 } \begin{cases}\Delta=(m-1)^2-4m\geqslant 0,\\(-1)^2+(m-1)(-1)+m\geqslant 0,\\0^2+(m-1)\times 0+m\geqslant 0,\\-1\leqslant -\dfrac{m-1}{2}\leqslant 0,\end{cases}$$

即 $3-2\sqrt{2}<m<3+2\sqrt{2}$ 或无解.

综上所述，实数 m 的取值范围是 $(3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2})$.

2. (1) 由已知 $a_{n+1}=2\left(\frac{n+1}{n}\right)^2a_n$，即 $\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}=2\cdot\frac{a_n}{n^2}$，$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$ 是公比为 2 的等比数列. 又 $\frac{a_1}{1^2}=2$，$\therefore \frac{a_n}{n^2}=2^n$，$\therefore a_n=2^n\cdot n^2$.

(2) $\because b_{n+1}-b_n=[An^2+(4A+B)n+2A+2B+C]\cdot 2^n$，

若 $a_n=b_{n+1}-b_n$ 恒成立，则 $n^2=An^2+(4A+B)n+2A+2B+C$ 恒成立.

$$\therefore \begin{cases}A=1,\\4A+B=0,\\2A+2B+C=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1,\\B=-4,\\C=6.\end{cases}$$ 故存在常数 A、B、C 满足条件.

(3) $a_1+a_2+\cdots+a_n=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_{n+1}-b_n)=b_{n+1}-b_1$

$=[(n+1)^2-4(n+1)+6]\cdot 2^{n+1}-6$

$=(n^2-2n+3)\cdot 2^{n+1}-6$

$=[(n-1)^2+2]\cdot 2^{n+1}-6\geqslant 2^{n+2}-6$.

3. (1) 由题意得，$f_n(1)=n^2$，则有 $a+a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2$，

即 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2-a$，

令 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则 $S_n=n^2-a(n\geqslant 1)$.

$\because a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-a-[(n-1)^2-a]=2n-1(n\geqslant 2)$，且 $\{a_n\}$ 是等差数列，

$\therefore a_2=3$，$a_1=3-2=1$，又 $a+a_1=1$，$\therefore a=0$，

$\therefore a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) $\because f_n(x)=a_1x+\cdots+a_nx^n$，又 n 为奇数，$\therefore f_n(-x)=-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}-a_nx^n$，

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}[f_n(x)-f_n(-x)]=a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\cdots+a_{n-2}x^{n-2}+a_nx^n$，

$\therefore g\left(\frac{1}{2}\right)=1\times\frac{1}{2}+5\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots+(2n-5)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$，又 $\frac{1}{4}g\left(\frac{1}{2}\right)=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+5\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+9\times\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots+(2n-5)\left(\frac{1}{2}\right)^n+(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$，

两式相减得 $\frac{3}{4}g\left(\frac{1}{2}\right)=1\times\frac{1}{2}+4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-(2n-1)$

$(\frac{1}{2})^{n+2}$，$\therefore g(\frac{1}{2})=\frac{14}{9}-\frac{13}{9}(\frac{1}{2})^{n}-\frac{2}{3}n(\frac{1}{2})^{n}<\frac{14}{9}$.

令 $c_n=\frac{14}{9}-\frac{13}{9}(\frac{1}{2})^{n}-\frac{2}{3}n(\frac{1}{2})^{n}$，则 $c_{n+1}-c_n=\frac{7}{9}(\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{2}{3}n(\frac{1}{2})^{n+1}>0$，即 $c_{n+1}>c_n$，$\therefore g(\frac{1}{2})$ 是关于自然数 n 的单调递增函数，

故当 $n=1$ 时，$g(\frac{1}{2})$ 取得最小值 $\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{1}{2}\leqslant g(\frac{1}{2})<\frac{14}{9}$，要使 $m<g(\frac{1}{2})<M$ 恒成立的自然数 m 的最大值为 0，M 的最小值为 2.

4. (1) 利用正整数指数幂的运算法则，可以算出 1 个细胞分裂 1、2、3、4、5、6、7、8 次后，得到的细胞个数，列表如下：

分裂次数	1	2	3	4	5	6	7	8
细胞个数	2	4	8	16	32	64	128	256

(2) 细胞个数 y 与分裂次数 n 之间的关系式是 $y=2^n$.
利用计算器可以算得 $2^{15}=32\ 768$，$2^{20}=1\ 048\ 576$.
故细胞分裂 15 次、20 次得到的细胞个数分别是 32 768 个和 1 048 576 个.

【强化闯关】

1. (1) 任取 $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$，则 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)=\frac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1-x_2}\cdot(x_1-x_2)$.

$\because -1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$，$\therefore x_1+(-x_2)\neq 0$. 由已知 $\frac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1-x_2}>0$，又 $x_1-x_2<0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数.

(2) $\because f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，故有 $\begin{cases}-1\leqslant x+\frac{1}{2},\\ x+\frac{1}{2}<\frac{1}{x-1},\\ \frac{1}{x-1}\leqslant 1,\end{cases}$ 解得 $\{x\mid -\frac{3}{2}\leqslant x<-1\}$.

(3) 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，且 $f(1)=1$，故对 $x\in[-1,1]$，恒有 $f(x)\leqslant 1$. 所以要使 $f(x)\leqslant t^2-2at+1$ 对所有 $x\in[-1,1]$，$a\in[-1,1]$ 恒成立，
即要 $t^2-2at+1\geqslant 1$ 恒成立，故 $t^2-2at\geqslant 0$ 恒成立.
记 $g(a)=t^2-2at$，对 $a\in[-1,1]$，$g(a)\geqslant 0$ 恒成立，只需 $g(a)$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值不小于零，故 $\begin{cases}t>0,\\ g(1)\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t\leqslant 0,\\ g(-1)\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $t\leqslant -2$ 或 $t\geqslant 2$ 或 $t=0$.

2. (1) 由题意知 $\alpha+\beta=\frac{a}{2}$, $\alpha\cdot\beta=-1$, $\therefore \alpha^2+\beta^2=\frac{a^2}{4}+2$,

$\therefore f(\alpha)\cdot f(\beta)=\frac{4\alpha-a}{\alpha^2+1}\cdot\frac{4\beta-a}{\beta^2+1}=\frac{16\alpha\beta-4a(\alpha+\beta)+a^2}{\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1}$

$=\frac{-16-2a^2+a^2}{1+\frac{a^2}{4}+2+1}=-4.$

(2) 当 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 时 $f'(x)=\frac{(4x-a)'(x^2+1)-(4x-a)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{4(x^2+1)-(4x-a)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(2x^2-ax-2)}{(x^2+1)^2}$,

$\because \alpha$、β 是方程 $2x^2-ax-2=0$ 的两根,

$\therefore$ 当 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 时,恒有 $2x^2-ax-2\leqslant 0$,

$\therefore f'(x)\geqslant 0$,又 $f(x)$ 不是常函数,

$\therefore f(x)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的增函数.

(3) $f(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的最大值 $f(\beta)>0$,最小值 $f(\alpha)<0$,

又 $\because |f(\alpha)\cdot f(\beta)|=4$,

$\therefore f(\beta)-f(\alpha)=|f(\beta)|+|f(\alpha)|\geqslant 2\sqrt{|f(\alpha)|\cdot|f(\beta)|}=4$,

当且仅当 $|f(\beta)|=|f(\alpha)|=2$ 时取"="号,此时 $f(\beta)=2$, $f(\alpha)=-2$,

$$\therefore \begin{cases}\frac{4\beta-a}{\beta^2+1}=2, & ①\\ 2\beta^2-a\beta-2=0, & ②\end{cases}$$

由①②得 $a=0$,

$\therefore a=0$ 为所求.

3. (1) 当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时有 $S_n=2a_n-3n$, $\therefore S_{n+1}=2a_{n+1}-3(n+1)$,

两式相减得 $a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n-3$, $\therefore a_{n+1}=2a_n+3$,

$\therefore a_{n+1}+3=2(a_n+3)$.

又 $a_1=S_1=2a_1-3$, $\therefore a_1=3$, $a_1+3=6\neq 0$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n+3\}$ 是首项为 6,公比为 2 的等比数列.

从而 $a_n+3=6\cdot 2^{n-1}$, $\therefore a_1=3\cdot 2^n-3$.

(2) 假设数列 $\{a_n\}$ 中存在三项 a_r, a_s, a_t, $(r<s<t)$,它们可以构成等差数列,

$\because a_r<a_s<a_t$, $\therefore$ 只能是 $a_r+a_t=2a_s$,

$\therefore (3\cdot 2^r-3)+(3\cdot 2^t-3)=2(3\cdot 2^s-3)$,

即 $2^r+2^t=2^{s+1}$,

$\therefore 1+2^{t-r}=2^{s+1-r}$, $(*)$

$\because r<s<t$, r、s、t 均为正整数,

$\therefore (*)$ 式左边为奇数右边为偶数,不可能成立.

因此数列 $\{a_n\}$ 中不存在可以构成等差数列的三项.

4. $a_n-a_{n+1}=na^n-(n+1)a^{n+1}=a^n[n(1-a)-a]$.

(1)当 $a\geqslant1$ 时,易见 $a_n-a_{n+1}<0$,即 $a_1<a_2<a_3<a_4<\cdots$,

所以数列 $\{a_n\}$ 中不存在最大项.

(2)当 $0<a<1$ 时,易见 $a_n-a_{n+1}=(1-a)a^n(n-\frac{a}{1-a})$.

(ⅰ)当 $0<\frac{a}{1-a}<1$,即 $0<a<\frac{1}{2}$时,易见 $a_n-a_{n+1}>0$,即 $a_1>a_2>a_3>a_4>\cdots$,

所以数列 $\{a_n\}$ 中的第1项最大.

(ⅱ)当$\frac{a}{1-a}=1$,即 $a=\frac{1}{2}$时,$a_n-a_{n+1}\geqslant0$(仅在 $n=1$ 时,等式成立),即 $a_1=a_2>a_3>a_4\cdots$,

所以数列 $\{a_n\}$ 中的第1项和第2项最大.

(ⅲ)当$\frac{a}{1-a}>1$,即 $a>\frac{1}{2}$时,若$\frac{a}{1-a}$为整数,记$\frac{a}{1-a}=N$,易见 $a_1<\cdots<a_N=a_{N+1}$,

又$\because a_{N+1}>a_{N+2}>a_{N+3}>\cdots$

所以数列 $\{a_n\}$ 中的第 N 项和第 $N+1$ 项最大.

若$\frac{a}{1-a}$不是整数,记 N 为不超过$\frac{a}{1-a}$的最大整数,易见 $a_1<\cdots<a_N<a_{N+1}$,又$\because$ $a_{N+1}>a_{N+2}>a_{N+3}\cdots$,所以数列 $\{a_n\}$ 中的第 $N+1$ 项最大.

5. 设列车从各站出发时邮政车厢内的邮袋数构成一个数列 $\{a_n\}$.

(1)由题意得

$a_1=n-1$,$a_2=(n-1)+(n-2)-1$,$a_3=(n-1)+(n-2)+(n-3)-1-2$.

在第 k 站出发时,前面放上的邮袋共:$(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-k)$个,

而从第二站起,每站放下的邮袋共:$1+2+3+\cdots+(k-1)$个,

故 $a_k=(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-k)-[1+2+\cdots+(k-1)]$

$$=kn-\frac{1}{2}k(k+1)-\frac{1}{2}k(k-1)=kn-k^2(k=1,2,\cdots,n).$$

即列车从第 k 站出发时,邮政车厢内共有邮袋数 $kn-k^2(k=1,2,\cdots,n)$个.

(2)$a_k=-(k-\frac{n}{2})^2+\frac{1}{4}n^2$,当 n 为偶数时,$k=\frac{1}{2}n$ 时,最大值为$\frac{1}{4}n^2$;

当 n 为奇数时,$k=\frac{1}{2}(n-1)$或 $k=\frac{1}{2}(n+1)$时,最大值为$\frac{1}{4}(n^2-1)$.

所以,当 n 为偶数时,第$\frac{n}{2}$站的邮袋数最多,最多是$\frac{1}{4}n^2$ 个;

当 n 为奇数时,第$\frac{n-1}{2}$站或第$\frac{n+1}{2}$站的邮袋数最多,最多是$\frac{1}{4}(n^2-1)$个.

热点聚焦

热点1　代数推理

热点诠释　代数推理问题综合了函数、方程、不等式等多个知识点，需要采用多种数学思想方法才能解决问题，如函数方程思想、化归思想、分类讨论思想、逻辑推理思想等，是对思维品质及论述水平的全面性考查，能弥补选择题、填空题、简答题的不足，是提高区分度，增加选拔功能的重要题型.在适当地降低了对立体几何逻辑推理能力考查的力度后，代数推理问题自然而然地承担了考查考生逻辑推理能力的重任，并且作为压轴题出现在高考试卷中，因而代数推理问题也就成为现在的高考热点问题.

解答代数推理题有一定的规律可循，其一般思维过程分为三步：

首先要领会题意——弄清题目的条件是什么？结论是什么？如果条件和结论是用文字表达的，把它翻译成数学语言；

其次要明确方向——在审题的基础上，运用数学思想方法，目的明确地对外来的和内在的信息进行提取、转化、加工和传输，从而明确解题的目标与方向；

最后要规范表述——采用适当的步骤，合乎逻辑地进行推理和运算，并正确的表述.除此之外，还要注重心理训练，尤其在解题的目标与条件之间跨度较大、较隐蔽时，必须多次尝试、探索，才能找到并实现解题目标.

典例调研　题型一　与集合有关的代数推理题

【调研1】　设a,b为常数，$M=\{f(x)\mid f(x)=a\cos x+b\sin x\}$；$F$：把平面上任意一点$(a,b)$映射为函数$a\cos x+b\sin x$.

(1) 证明：不存在两个不同点对应于同一个函数；

(2) 证明：当$f_0(x)\in M$时，$f_1(x)=f_0(x+t)\in M$，这里t为常数；

(3) 对于属于M的一个固定值$f_0(x)$，得$M_1=\{f_0(x+t),t\in\mathbf{R}\}$，在映射$F$的作用下，$M_1$作为象，求其原象，并说明它是什么图像.

分析　题设条件给出点(a,b)到函数$a\cos x+b\sin x$的一个映射.第(1)问可用反证法来证明.第(2)问运用三角恒等变形，把$f_0(x+t)$化为$a\cos x+b\sin x$的形式即可.第(3)问建立a,b与t的参数方程，消参后由普通方程说明对应的曲线.

解析　(1)假设有两个不同的点(a,b)，(c,d)对应同一函数，即$F(a,b)=a\cos x$

$+b\sin x$ 与 $F(c,d)=c\cos x+d\sin x$ 相同,即 $a\cos x+b\sin x=c\cos x+d\sin x$ 对一切实数 x 均成立.

特别令 $x=0$,得 $a=c$;令 $x=\frac{\pi}{2}$,得 $b=d$. 这与 (a,b),(c,d) 是两个不同点矛盾,假设不成立.

故不存在两个不同点对应同一个函数.

(2) 当 $f_0(x)\in M$ 时,可得常数 a_0,b_0,使

$f_0(x)=a_0\cos x+b_0\sin x$,$f_1(x)=f_0(x+t)$

$=a_0\cos(x+t)+b_0\sin(x+t)=(a_0\cos t+b_0\sin t)\cos x+(b_0\cos t-a_0\sin t)\sin x$,

由于 a_0,b_0,t 为常数,设 $a_0\cos t+b_0\sin t=m$,$b_0\cos t-a_0\sin t=n$,则 m,n 是常数.

从而 $f_1(x)=m\cos x+n\sin x\in M$.

(3) 设 $f_0(x)\in M$,由此得 $f_0(x+t)=m\cos x+n\sin x$,其中 $m=a_0\cos t+b_0\sin t$,$n=b_0\cos t-a_0\sin t$,在映射 F 之下,$f_0(x+t)$ 的原象是 (m,n),则 M_1 的原象是 $\{(m,n)\mid m=a_0\cos t+b_0\sin t,n=b_0\cos t-a_0\sin t,t\in\mathbf{R}\}$.

消去 t 得 $m^2+n^2=a_0^2+b_0^2$,即在映射 F 之下,M_1 的原象 $\{(m,n)\mid m^2+n^2=a_0^2+b_0^2\}$ 是以原点为圆心,$\sqrt{a_0^2+b_0^2}$ 为半径的圆.

【方法探究】 本题将集合、映射、三角函数、解析几何综合为一体,其典型性和新颖性兼顾,是一道用"活题考死知识"的好题目,具有很高的训练价值. 其推理过程始终围绕题设的映射关系进行,而点集合到函数集合的映射定义也正是本题推理的基础与重点. 从推理方法的运用看,本题的思维难度不大,一般对于结论中出现"不存在"(再如"至少有一个""都…")等字词的证明问题往往都可以用反证法进行证明. 而对于证明元素属于某一集合的问题,自然应该从定义出发,"回到定义"是推理过程最常用的解题策略.

拓展 1 已知集合 M_B 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体:对于定义域 B 中的任何两个自变量 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$ 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$.

(1) 当 $B=\mathbf{R}$ 时,$f(x)=\sqrt{x^2+1}$ 是否属于 M_B,为什么;

(2) 当 $B=(0,+\infty)$ 时,求证 $f(x)=\frac{1}{x}$ 不属于 M_B,举例说明存在一个 $D\subsetneqq(0,+\infty)$ 使 $f(x)=\frac{1}{x}$ 属于 M_D;

(3) 当 $B=\mathbf{R}$ 时,若 $g(x)=\sqrt{m^2x^2+1}$ 属于 M_B,求实数 m 的取值范围.

题型二 与函数有关的代数推理题

【调研 2】 已知实数 a,b,c 满足条件:$\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$,其中 m 为正数,对于 $f(x)=ax^2+bx+c$.

(1) 如果 $a\neq0$,证明 $a\cdot f(\frac{m}{m+1})<0$;

(2) 如果 $a=0$,试判别方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内是否有解？并说明理由；

(3) 如果 $a\neq0$,方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内必有解,试证明之.

分析　第(1)问利用条件将 $a\cdot f(\frac{m}{m+1})$ 进行代数式变形,化为几个因式积的形式. 第(2)问为一次方程,可求出其解,再进行判断. 第(3)问设法确定区间端点的函数值异号即可.

解析　(1) $\because a\cdot f(\frac{m}{m+1})=a\cdot[a\cdot(\frac{m}{m+1})^2+b\cdot(\frac{m}{m+1})+c]=am[\frac{am}{(m+1)^2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}]$,

又 $\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$,

$\therefore a\cdot f(\frac{m}{m+1})=am[\frac{am}{(m+1)^2}-\frac{a}{m+2}]=-\frac{a^2m}{(m+1)^2(m+2)}<0$,

故 $a\cdot f(\frac{m}{m+1})<0$.

(2) 当 $a=0$ 时,$f(x)=bx+c$,已知条件变为 $\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$,

若 $b=0$,则 $c=0$,此时 $f(x)=0$,在区间 $(0,1)$ 内 $f(x)$ 有无数个解；

若 $b\neq0$,则 $bx+c=0$ 的解为 $x=-\frac{c}{b}$,由 $\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$,得 $-\frac{c}{b}=\frac{m}{m+1}$,$\therefore x=\frac{m}{m+1}\in(0,1)$,

因此 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内恒有解.

(3) 由于 $f(0)=c$,$f(1)=a+b+c$,

①当 $a>0$ 时,$\because a\cdot f(\frac{m}{m+1})<0$,$\therefore f(\frac{m}{m+1})<0$.

若 $c>0$,$f(0)=c>0$,$\therefore$ 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,\frac{m}{m+1})$ 内有解,

若 $c\leqslant0$,$f(1)=a+b+c=a+(m+1)(-\frac{c}{m}-\frac{a}{m+2})+c=\frac{a}{m+2}-\frac{c}{m}>0$,

$\therefore$ 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(\frac{m}{m+1},1)$ 内有解.

②当 $a<0$ 时,同理可证.

故 $a\neq0$ 时,方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有解.

【技巧点拨】　证明一个代数式的正负,其推理过程与不等式证明中的"比较法"特别相似,可以把代数式通过代数恒等变形,化为几个因式乘积的形式,或者几个非负数的和的形式等.

数学金典　(接上)至少要在用新的更好的方法解完题之后,回过来重新分析一下前面的思路。

讨论一个方程根的存在性，常通过确定区间端点的函数值正负来进行，这种推理手段有一些高等数学的背景（闭区间连续函数的性质——零点定理）. 本题第(3)问对区间(0,1)进行“分割”，充分利用层次设问中已经解决的结论，体现了代数推理过程环环相扣，逐渐逼近的解题策略.

（零点定理 设$f(x)\in[a,b]$，$f(a)f(b)<0$，则必存在$\varepsilon\in(a,b)$，使得$f(\varepsilon)=0$.）

拓展2 对于函数$f(x)=ax^2+bx+1(a>0)$，若方程$f(x)=x$有两相异实根x_1、x_2.

(1)若$x_1<1<x_2$，且$f(x)$的图像关于直线$x=m$对称，求证：$m>\frac{1}{2}$；

(2)若$0<x_1<2$，且$|x_1-x_2|<2$，求实数b的取值范围.

题型三 与数列有关的代数推理题

【调研3】 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$，$a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$. 我们知道当a取不同的值时，得到不同的数列. 如当$a=1$时，得到无穷数列：$1,2,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\cdots$；当$a=-\frac{1}{2}$时，得到有穷数列：$-\frac{1}{2},-1,0$.

(1)求当a为何值时，$a_4=0$；

(2)设数列$\{b_n\}$满足$b_1=-1$，$b_{n+1}=\frac{1}{b_n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，求证$a$取数列$\{b_n\}$中的任一个数，都可以得到一个有穷数列$\{a_n\}$；

(3)若$\frac{3}{2}<a_n<2(n\geqslant4)$，求$a$的取值范围.

解析 (1)解法一 $\because a_1=a,a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$，

$\therefore a_2=1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a}$，$a_3=1+\frac{1}{a_2}=\frac{2a+1}{a+1}$，$a_4=1+\frac{1}{a_3}=\frac{3a+2}{2a+1}$.

故当$a=-\frac{2}{3}$时，$a_4=0$.

解法二 $\because a_4=0$，$\therefore 1+\frac{1}{a_3}=0$，$\therefore a_3=-1$，$\because a_3=1+\frac{1}{a_2}$，$\therefore a_2=-\frac{1}{2}$.

$\because a_2=1+\frac{1}{a}$，$\therefore a=-\frac{2}{3}$. 故当$a=-\frac{2}{3}$时，$a_4=0$.

(2) $\because b_1=-1$，$b_{n+1}=\frac{1}{b_n-1}$，$\therefore b_n=\frac{1}{b_{n+1}}+1$.

a取数列$\{b_n\}$中的任一个数，不妨设$a=b_n$.

$\because a=b_n$，$\therefore a_2=1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{b_n}=b_{n-1}$，$\therefore a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{b_{n-1}}=b_{n-2}$，$\cdots$，$\therefore a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}=1+\frac{1}{b_2}=b_1=-1$，$\therefore a_{n+1}=0$.

故 a 取数列 $\{b_n\}$ 中的任一个数都可以得到一个有穷数列 $\{a_n\}$.

(3) 要使 $\frac{3}{2}<a_n<2$，即 $\frac{3}{2}<1+\frac{1}{a_{n-1}}<2$，$\therefore 1<a_{n-1}<2$. 要使 $\frac{3}{2}<a_n<2$，当且仅当它的前一项 a_{n-1} 满足 $1<a_{n-1}<2$.

$\because (\frac{3}{2},2)\subsetneqq(1,2)$，$\therefore$ 只需当 $a_4\in(\frac{3}{2},2)$ 时，都有 $a_n\in(\frac{3}{2},2)(n\geqslant5)$.

由 $a_4=\frac{3a+2}{2a+1}$，得 $\frac{3}{2}<\frac{3a+2}{2a+1}<2$.

解不等式组 $\begin{cases}\frac{3}{2}<\frac{3a+2}{2a+1},\\ \frac{3a+2}{2a+1}<2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a>-\frac{1}{2},\\ a>0 \text{ 或 } a<-\frac{1}{2},\end{cases}$ 即 $a>0$.

故 $a>0$.

【方法探究】 数列的代数推理问题往往作为压轴题出现在高考试卷中. 解答这类代数推理题，既要注意逻辑推理思维能力的一般方法（如综合法、分析法、反证法等）的灵活运用；更要注意特殊与一般的思想方法和数学归纳法等思想方法的灵活运用；还要注意解决数列问题特殊方法（如迭代、迭加、迭乘、错位相减、拆项相消等）的灵活运用.

拓展 3　对于函数 $f(x)$，若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使 $f(x_0)=x_0$ 成立，则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点. 如果函数 $f(x)=\frac{x^2+a}{bx-c}(b,c\in\mathbf{N}^*)$ 有且只有两个不动点 0，2，且 $f(-2)<-\frac{1}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 已知各项不为零的数列 $\{a_n\}$ 满足 $4S_n\cdot f(\frac{1}{a_n})=1$，求数列通项 a_n；

(3) 如果数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=4$，$a_{n+1}=f(a_n)$，求证：当 $n\geqslant2$ 时，恒有 $a_n<3$ 成立.

强化闯关

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有定义，$f(\frac{1}{2})=-1$ 且满足 x、$y\in(-1,1)$ 有 $f(x)+f(y)=f(\frac{x+y}{1+xy})$.

(1) 证明：$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为奇函数；

(2) 对数列 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=\frac{2x_n}{1+x_n^2}$，求 $f(x_n)$；

(3) 求证 $\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+\cdots+\frac{1}{f(x_n)}>-\frac{2n+5}{n+2}$.

2. 设函数 $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{a}{2}x^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R})$，函数 $f(x)$ 的导数记为 $f'(x)$.

(1) 若 $a=f'(2)$，$b=f'(1)$，$c=f'(0)$，求 a,b,c 值；

(2)若 $a=f'(2)$,$b=f'(1)$,$c=f'(0)$,且 $F(n)=\frac{1}{f'(n)+2}$. 求证:

$F(1)+F(2)+F(3)+\cdots+F(n)<\frac{11}{18}(n\in\mathbf{N}^*)$;

(3)设关于 x 的方程 $f'(x)=0$ 的两个实数根为 α、β,且 $1<\alpha<\beta<2$. 试问 是否存在正整数 n_0,使得 $|f'(n_0)|\leqslant\frac{1}{4}$?说明理由.

参考答案

【拓展】

1. (1)$f(x)=\sqrt{x^2+1}$ 属于 M_B. 任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}(x_1\neq x_2)$,

$\because\ |f(x_1)-f(x_2)|=|\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}|=\frac{|x_1^2-x_2^2|}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}$

$\leqslant\frac{(|x_1|+|x_2|)|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<\frac{(|x_1|+|x_2|)|x_1-x_2|}{|x_1|+|x_2|}=|x_1-x_2|$.

$\therefore$ 当 $B=\mathbf{R}$ 时,$f(x)=\sqrt{x^2+1}$ 属于 M_B.

(2)当 $B=(0,+\infty)$ 时,设 $x_1,x_2\in B(x_1\neq x_2)$,则 $|f(x_1)-f(x_2)|=|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}|=\frac{|x_1-x_2|}{x_1x_2}$. 若 $\frac{|x_1-x_2|}{x_1x_2}<|x_1-x_2|$,则只需有 $x_1x_2>1$.

事实上,令 $x_1=\frac{1}{n}$,$x_2=\frac{1}{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 时,$|x_1-x_2|=|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}|=\frac{1}{n(n+1)}<1$,

而 $|f(x_1)-f(x_2)|=|n-(n+1)|=1>|x_1-x_2|$,故 $f(x)=\frac{1}{x}$ 不属于 M_B.

例如 $D=[1,+\infty)$ 时,任取 $x_1,x_2\in D$ 时,都有 $x_1x_2>1$,

此时 $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$,$f(x)=\frac{1}{x}$ 属于 M_D.

(3)①当 $m=0$ 时,$g(x)=1$,$\because\ |g(x_1)-g(x_2)|=0<|x_1-x_2|$,
设 $x_1,x_2\in\mathbf{R}(x_1\neq x_2)$,$\therefore\ g(x)\in M_B$,$\therefore\ m=0$ 时符合题意;

②当 $m\neq0$ 时,$|g(x_1)-g(x_2)|=|\sqrt{m^2x_1^2+1}-\sqrt{m^2x_2^2+1}|$

$=\frac{|m^2(x_1^2-x_2^2)|}{\sqrt{m^2x_1^2+1}+\sqrt{m^2x_2^2+1}}=\frac{|m||x_1-x_2||x_1+x_2|}{\sqrt{x_1^2+\frac{1}{m^2}}+\sqrt{x_2^2+\frac{1}{m^2}}}$,

$\because\ g(x)\in M_B$,$\therefore\ \frac{|m||x_1-x_2||x_1+x_2|}{\sqrt{x_1^2+\frac{1}{m^2}}+\sqrt{x_2^2+\frac{1}{m^2}}}<|x_1-x_2|$,

$\therefore\ |m|<\frac{\sqrt{x_1^2+\frac{1}{m^2}}+\sqrt{x_2^2+\frac{1}{m^2}}}{|x_1+x_2|}(x_1+x_2\neq0$ 时).

热点聚焦

$\because \dfrac{\sqrt{x_1^2+\dfrac{1}{m^2}}+\sqrt{x_2^2+\dfrac{1}{m^2}}}{|x_1+x_2|} \geqslant \dfrac{\sqrt{x_1^2+\dfrac{1}{m^2}}+\sqrt{x_2^2+\dfrac{1}{m^2}}}{|x_1|+|x_2|} > \dfrac{\sqrt{x_1^2}+\sqrt{x_2^2}}{|x_1|+|x_2|}=1$,

又当 $x_1+x_2=0$ 时,$|g(x_1)-g(x_2)|=0<|x_1-x_2|$符合 $g(x)\in M_B$,

$\therefore 0<|m|\leqslant 1$ 时,$g(x)\in M_B$.

由①②得 m 的取值范围是 $-1\leqslant m\leqslant 1$.

2. (1)$f(x)=x$,即 $ax^2+(b-1)x+1=0$,令 $g(x)=ax^2+(b-1)x+1$,其中 $a>0$,

$\because x_1<1<x_2$,$\therefore g(1)<0$,即 $a+b-1+1<0$,$a+b<0$,

$\therefore a<-b$,$-\dfrac{b}{a}>1$,$m=-\dfrac{b}{2a}>\dfrac{1}{2}$,$\therefore m>\dfrac{1}{2}$.

(2)由题意得 $f(x)=x$,即 $g(x)=ax^2+(b-1)x+1=0$,

由韦达定理得$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b-1}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{1}{a}>0, \end{cases}$

$\because 0<x_1<2$,$\therefore x_2>0$ 且 $x_1+x_2=\dfrac{1-b}{a}>0$,$\therefore 1-b>0$.

① 当 $x_1>x_2$ 时,由于 $x_2>0$ 且 $x_2<x_1<2$,$\therefore 0<x_2<x_1<2$,

$\therefore \begin{cases} \Delta=(b-1)^2-4a>0\Rightarrow (b-1)^2>4a, (1) \\ 0<\dfrac{1-b}{2a}<2\Rightarrow 0<1-b<4a, (2) \\ g(2)=4a+2b-1>0\Rightarrow 4a>1-2b, (3) \\ g(0)=1>0, \end{cases}$

由(1)和(2),得$(b-1)^2>1-b>0$,由(1)和(3),得$(b-1)^2>1-2b$.

所以 $1-b>1$ 且 $b^2-2b+1>1-2b$,$\therefore b<0$ 且 $b^2>0$,$\therefore b<0$.

② 当 $x_2>x_1$ 时,$x_2-x_1<2$,$\therefore 0<x_1<x_2<2+x_1<4$,$\therefore 0<x_2<4$.(继续分类讨论),

若 $0<x_1<x_2<2$,则同①已证:

若 $0<x_1<2\leqslant x_2<4$,则小根在$(0,2)$中,大根在$[2,4)$中,令 $g(x)=ax^2+(b-1)x+1$,

由根的分布得$\begin{cases} g(2)=4a+2b-1\leqslant 0, (1) \\ g(4)=16a+4b-3>0, (2) \\ g(0)=1>0, (3) \end{cases}$

由(1)得 $-16a-8b+4\geqslant 0$,(4)

(4)+(2)得 $-4b+1>0$,即 $b<\dfrac{1}{4}$.

综合①和②可知,所求的实数 b 的取值范围为 $b<\dfrac{1}{4}$.

3. (1)依题意有$\dfrac{x^2+a}{bx-c}=x$,化简为$(1-b)x^2+cx+a=0$,由韦达定理,得

$\begin{cases}2+0=-\dfrac{c}{1-b},\\ 2\times 0=\dfrac{a}{1-b},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\ b=1+\dfrac{c}{2},\end{cases}$

代入表达式 $f(x)=\dfrac{x^2}{(1+\frac{c}{2})x-c}$，由 $f(-2)=\dfrac{-2}{1+c}<-\dfrac{1}{2}$，得 $c<3$，

又 $c\in\mathbf{N}^*$，$b\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore c=2$，$b=2$，故 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$，$(x\neq 1)$.

(2) 由题设得 $4S_n\cdot\dfrac{(\frac{1}{a_n})^2}{2(\frac{1}{a_n}-1)}=1$ 得 $2S_n=a_n-a_n^2$（$*$）且 $a_n\neq 1$，以 $n-1$ 代 n 得

$2S_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-1}^2$（$**$），

由（$*$）与（$**$）两式相减得 $2a_n=(a_n-a_{n-1})-(a_n^2-a_{n-1}^2)$，

即 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}+1)=0$，

$\therefore a_n=-a_{n-1}$ 或 $a_n-a_{n-1}=-1$，以 $n=1$ 代入（$*$）得 $2a_1=a_1-a_1^2$，

解得 $a_1=0$（舍去）或 $a_1=-1$，

由 $a_1=-1$，若 $a_n=-a_{n-1}$ 得 $a_2=1$，这与 $a_n\neq 1$ 矛盾，

$\therefore a_n-a_{n-1}=-1$，即 $\{a_n\}$ 是以 -1 为首项，-1 为公差的等差数列，$\therefore a_n=-n$.

(3) 采用反证法，假设 $a_n\geqslant 3(n\geqslant 2)$，则由 (1) 知 $a_{n+1}=f(a_n)=\dfrac{a_n^2}{2a_n-2}$，

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_n}{2(a_n-1)}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(1+\dfrac{1}{a_n-1}\right)\leqslant\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}<1$，

即 $a_{n+1}<a_n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N})$，有 $a_n<a_{n-1}<\cdots<a_2$，

而当 $n=2$ 时，$a_2=\dfrac{a_1^2}{2a_1-2}=\dfrac{16}{8-2}=\dfrac{8}{3}<3$；

即 $a_n<3$，这与假设矛盾，故假设不成立，$\therefore a_n<3$.

【强化闯关】

1. (1) 令 $x=y=0$，则 $2f(0)=f(0)$，$\therefore f(0)=0$，

令 $y=-x$，则 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$，$\therefore f(-x)=-f(x)$，$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为奇函数.

(2) $f(x_1)=f(\dfrac{1}{2})=-1$，

$f(x_{n+1})=f\left(\dfrac{2x_n}{1+x_n^2}\right)=f\left(\dfrac{x_n+x_n}{1+x_n\cdot x_n}\right)=f(x_n)+f(x_n)=2f(x_n)$，

$\therefore \dfrac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}=2$.

热点聚焦

历史使人聪明，诗歌使人机智，数学使人精细。

——培根

名家风采

即 $\{f(x_n)\}$ 是以 -1 为首项,2 为公比的等比数列,$\therefore f(x_n)=-2^{n-1}$.

(3)$\dfrac{1}{f(x_1)}+\dfrac{1}{f(x_2)}+\cdots+\dfrac{1}{f(x_n)}=-(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}})$

$$=-\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=-(2-\frac{1}{2^{n-1}})=-2+\frac{1}{2^{n-1}}>-2,$$

而 $-\dfrac{2n+5}{n+2}=-(2+\dfrac{1}{n+2})=-2-\dfrac{1}{n+2}<-2$,

$\therefore \dfrac{1}{f(x_1)}+\dfrac{1}{f(x_2)}+\cdots+\dfrac{1}{f(x_n)}>-\dfrac{2n+5}{n+2}$.

2. (1)$f'(x)=x^2+ax+b$.

$\because a=f'(2)=4+2a+b, b=f'(1)=1+a+b, c=f'(0)=b$,

$\therefore a=-1, b=c=-3$.

(2)由(1)知 $f'(n)=n^2-n-3$,$F(n)=\dfrac{1}{f'(n)+2}=\dfrac{1}{n^2-n-1}$,

当 $n=1$ 时,$F(1)=-1<\dfrac{11}{18}$;

当 $n=2$ 时,$F(1)+F(2)=-1+1=0<\dfrac{11}{18}$;

当 $n\geqslant3$ 时,$F(n)=\dfrac{1}{n^2-n-1}<\dfrac{1}{n^2-n-2}=\dfrac{1}{(n+1)(n-2)}=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n+1})$,

$F(1)+F(2)+F(3)+\cdots+F(n)<F(1)+F(2)+\dfrac{1}{3}[(1-\dfrac{1}{4})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6})+\cdots+(\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n+1})]=(-1)+1+\dfrac{1}{3}[1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}]<\dfrac{11}{18}$.

所以 $F(1)+F(2)+F(3)+\cdots+F(n)<\dfrac{11}{18}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(3)$f'(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$,

$f'(1)\cdot f'(2)=(1-\alpha)(1-\beta)(2-\alpha)(2-\beta)=(\alpha-1)(2-\alpha)(\beta-1)(2-\beta)$

$\leqslant[\dfrac{(\alpha-1)+(2-\alpha)}{2}]^2[\dfrac{(\beta-1)+(2-\beta)}{2}]^2=\dfrac{1}{16}$,

$\therefore 0<f'(1)\leqslant\dfrac{1}{4}$ 或 $0<f'(2)\leqslant\dfrac{1}{4}$,

所以存在 $n_0=1$ 或 2,使 $|f'(n_0)|\leqslant\dfrac{1}{4}$.

名家风采 数学是最宝贵的研究精神之一。

——华罗庚

热点2　导数的应用

热点诠释

导数是研究函数的单调性、极值、最值、值域以及函数图像的强有力工具. 作为高中数学的新增内容之一,高考对导数的考查不会仅仅停留在这些单一、传统的模式上. 同时,作为与高等数学联系的纽带,运用导数知识研究函数的图像、方程根的分布、不等式的证明等问题,也必将成为新教材高考试题的热点和命题的新增长点.

导数的应用大致可以分为两类:

一类是必须用导数去解决的问题,但导数的" 痕迹 "往往藏匿较深,需要主动挖掘导数的" 痕迹 ",然后再运用导数知识去解决;

一类是可不用导数知识解决,但因受定势思维的影响,往往用老套、繁琐的办法去解决,而用导数知识去解决却显得轻松流畅.

但无论是哪一种类型的问题,运用导数知识去解决,往往都是围绕它的几何意义以及函数的单调性、极值、最值等来展开的.

典例调研

题型一　导数与函数的单调性

【调研 1】　已知 $a>0$,函数 $f(x)=x^3-ax$ 在 $[1,+\infty)$ 上是单调增函数,则 a 的取值范围是

A. $(3,+\infty)$　　　　B. $[3,+\infty)$

C. $(-\infty,3)$　　　　D. $(-\infty,3]$

解析　$f'(x)=3x^2-a$,$\because f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是单调增函数,$\therefore f'(x)\geqslant 0$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上恒成立,即 $3x^2-a\geqslant 0$,$x\in[1,+\infty)$ 恒成立,故实数 a 小于或等于 $3x^2$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最小值,即 $a\leqslant 3$,故选 D.

【知识链接】　用导数的方法研究函数的单调性是非常简便的,它可以避免用定义确定单调性所带来的繁琐运算. 求函数单调区间的基本步骤是:

(1)确定函数 $f(x)$ 的定义域;

(2)求导数 $f'(x)$;

(3)由 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$),解出相应的 x 范围. 当 $f'(x)>0$ 时,$f(x)$ 在相应的区间上是增函数 当 $f'(x)<0$ 时,$f(x)$ 在相应区间上是减函数.

还可以通过列表,写出函数的单调区间.

【误点警示】　在区间内 $f'(x)>0$($f'(x)<0$)是函数 $f(x)$ 在此区间上为增(减)函数的充分条件而不是必要条件. 如果出现个别点使 $f'(x)=0$,不会影响函数 $f(x)$ 在包含该点的某个区间上的单调性. 一般地,可导函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是增(减)函数的充要条件是 对任意 $x(a,b)$,都有 $f'(x)\geqslant 0$($f'(x)\leqslant 0$),且 $f'(x)$ 在 (a,b) 的任何

热点聚焦

子区间内都不恒等于零. 特别是在已知函数的单调性求参数取值范围时，要特别注意“ = ”是否可以取到.

拓展 1　若函数 $f(x)=x^3+3ax^2+3(a+2)x+1$ 有三个单调区间，则实数 a 的取值范围是

A. $(-1,2)$　　　　B. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　　　　D. $(-2,1)$.

题型二　导数与函数的图像

【调研 2】　如图 4－2－1，在△AOB 中，点 $A(2,1)$，$B(3,0)$，点 E 在射线 OB 上自 O 开始移动. 设 $OE=x$，过 E 作 OB 的垂线 l，记△AOB 在直线 l 左边部分的面积为 S，则函数 $S=f(x)$ 的图像是

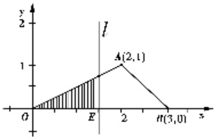
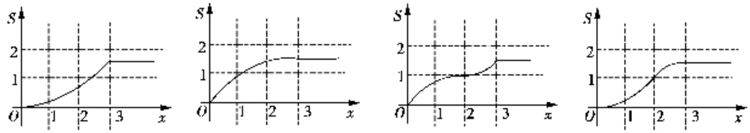


图 4－2－1



A.　　B.　　C.　　D.

分析　可以考虑先求出函数的解析式，再确定对应的图像，但其方法不是最佳方案. 根据导数的几何意义，结合图像中单位长度 Δx 内面积的变化量 ΔS 的变化快慢也可作出正确判断.

解析　$S'=f'(x)$ 表示曲线在点 $(x,f(x))$ 处的切线斜率. 当直线 l 从 $x=0$ 运动到 $x=2$ 时，单位变化量 Δx 内面积的变化量 ΔS 越来越大，即斜率越来越大，故在 $[0,2]$ 是函数图像“ 下凸 ”的. 而当直线 l 从 $x=2$ 运动到 $x=3$ 时，单位变化量 Δx 内面积的变化量 ΔS 越来起小，即斜率越来越小，故在 $[2,3]$ 是函数图像“ 上凸 ”的. 最后当直线 l 从 $x=3$ 继续向右运动时，单位变化量 Δx 内面积的变化量 ΔS 保持不变，即斜率为常数，故在 $[3,+\infty)$，函数的图像为与 x 轴平行的线. 根据上述图形特征，故选 D.

【误点警示】　函数的“ 凸 ”性是高等数学中的一个概念. 函数的凹凸特征，反映了函数值增长的变化速率，各点处切线斜率的变化快慢，即函数图像“ 下凸 ”时，图像上各点处的切线斜率越来越大（随着 x 的增大）；函数图像“ 上凸 ”时，图像上各点处的切线斜率越来越小（随着 x 的增大）. 切记不要混淆！实际上，只要在图像上作出切线，对切线的斜率或增大或减小就有一个非常形象直观的认识.

拓展 2　已知函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图像如图 4－2－2 所示，则关于函数 $y=f(x)$，下列说法正确的是

A. 在 $x=1$ 处取极大值

B. 在区间 $[-1,4]$ 上是增函数

C. 在 $x=4$ 处取极小值

D. 在区间 $[1,+\infty)$ 上是减函数

题型三 导数与函数的最值

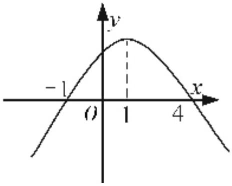


图 4-2-2

【调研 3】 设函数 $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x-3a(a>0)$.

(1) 如果 $a=1$，点 P 为曲线 $y=f(x)$ 上一个动点，求以 P 为切点的切线斜率取最小值时的切线方程；

(2) 若 $x\in[a,3a]$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解析 (1) 设切线斜率为 k，则 $k=f'(x)=x^2-2x-3$.

当 $x=1$ 时，k 有最小值 -4.

又 $f(1)=-\frac{29}{3}$，所以切线方程为 $y+\frac{29}{3}=-4(x-1)$，即 $12x+3y+17=0$.

(2) 由 $k=f'(x)=x^2-2x-3>0$，$k=f'(x)=x^2-2x-3<0$ 得

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$ 上是增函数，在 $(-1,3)$ 上是减函数.

若 $x\in[a,3a]$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则：

$\begin{cases}0<a<3a\leqslant 3,\\ f(3a)\geqslant 0,\end{cases}$ ①或 $\begin{cases}0<a<3<3a,\\ f(3)\geqslant 0,\end{cases}$ ② 或 $\begin{cases}a\geqslant 3,\\ f(a)\geqslant 0,\end{cases}$ ③

①，②无解，由③解得 $a\geqslant 6$，

综上所述，a 的取值范围 $[6,+\infty)$.

【发散类比】 恒成立问题有两种典型结构："$a\leqslant f(x)$ 恒成立""$a\geqslant f(x)$ 恒成立". 解决问题的基本方法是求函数 $f(x)$ 的最小值 m 或最大值 M，将问题转化为"$a\leqslant m$""$a\geqslant M$". 本题中"$f(x)\geqslant 0$ 恒成立"即"$f_{\min}(x)\geqslant 0$".

在二次函数区间上的最值问题中，我们一般通过对称轴与区间的位置关系进行讨论，而三次函数（或更高次的函数）在区间上的最值问题，我们就需要通过极值点与区间的位置关系进行讨论. 二者从形式讲，有很大的差异，但其实质却是相同的. 不论是对称轴与区间，还是极值点与区间，其目的都是要考虑该函数在指定区间的单调性，确定函数的最值. 只不过二次函数是通过对称轴分左右单调区间，而三次函数（或更高次的函数）是通过极大值、极小值点来区分单调区间的.

拓展 3 数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，S_n 为其前 n 项和，对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，总有 a_n，S_n，a_n^2 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 正数数列 $\{c_n\}$ 中，$a_{n+1}=(c_n)^{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，求数列 $\{c_n\}$ 中的最大项.

题型四 导数与方程

【调研 4】 已知函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\frac{1}{2}ax^2+bx$，$a\neq 0$.

(1) 若 $b=2$，且 $h(x)=f(x)-g(x)$ 存在单调递减区间，求 a 的取值范围；

(2) 设函数 $f(x)$ 的图像 C_1 与函数 $g(x)$ 图像 C_2 交于点 P、Q，过线段 PQ 的中点作 x 轴的垂线分别交 C_1，C_2 于点 M，N，证明 C_1 在点 M 处的切线与 C_2 在点 N 处的切

线不平行.

解析　(1) $b=2$ 时,$h(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2-2x$,则 $h'(x)=\frac{1}{x}-ax-2=-\frac{ax^2+2x-1}{x}$.

因为函数 $h(x)$ 存在单调递减区间,所以 $h'(x)<0$ 有解.

又因为 $x>0$ 时,则 $ax^2+2x-1>0$ 有 $x>0$ 的解.

①当 $a>0$ 时,$y=ax^2+2x-1$ 为开口向上的抛物线,$ax^2+2x-1>0$ 总有 $x>0$ 的解;

②当 $a<0$ 时,$y=ax^2+2x-1$ 为开口向下的抛物线,而 $ax^2+2x-1>0$ 总有 $x>0$ 的解 则 $\Delta=4+4a>0$,且方程 $ax^2+2x-1=0$ 至少有一正根. 此时,$-1<a<0$.

综上所述,a 的取值范围为 $(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

(2)证法一　设点 P、Q 的坐标分别是 (x_1,y_1),(x_2,y_2),$0<x_1<x_2$.

则点 M、N 的横坐标为 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$,C_1 在点 M 处的切线斜率为 $k_1=\frac{1}{x}\Big|_{x=\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{2}{x_1+x_2}$,$C_2$ 在点 N 处的切线斜率为 $k_2=ax+b\Big|_{x=\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{a(x_1+x_2)}{2}+b$.

假设 C_1 在点 M 处的切线与 C_2 在点 N 处的切线平行,则 $k_1=k_2$.

即 $\frac{2}{x_1+x_2}=\frac{a(x_1+x_2)}{2}+b$,则

$\frac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}=\frac{a}{2}(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)=(\frac{a}{2}x_2^2+bx_2)-(\frac{a}{2}x_1^2+bx_1)=y_2-y_1=\ln x_2-\ln x_1$.

所以 $\ln\frac{x_2}{x_1}=\frac{2(\frac{x_2}{x_1}-1)}{1+\frac{x_2}{x_1}}$. 设 $t=\frac{x_2}{x_1}$,则 $\ln t=\frac{2(t-1)}{1+t}$,$t>1$. ①

令 $r(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{1+t}$,$t>1$. 则 $r'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}$.

因为 $t>1$ 时,$r'(t)>0$,所以 $r(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增. 故 $r(t)>r(1)=0$.

则 $\ln t>\frac{2(t-1)}{1+t}$. 这与①矛盾,假设不成立.

故 C_1 在点 M 处的切线与 C_2 在点 N 处的切线不平行.

证法二　同证法一得 $(x_2+x_1)(\ln x_2-\ln x_1)=2(x_2-x_1)$.

因为 $x_1>0$,所以 $(\frac{x_2}{x_1}+1)\ln\frac{x_2}{x_1}=2(\frac{x_2}{x_1}-1)$.

令 $t=\frac{x_2}{x_1}$,得 $(t+1)\ln t=2(t-1)$,$t>1$. ②

令 $r(t)=(t+1)\ln t-2(t-1)$，$t>1$，则 $r'(t)=\ln t+\frac{1}{t}-1$.

因为 $(\ln t+\frac{1}{t})'=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{t-1}{t^2}$，所以 $t>1$ 时，$(\ln t+\frac{1}{t})'>0$.

故 $\ln t+\frac{1}{t}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增. 从而 $\ln t+\frac{1}{t}-1>0$，即 $r'(t)>0$.

于是 $r(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增.

故 $r(t)>r(1)=0$. 即 $(t+1)\ln t>2(t-1)$. 这与②矛盾，假设不成立.

故 C_1 在点 M 处的切线与 C_2 在点 N 处的切线不平行.

【前沿考向】利用导数求曲线的切线方程，几乎是新课程高考每年必考的内容. 既有可能出现在选择、填空题中，也有可能出现在解答题中. 在这类问题中，导数所担负的任务是求其切线的斜率，这类问题核心部分是考查函数的思想方法和解析几何的基本思想方法.

拓展 4　已知函数 $f(x)=ax^3-\frac{3}{2}(a+2)x^2+6x-3$.

(1) 当 $a>2$ 时，求函数 $f(x)$ 的极小值；

(2) 试讨论曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴的公共点的个数.

题型五　导数的实际应用题

【调研 5】　某银行准备新设一种定期存款业务. 经预测，存款量与利率的平方成正比，贷款的利率为 4.8%，又银行吸收的存款能全部放贷出去.

(1) 若存款的利率为 x，$x\in(0,0.048)$，试写出存款量 $g(x)$ 及银行应支付给储户的利息 $h(x)$；

(2) 试问存款利率定为多少时，银行可获得最大收益？

分析　弄清题意，建立目标函数，求最值. 银行的收益是贷款利息与支付储户利息的差值.

解析　(1) 设存款量与利率的平方所成正比的比例系数为 $k(k>0)$，则

$g(x)=kx^2(0<x<0.048)$，$h(x)=kx^3(0<x<0.048)$.

(2) 设银行收益为 $f(x)$，则

$f(x)=g(x)\cdot 4.8\%-h(x)=0.048kx^2-kx^3(0<x<0.048)$，

$f'(x)=0.096kx-3kx^2$，

由 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=0.032$，

当 $x\in(0,0.032)$ 时，$f'(x)>0$ 当 $x\in(0.032,0.048)$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,0.032]$ 内是增函数，在区间 $[0.032,0.048)$ 内是减函数，$f(x)$ 在 $x=0.032$ 时取得最大值.

所以当存款利率定为 3.2% 时，银行可获得最大收益.

数学是无穷的科学。

——外尔

【知识链接】 解有关函数最大值、最小值的实际问题，需要分析问题中各个变量之间的关系，建立适当的函数关系，并确定函数的定义域，所求得的结果要符合问题的实际意义.

根据《考试大纲》的规定，有关函数最大值、最小值的实际问题，一般指的是单峰函数. 也就是说在实际问题中，如果遇到函数在区间内只有一个极值点，那么不与端点比较，就可以知道这就是最大(小)值.

拓展5 已知某公司生产某品牌服装的年固定成本为10万元，每生产千件，需另投入2.7万元. 设该公司年内共生产该品牌服装 x 千件并全部销售完，每千件的销售收入为 $R(x)$ 万元，且

$$R(x)=\begin{cases}10.8-\dfrac{1}{30}x^2, & 0<x\leqslant 10,\\ \dfrac{108}{x}-\dfrac{1000}{3x^2}, & x>10.\end{cases}$$

(1)写出年利润 W(万元)关于年产量 x (千件)的函数解析式；

(2)年产量为多少千件时，该公司在这一品牌服装的生产中所获年利润最大？

(注:年利润＝年销售收入－年总成本)

强化闯关

1. 函数 $f(x)=x^3-3bx+3a$ 在区间 $(0,1)$ 内有极小值，则 b 的取值范围是

A. $b>0$　　B. $0<b<1$　　C. $b<1$　　D. $b<\frac{1}{2}$

2. 设函数 $f(x)=(1+x)^2-2\ln(1+x)$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若当 $x\in[\frac{1}{e}-1,e-1]$ 时，(其中 $e=2.718\cdots$)，不等式 $f(x)<m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

(3)若关于 x 的方程 $f(x)=x^2+x+a$ 在区间 $[0,2]$ 上恰好有两个相异的实根，求实数 a 的取值范围.

3. 已知函数 $f(x)=\ln\sqrt{1+2x}+mx$.

(1) $f(x)$ 为定义域上的单调函数，求实数 m 的取值范围；

(2)当 $m=-1$ 时，求函数 $f(x)$ 的最大值；

(3)当 $m=1$，$1\geqslant a>b\geqslant 0$ 时，证明：$\frac{4}{3}<\frac{f(a)-f(b)}{a-b}<2$.

参考答案

【拓展】

1. C　$f'(x)=3x^2+6ax+3(a+2)$，∵ 函数 $f(x)$ 有三个单调区间，即方程 $f'(x)=0$ 有两个根，∴ $36a^2-36(a+2)>0$，即 $a^2-a-2>0$，解得 $a<-1$，或 $a>2$. 故选 C.

2. B　由导函数的图像知，$x=-1$ 是极小值点，$x=4$ 是极大值点，函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(4,+\infty)$ 上是减函数，在 $(-1,4)$ 上是增函数. 故选 B.

3. (1) 由已知 对于 $n\in\mathbf{N}^*$，总有 $2S_n=a_n+a_n^2$ ①成立，

$\therefore 2S_{n-1}=a_{n-1}+a_{n-1}^2\ (n\geqslant 2)$，　　②

①－②得 $2a_n=a_n+a_n^2-a_{n-1}-a_{n-1}^2$，

$\therefore a_n+a_{n-1}=(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})$，

$\because a_n,a_{n-1}$ 均为正数，$\therefore a_n-a_{n-1}=1\ (n\geqslant 2)$.

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列，

又 $n=1$ 时，$2S_1=a_1+a_1^2$，解得 $a_1=1$，

$\therefore a_n=n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) 由已知 $a_2=c_1^2=2\Rightarrow c_1=\sqrt{2}$，

$a_3=c_2^3=3\Rightarrow c_2=\sqrt[3]{3}$，$a_4=c_3^4=4\Rightarrow c_3=\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$，

$a_5=c_4^5=5\Rightarrow c_4=\sqrt[5]{5}$，

易得 $c_1<c_2,c_2>c_3>c_4>\ldots$，

猜想 $n\geqslant 2$ 时，$\{c_n\}$ 是递减数列.

令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

$\because$ 当 $x\geqslant 3$ 时，$\ln x>1$，则 $1-\ln x<0$，即 $f'(x)<0$，

$\therefore$ 在 $[3,+\infty)$ 内 $f(x)$ 为单调递减函数.

由 $a_{n+1}=c_n^{n+1}$ 知 $\ln c_n=\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$，

$\therefore n\geqslant 2$ 时，$\{\ln c_n\}$ 是递减数列. 即 $\{c_n\}$ 是递减数列.

又 $c_1<c_2$，$\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ 中的最大项为 $c_2=\sqrt[3]{3}$.

4. (1) $f'(x)=3ax^2-3(a+2)x+6=3a\left(x-\dfrac{2}{a}\right)(x-1)$，

$\because a>2$，$\therefore \dfrac{2}{a}<1$，

$\therefore$ 当 $x<\dfrac{2}{a}$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；当 $\dfrac{2}{a}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{2}{a}\right)$，$(1,+\infty)$ 内单调递增，在 $\left(\dfrac{2}{a},1\right)$ 内单调递减.

故 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=-\dfrac{a}{2}$.

(2) ①若 $a=0$，则 $f(x)=-3(x-1)^2$，$\therefore f(x)$ 的图像与 x 轴只有一个交点.

②若 $a<0$，则 $\dfrac{2}{a}<1$，$\therefore$ 当 $x<\dfrac{2}{a}$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，当 $\dfrac{2}{a}<x<1$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 的极大值为 $f(1)=-\dfrac{a}{2}>0$，

$\because f(x)$ 的极小值为 $f(\dfrac{2}{a})<0$，$\therefore f(x)$ 的图像与 x 轴有三个公共点.

③若 $0<a<2$，则 $\dfrac{2}{a}>1$，$\therefore$ 当 $x<1$ 或 $x>\dfrac{2}{a}$ 时，$f'(x)>0$，当 $\dfrac{2}{a}<x<1$ 时，$f'(x)<0$. $\because$ 极大值 $f(1)=-\dfrac{a}{2}<0$，故 $f(x)$ 的图像与 x 轴只有一个交点.

④若 $a=2$，则 $f'(x)=6(x-1)^2\geqslant 0$，$\therefore f(x)$ 的图像与 x 轴只有一个交点.

⑤当 $a>2$，由(1)知 $f(x)$ 的极大值为 $f(\dfrac{2}{a})=-4(\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{4})^2-\dfrac{3}{4}<0$，

综上所述，若 $a\geqslant 0$，$f(x)$ 的图像与 x 轴只有一个公共点；
若 $a<0$，$f(x)$ 的图像与 x 轴有三个公共点.

5. (1)当 $0<x\leqslant 10$ 时，$W=xR(x)-(10+2.7x)=8.1x-\dfrac{x^3}{30}-10$ ；

当 $x>10$ 时，$W=xR(x)-(10+2.7x)=98-\dfrac{1\,000}{3x}-2.7x$.

$$\therefore W=\begin{cases}8.1x-\dfrac{x^3}{30}-10, & 0<x\leqslant 10,\\ 98-\dfrac{1\,000}{3x}-2.7x, & x>10.\end{cases}$$

(2)①当 $0<x\leqslant 10$ 时，由 $W'=8.1-\dfrac{x^2}{10}=0$，得 $x=9$，

且当 $x\in(0,9)$ 时，$W'>0$ 当 $x\in(9,10)$ 时，$W'<0$，

$\therefore$ 当 $x=9$ 时，W 取最大值，且 $W_{\max}=8.1\cdot 9-\dfrac{1}{30}\cdot 9^3-10=38.6$.

②当 $x>10$ 时 $W=98-(\dfrac{1\,000}{3x}+2.7x)\leqslant 98-2\sqrt{\dfrac{1\,000}{3x}\cdot 2.7x}=38$，

当且仅当 $\dfrac{1\,000}{3x}=2.7x$，即 $x=\dfrac{100}{9}$ 时，$W=38$，

故当 $x=\dfrac{100}{9}$ 时，W 取最大值 38.

综合①②知当 $x=9$ 时，W 取最大值.

所以当年产量为 9 千件时，该公司在这一品牌服装的生产中所获年利润最大.

【强化闯关】

1. B　$f'(x)=3(x^2-b)$，$\because$ 在区间(0,1)内有极小值，$\therefore 0<\sqrt{b}<1$，即 $0<b<1$. 故选 B.

2. (1)函数的定义域为 $(-1,+\infty)$，$\because f'(x)=2[(x+1)-\dfrac{1}{x+1}]=\dfrac{2x(x+2)}{x+1}$，

由 $f'(x)>0$ 得 $x>0$，由 $f'(x)<0$，$-1<x<0$.

则递增区间是$(0,+\infty)$递减则区间$(-1,0)$.

(2)由$f'(x)=\dfrac{2x(x+2)}{x+1}=0$,得$x=0$.

由(1)知$f(x)$在$[\dfrac{1}{e}-1,0]$上递减,在$[0,e-1]$上递增.

又$f(\dfrac{1}{e}-1)=\dfrac{1}{e^2}+2$,$f(e-1)=e^2-2$,且$e^2-2>\dfrac{1}{e^2}+2$.

所以$x\in[\dfrac{1}{e}-1,e-1]$时,$f(x)$的最大值为e^2-2.

故$m>e^2-2$时,不等式$f(x)<m$恒成立.

(3)方程$f(x)=x^2+x+a$,$x-a+1-2\ln(1+x)=0$,

记$g(x)=x-a+1-2\ln(1+x)$,则$g'(x)=1-\dfrac{2}{1+x}=\dfrac{x-1}{x+1}$.

由$g'(x)>0$,得$x>1$,由$g'(x)<0$,得$0<x<1$.

所以$g(x)$在$[0,1]$上递减,在$[1,2]$上递增.

为使方程$f(x)=x^2+x+a$在$[0,2]$上恰好有两个相异的实根,只需$g(x)=0$在$[0,1)$和$(1,2]$上各有一个实根,于是有$\begin{cases}g(0)\geqslant 0,\\ g(1)<0,\\ g(2)\geqslant 0,\end{cases}$

$\because 2-2\ln 2<3-2\ln 3<1$,$\therefore 2-2\ln 2<a\leqslant 3-2\ln 3$.

3. (1)$f(x)=\dfrac{1}{2}\ln(1+2x)+mx$,$x>-\dfrac{1}{2}$,$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{1+2x}+m$,

$\because$ 对$x>-\dfrac{1}{2}$,有$\dfrac{1}{1+2x}\in(0,+\infty)$,$\therefore$ 不存在实数m使$f'(x)=\dfrac{1}{1+2x}+m\leqslant 0$对$x>-\dfrac{1}{2}$恒成立,

由$f'(x)=\dfrac{1}{1+2x}+m\geqslant 0$恒成立得$m\geqslant -\dfrac{1}{1+2x}$,

而$-\dfrac{1}{1+2x}<0$,$\therefore m\geqslant 0$.

经检验,当$m\geqslant 0$时,$f'(x)=\dfrac{1}{1+2x}+m>0$对$x>-\dfrac{1}{2}$恒成立,

$\therefore f(x)$为定义域上的单调函数.

(2)当$m=-1$时,由$f'(x)=\dfrac{1}{1+2x}-1=-\dfrac{2x}{1+2x}=0$,得$x=0$.

当$x\in(-\dfrac{1}{2},0)$时,$f'(x)>0$当$x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)<0$,

$\therefore f(x)$在$x=0$时取得最大值,$\therefore$ 此时函数$f(x)$的最大值为$f(0)=0$.

(3)由(2)得$\ln\sqrt{1+2x}\leqslant x$对$x>-\dfrac{1}{2}$恒成立,当且仅当$x=0$时取等号.

热点聚焦

数学是科学的皇后,而数论是数学的皇后。

——高斯

名家风采

当 $m=1$ 时,$f(x)=\frac{1}{2}\ln(1+2x)+x$,$\because 1\geqslant a>b\geqslant 0$,$\therefore a-b>0$,

$\therefore f(b)-f(a)=\ln\sqrt{\frac{1+2b}{1+2a}}+(b-a)=\ln\sqrt{1+\frac{2(b-a)}{1+2a}}+(b-a)<\frac{b-a}{1+2a}+(b-a)=-\frac{(a-b)(2+2a)}{1+2a}$,

$\therefore \frac{f(a)-f(b)}{a-b}>\frac{2+2a}{1+2a}$,同理$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}<\frac{2+2b}{1+2b}$.

又 $1\geqslant a>b\geqslant 0$,$\frac{2+2a}{1+2a}=1+\frac{1}{1+2a}\geqslant\frac{4}{3}$,$\frac{2+2b}{1+2b}=1+\frac{1}{1+2b}\leqslant 2$,

$\therefore \frac{4}{3}<\frac{f(a)-f(b)}{a-b}<2$.

热点 3　二次函数与三次函数

热点诠释

二次函数是中学代数的基本内容之一. 作为最基本的初等函数,可以以它为素材来研究函数的单调性、奇偶性、最值等性质,还可建立起函数、方程、不等式之间的有机联系;作为抛物线,可以联系其他平面曲线讨论相互之间的关系. 而三次函数是新教材导数内容中最简单的高次多项式函数,其导函数就是二次函数,沟通了导数与初等函数的联系. 因此,二次函数与三次函数的综合问题正在成为高考新的热点.

学习二次函数,可以从两个方面入手:一是解析式,二是图像特征. 从解析式出发,可以进行纯粹的代数推理,这种代数推理、论证的能力反映出一个人的基本数学素养;从图像特征出发,可以实现数与形的自然结合,这正是中学数学中一种非常重要的思想方法. 而对于三次函数,往往可以通过求导,转化为二次函数或二次方程问题,然后结合导数的基本知识及二次函数的性质进行研究.

典例调研

题型一　二次函数

【调研 1】 已知 a,b 为常数,若 $f(x)=x^2+4x+3$,$f(ax+b)=x^2+10x+24$,则 $5a-b=$________.

解析　由 $f(x)=x^2+4x+3$,$f(ax+b)=x^2+10x+24$ 得 $(ax+b)^2+4(ax+b)+3=x^2+10x+24$,即 $a^2x^2+2abx+b^2+4ax+4b+3=x^2+10x+24$,

比较系数得$\begin{cases}a^2=1,\\2ab+4a=10,\\b^2+4b+3=24.\end{cases}$

解得 $a=-1$,$b=-7$,或 $a=1$,$b=3$,则 $5a-b=2$.

【知识链接】 要解决与二次函数有关的综合问题，首先要熟练掌握二次函数的有关基础知识：

1. 二次函数的解析式.（1）一般式 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$；（2）顶点式 $f(x)=a(x-m)^2+n(a\neq 0)$；（3）两点式 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$. 求二次函数解析式的关键是根据条件选用上述恰当的解析式形式.

2. 二次函数的性质.

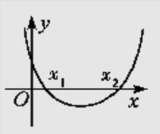
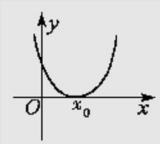
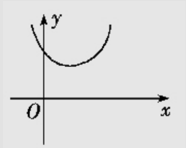
二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图像是一条抛物线，对称轴方程为 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

（1）当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，函数在 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ 上递减，在 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上递增，当 $x=-\frac{b}{2a}$，$[f(x)]_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$；

（2）当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，函数在 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ 上递增，在 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上递减，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$[f(x)]_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

（3）二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时图像与 x 轴有两个交点 $M_1(x_1,0)$、$M_2(x_2,0)$，$|M_1M_2|=|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$.

3. 三个“二次”间的关系.

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c$ 的图像（$a>0$）			
方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解	$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0=-\frac{b}{2a}$	无解
$ax^2+bx+c>0$ 的解	$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x\neq x_0$	$x\in\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0$ 的解	$x_1<x<x_2$	$x\in\varnothing$	$x\in\varnothing$

拓展 1 **二次项系数为 1 的二次函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 x 轴平行，则**

A. $f(\arcsin\frac{1}{3})>f(\arcsin\frac{2}{3})$　　B. $f(\arcsin\frac{1}{3})=f(\arcsin\frac{2}{3})$

C. $f(\arcsin\frac{1}{3})<f(\arcsin\frac{2}{3})$　　D. $f(\arcsin\frac{1}{3})$ **与** $f(\arcsin\frac{2}{3})$ **大小不定**

【调研 2】 **已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+1(a,b\in\mathbf{R},a>0)$，设方程 $f(x)=x$ 的两个实根分别为 x_1,x_2.**

(1)若 $x_1<2<x_2<4$，设有函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=x_0$，求证：$x_0>-1$；

(2)若 $|x_1|<2,|x_2-x_1|=2$，求 b 的取值范围.

解析 **(1)由方程 $f(x)=x$ 得 $f(x)-x=0$，即 $ax^2+(b-1)x+1=0$，**

设 $g(x)=ax^2+(b-1)x+1$，由题知 $a>0$，方程 $f(x)=x$ 的两根 x_1,x_2 满足 $x_1<2<x_2<4$，所以函数 $g(x)=ax^2+(b-1)x+1$ 的图像是开口向上，与 x 轴的两个交点分别在 2 的左侧和 2 与 4 之间，所以有

$\begin{cases}g(2)<0,\\g(4)>0,\end{cases}$**即**$\begin{cases}4a+2b-1<0,\\16a+4b-3>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12a+6b-3<0,\\-16a-4b+3<0,\end{cases}$**得** $-4a+2b<0$，**所以** $\frac{b}{2a}<1$，**即** $x_0=-\frac{b}{2a}>-1$.

(2)解法一 **对于方程 $ax^2+(b-1)x+1=0$，由韦达定理得** $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{1-b}{a},\\x_1\cdot x_2=\frac{1}{a}.\end{cases}$ **因为 $|x_2-x_1|=2$，所以 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4$，故 $(1-b)^2=4a^2+4a$.** ①

$\because |x_1|<2,|x_2-x_1|=2,\therefore -6<x_1+x_2<6$，**即** $-6<\frac{1-b}{a}<6\Rightarrow(1-b)^2<36a^2$，

所以 $36a^2>4a^2+4a\Rightarrow a>\frac{1}{8}(a>0)$.

则由①得 $(1-b)^2=4a^2+4a>\frac{9}{16}$，由此解得 $b>\frac{7}{4}$ 或 $b<\frac{1}{4}$.

解法二 **由 $|x_1|<2$ 可得 $-2<x_1<2$.**

当 $-2<x_1\leqslant 0$ 时，若 $x_1<x_2$，由 $|x_2-x_1|=2$ 得 $0<x_2\leqslant 2$，

故函数 $g(x)=ax^2+(b-1)x+1$ 与 x 轴的两个交点分别在 $(-2,0]$ 和 $(0,2]$ 内，

则有 $g(0)<0$，但 $g(0)=1$，所以 $x_1<x_2$ 不成立；

若 $x_2<x_1$，则由 $|x_2-x_1|=2$ 得 $-4<x_2\leqslant-2$，所以函数 $g(x)=ax^2+(b-1)x+1$ 与 x 轴的两个交点分别在 $(-4,-2]$ 和 $(-2,0]$ 内，

从而 $\begin{cases}g(-4)>0,\\g(-2)\leqslant 0,\\g(0)\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}16a-4b+5>0,\\4a-2b+3\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}16a-4b+5>0,\\-16a+8b-12\geqslant 0,\end{cases}$ **即** $4b>7\Rightarrow b>\frac{7}{4}$.

同理，当 $0<x_1<2$ 时，可得 $b<\frac{1}{4}$.

综上所述，b 的取值范围为 $b>\frac{7}{4}$ 或 $b<\frac{1}{4}$.

【方法探究】 一元二次方程的根的分布问题既是高考的重点又是难点，解决根的分布问题的一般方法是 根据题意作出符合根的分布的图像，由图像的形象直观得出它所必须满足的充要条件，从而确定相关参数的取值范围. 如本例，在(1)的解析中，运用了函数图像特点，(2)的解法一中运用了韦达定理，解法二中充分运用已知条件，将所求问题转化成根的分布情况进行讨论. 借助函数的图像特点，充分运用根的分布的充要条件逐一分析求解，是解决此类问题的关键所在.

拓展 2 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R})$，若 $x_1<x_2<x_3<x_4$ 且 $x_1+x_4=x_2+x_3$.

(1) 试证 $f(x_1)+f(x_4)=f(x_1+x_4)-2ax_1x_4+c$；

(2) 试比较 x_1x_4 与 x_2x_3 之间的大小关系；

(3) 试比较 $f(x_1)+f(x_4)$ 与 $f(x_2)+f(x_3)$ 之间的大小关系.

题型二 三次函数

【调研 3】 求 $f(x)=(x-1)[2x^2-(3a+4)x+9a-4]$ 在区间 $[0,3]$ 上的最大值与最小值，其中 $0<a<2$.

分析 求出导数，根据单调性与极值，确定最值.

解析 $f'(x)=6(x-2)(x-a)$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=2$ 或 $x=a$.

又 $f(2)=3a-4$，$f(a)=-a^3+6a^2-9a+4$，$f(0)=4-9a$，$f(3)=4$，

$f(a)-f(2)=(-a^3+6a^2-9a+4)-(3a-4)=(2-a)^3>0(\because a<2)$，

$f(3)-f(0)=4-(4-9a)=9a>0$，

所以，最大值只可能是 $f(a)$ 与 $f(3)$，最小值只能是 $f(2)$ 与 $f(a)$.

又 $\because f(3)-f(a)=a\cdot(3-a)^2>0$，$\therefore$ 最大值是 $f(3)=4$.

而 $f(2)-f(0)=4(3a-2)$，

故当 $0<a<\frac{2}{3}$ 时，$f(2)<f(0)$，于是 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 的最小值是 $f(2)=3a-4$，

当 $\frac{2}{3}\leqslant a<2$ 时，$f(2)>f(0)$，此时最小值是 $f(0)=4-9a$.

$$f(x)\text{在}[0,3]\text{上}\begin{cases}\text{最大值是}4,\\ \text{最小值是}\begin{cases}3a-4, & 0<a<\frac{2}{3},\\ -9a+4, & \frac{2}{3}\leqslant a<2.\end{cases}\end{cases}$$

【知识链接】 求函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上的最大(小)值时,如果$f(x)$在$[a,b]$上有极大(小)值点,则必须比较极大(小)值与端点处的函数值的大小,其较大(小)者即为闭区间$[a,b]$上的最大(小)值.如果$f(x)$在$[a,b]$上没有极大(小)值点,则说明函数在区间$[a,b]$上是单调函数,其最大(小)值必定在区间端点处取得.在本题中,条件'$0<a<2$'确定了两个极值都在闭区间$[0,3]$上,减少了讨论的数量.如果删除该条件,请你思考如何分类讨论.

拓展3 已知函数$f(x)=x(x-a)(x-b)$,其中$0<a<b$,设$f(x)$在$x=s$及$x=t$处取得极值,其中$s<t$.

(1)求证:$0<s<a<t<b$;

(2)若$a+b<2\sqrt{2}$,求证:过原点且与曲线$y=f(x)$相切的两条直线不可能垂直.

【调研4】 已知$f(x)=x^3+bx^2+cx+d$在$(-\infty,0)$上是增函数,在$[0,2]$上是减函数,且方程$f(x)=0$有三个根,它们分别为α、2、β.

(1)求c的值;

(2)求证:$f(1)\geqslant 2$;

(3)求$|\alpha-\beta|$的取值范围.

分析 首先由函数的单调性,确定函数的极值点,进而确立b,c,d的一个等量关系与不等关系.再由三次方程的三个根建立α,β与a,b,c的关系.

解析 (1)$f'(x)=3x^2+2bx+c$,由题意可得$x=0$为$f(x)$的极值点,

$\therefore f'(0)=0$,$\therefore c=0$.

(2)令$f'(x)=3x^2+2bx=0$,得$x_1=0$,$x_2=-\dfrac{2b}{3}$.

$\because f(x)$在$(-\infty,0)$上是增函数,在$[0,2]$上是减函数,$\therefore -\dfrac{2b}{3}\geqslant 2$,即$b\leqslant -3$.

又$\because f(2)=0$,$\therefore 8+4b+d=0$,$\therefore d=-8-4b$,

$\therefore f(1)=1+b+d=-7-3b\geqslant 2$.

(3)$\because$方程$f(x)=0$有三个根α、2、β,$\therefore$设$f(x)=x^3+bx^2+cx+d=(x-2)(x^2+mx+n)$,

由待定系数法得$m=b+2$,$n=-\dfrac{d}{2}$,

$\therefore \alpha$、β为方程$x^2+(b+2)x-\dfrac{d}{2}=0$的两根,

$\therefore \alpha+\beta=-(b+2)$,$\alpha\beta=-\dfrac{d}{2}$,

$\therefore |\alpha-\beta|^2=(b+2)^2+2d=b^2-4b-12=(b-2)^2-16$,

$\because b\leqslant -3$,$\therefore |\alpha-\beta|^2\geqslant 9$,

$\therefore |\alpha-\beta|\geqslant 3$.

【方法探究】 研究三次函数的单调性与最值问题，一般是利用导数这一工具来解决问题，求导后得到一个二次函数，于是单调区间的问题便转化为一元二次不等式的问题，利用单调性即可解决最值问题.

拓展 4 已知函数 $f(x)=-x^3-bx^2-5cx-2d$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，在 $[0,6]$ 上单调递增，且方程 $f(x)=0$ 有 3 个实根 $m,n,1$.

(1) 求 $f(4)$ 的取值范围；

(2) $m^2-4mn+n^2$ 是否有最小值？若有，求出最小值 若没有，请说明理由.

强化闯关

1. 已知 $f(x)=x^2+(a+1)x+\lg|a+2|(a\neq -2,a\in\mathbf{R})$.

(1) 若 $f(x)$ 能表示成一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$ 的和，求 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的解析式；

(2) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,(a+1)^2]$ 上都是减函数，求 a 的取值范围；

(3) 在 (2) 的条件下，比较 $f(1)$ 和 $\frac{1}{6}$ 的大小.

2. 已知函数 $f(x)==x^3-\frac{1}{2}x^2+bx+c$.

(1) 若 $f(x)$ 的图像有与 x 轴平行的切线，求 b 的取值范围；

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 时取得极值，且 $x\in[-1,2]$ 时，$f(x)<c^2$ 恒成立，求 c 的取值范围.

参考答案

【拓展】

1. A 设 $f(x)=x^2+bx+c$，则 $f'(x)=2x+b$，由题意有 $f'(1)=2+b=0$，

$\therefore b=-2$，即 $f(x)=x^2-2x+c$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上递减.

又 $0<\arcsin\frac{1}{3}<\arcsin\frac{2}{3}<1$，

$\therefore f(\arcsin\frac{1}{3})>f(\arcsin\frac{2}{3})$. 故选 A.

2. (1) $f(x_1)+f(x_4)=a(x_1^2+x_4^2)+b(x_1+x_4)+2c=a(x_1+x_4)^2-2ax_1x_4+b(x_1+x_4)+2c=f(x_1+x_4)-2ax_1x_4+c$.

(2) 令 $x_1+x_4=x_2+x_3=u$，则 $x_4=u-x_1$，$x_3=u-x_2$. $x_2x_3-x_1x_4=x_2(u-x_2)-x_1(u-x_1)=(x_1-x_2)(x_1+x_2-u)=(x_1-x_2)(x_1-x_3)>0$. 所以 $x_2x_3>x_1x_4$.

(3) $[f(x_1)+f(x_4)]-[f(x_2)+f(x_3)]=[f(x_1+x_4)-2ax_1x_4+c]-[f(x_2+x_3)-2ax_2x_3+c]=2a(x_2x_3-x_1x_4)$.

因此，当 $a>0$ 时，$f(x_1)+f(x_4)>f(x_2)+f(x_3)$ 当 $a<0$ 时，$f(x_1)+f(x_4)<f(x_2)+f(x_3)$.

3. (1) $\because f(x)=x^3-(a+b)x^2+abx$，$\therefore f'(x)=3x^2-2(a+b)x+ab$.

由题意 s、t 为方程 $f'(x)=0$ 的两个根，

$\because f'(a)=3a^2-2(a+b)a+ab=a^2-ab=a(a-b)<0$，

由根的分布得 $s<a<t$,

又$\because f'(b)=3b^2-2(a+b)b+ab=b^2-ab=b(b-a)>0$,$\therefore b>t$ 或 $b<s$,

$\because 0<a<b$ 且 $a>s$, $\therefore b>t$,

$\therefore 0<s<a<t<b.$

(2)设切点为$(m,f(m))$,$(n,f(n))$,

$\because$ 直线过原点,$\therefore k=\dfrac{f(m)}{m}=(m-a)(m-b).$

同时 $k=f'(m)=3m^2-2(a+b)m+ab$,

$\therefore (m-a)(m-b)=3m^2-2(a+b)m+ab.$

$2m^2-(a+b)m=0$,$m=0$ 或 $m=\dfrac{a+b}{2}$,$\therefore k_1=ab$,$k_2=-\dfrac{(a-b)^2}{4}$. 若两直线垂直,则

$k_1\cdot k_2=-1$,则 $ab\cdot\dfrac{(a-b)^2}{4}=1$,$\therefore (a-b)^2=\dfrac{4}{ab}$,

$\therefore (a+b)^2-4ab=\dfrac{4}{ab}$,$\because 0<a<b$,$\therefore ab>0$,

$\therefore (a+b)^2=4ab+\dfrac{4}{ab}\geqslant 8$,当且仅当 $ab=1$ 时,等号成立.

$\because 0<a+b<2\sqrt{2}$,$\therefore (a+b)^2<8$,与上述矛盾.

$\therefore$ 过原点且与曲线 $y=f(x)$ 相切的两条直线不可能垂直.

4. (1)$f'(x)=-3x^2-2bx-5c.$

$\because f(x)$是$(-\infty,0]$上单调递减,$[0,6]$上单调递增,$\therefore f'(0)=0$,$c=0$,

$\therefore f(x)=-x^3-bx^2-2d.$

$\because f(1)=-1-b-2d=0$,$\therefore d=-\dfrac{b+1}{2}.$

$f'(x)=-3x^2-2bx=0$ 的两根为 $x_1=0$,$x_2=-\dfrac{2b}{3}$,

又 $f(x)$ 在$[0,6]$上单调递增,则 $-\dfrac{2b}{3}\geqslant 6$ 即 $b\leqslant -9$,

$\therefore f(4)=-63-15\cdot b\geqslant 72.$

故 $f(4)$ 的取值范围是$[72,+\infty)$.

(2)由于 $m,n,1$ 是方程 $f(x)=0$ 的三个根,所以可设 $f(x)=-(x-m)(x-n)(x-1)$,

由 $-x^3+(m+n+1)x^2-(m+n+mn)x+mn=-x^3-bx^2-2d$,得

$$\begin{cases}-b=m+n+1,\\0=m+n+mn,\\-2d=mn,\end{cases}$$

$\therefore m^2-4mn+n^2=(m+n)^2-6mn=(-1-b)^2+12d=(b-2)^2-9\geqslant(-9-2)^2-9=112$,故 $m^2-4mn+n^2$ 有最小值 112.

【强化闯关】

1. (1)设 $f(x)=g(x)+h(x)$ ①,其中 $g(x)$ 是奇函数,$h(x)$ 是偶函数,

则有$f(-x)=g(-x)+h(-x)=-g(x)+h(x)$,②

联立①,②可得

$g(x)=(a+1)x,h(x)=x^2+\lg|a+2|$.

(2)函数$g(x)=(a+1)x$当且仅当$a+1<0$,即$a<-1$时才是减函数,

$\therefore a<-1$,①

又$f(x)=x^2+(a+1)x+\lg|a+2|=(x+\frac{a+1}{2})^2+\lg|a+2|-\frac{(a+1)^2}{4}$,

$\therefore f(x)$的递减区间是$(-\infty,-\frac{a+1}{2})$.

由已知得$(a+1)^2\leqslant-\frac{a+1}{2}$,②

联立①②,解得$-\frac{3}{2}\leqslant a<-1$,$\therefore a$取值范围是$[-\frac{3}{2},-1)$.

(3)$f(1)=1+(a+1)+\lg|a+2|=a+2+\lg|a+2|(-\frac{3}{2}\leqslant a<-1)$,

$(a+1)$和$\lg|a+2|$在$[-\frac{3}{2},-1]$上为增函数,

$\therefore f(1)\geqslant(-\frac{3}{2}+2)+\lg|(-\frac{3}{2})+2|=\frac{1}{2}+\lg\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\lg\frac{1}{8}$

$>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\lg\frac{1}{10}=\frac{1}{6}$,$\therefore f(1)>\frac{1}{6}$,即$f(1)$大于$\frac{1}{6}$.

2. (1)$f'(x)=3x^2-x+b$,

设切点$P(x_0,y_0)$,则$f(x)$在P点的切线的斜率$k=f'(x_0)=3x_0^2-x_0+b$,

由题意,$f'(x_0)=3x_0^2-x_0+b=0$有解,

$\Delta=1-12b\geqslant0$,$\therefore b\leqslant\frac{1}{12}$.

(2)$\because f(x)$在$x=1$时取得极值,

$\therefore x=1$为方程$f'(x)=3x^2-x+b=0$的一个根,$\therefore b=-2$,

$\therefore$由$3x^2-x-2=0$可得$f'(x)=0$的另一根为$x_2=-\frac{2}{3}$,

$\because$当$x<-\frac{2}{3}$或$x>1$时,$f'(x)>0$,

$\therefore$当$x\in[-1,2]$时,$f(x)$在$[-1,-\frac{2}{3}]$递增,$(-\frac{2}{3},1)$递减,$[1,2]$递增,

$\therefore f(x)$在区间$[-1,2]$有极大值$f(-\frac{2}{3})=\frac{22}{27}+c$,又$f(2)=2+c$,

$\therefore x\in[-1,2]$时,$f(x)$有最大值$f(2)=2+c$.

$\because f(x)<c^2$恒成立,$\therefore 2+c<c^2$恒成立,

$\therefore c<-1$或$c>2$.

热点聚焦

原创题探讨

函数与数列是本辑高考冲刺的重点内容,有关函数或数列的综合问题,一直是高考考查的热点内容之一. 此类考题一般以函数或数列的基本性质为基点,综合考查考生的推理论证能力和分析问题的能力. 而导数是研究函数的必备工具,利用导数知识解决函数的一些初等性质问题,更显简捷. 正基于以上不同侧面的考虑,编拟了如下四个问题,与考生一起探讨.

【典例 1】 已知函数 $f(x)=|1-\frac{1}{x}|$.

(1) 是否存在实数 $a,b(a<b)$,使得函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域都是 $[a,b]$,若存在,求出 a,b 若不存在,说明理由;

(2) 若存在实数 $a,b(a<b)$,使得函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$ 时,值域为 $[ma,mb]$,求 m 的取值范围($m\neq0$).

分析 分段讨论函数的单调性,由函数的单调性确定函数的定义域与值域的关联,进而解方程组或研究方程解的存在性.

解析 (1) 不存在实数 a,b 满足条件.

若存在 a,b 使得函数 $y=|1-\frac{1}{x}|$ 的定义域和值域都是 $[a,b]$,则 $a>0$.

函数 $f(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{x}, x\geqslant1,\\ \frac{1}{x}-1, 0<x<1,\end{cases}$

① 当 $a,b\in(0,1)$ 时,$f(x)=\frac{1}{x}-1$ 在 $(0,1)$ 上为减函数,则

$\begin{cases}f(a)=b,\\ f(b)=a,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{1}{a}-1=b,\\ \frac{1}{b}-1=a,\end{cases}$ 解得 $a=b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

这与 $a<b$ 矛盾,此时不存在实数 a,b 适合条件;

② 当 $a,b\in[1,+\infty)$,$f(x)=1-\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数,则

$\begin{cases}f(a)=a,\\f(b)=b,\end{cases}$即$\begin{cases}1-\dfrac{1}{a}=a,\\1-\dfrac{1}{b}=b,\end{cases}$此时 a,b 是方程 $x^2-x+1=0$ 的两个根，但方程无解，故不存在实数 a,b 适合条件；

③ 若 $a\in(0,1)$，$b\in[1,+\infty)$，显然有 $1\in[a,b]$，但 $f(1)=0\notin[a,b]$，故此时也不存在实数 a,b 适合条件，

综上，不存在实数 a,b 适合条件.

(2) 若存在实数 a,b 使函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$ 时，值域为 $[ma,mb]$，显然有 $a>0$，$m>0$.

由第(1)问知，当 $a,b\in(0,1)$ 或 $a\in(0,1)$，$b\in[1,+\infty)$ 时，a,b 不存在. 故只有可能是 $a,b\in[1,+\infty)$.

此时，$\because f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数，$\therefore\begin{cases}f(a)=ma,\\f(b)=mb,\end{cases}$即$\begin{cases}1-\dfrac{1}{a}=ma,\\1-\dfrac{1}{b}=mb,\end{cases}$

a,b 是方程 $mx^2-x+1=0$ 的两个根，即关于 x 的方程 $mx^2-x+1=0$ 有两个大于 1 的实根，

$\therefore\begin{cases}m>0,\\\dfrac{1}{2m}>1,\\\Delta=1-4m>0,\end{cases}$ 解得 $0<m<\dfrac{1}{4}$，

故 m 的取值范围是 $(0,\dfrac{1}{4})$.

典例外延

变式 1　若 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{13}{2}$ 在区间 $[a,b]$ 上的最小值为 $2a$，最大值为 $2b$，求 a,b 的值.

思路　二次函数是具体的，抛物线开口向下，对称轴为 y 轴. 由不定区间 $[a,b]$ 与定对称轴 $x=0$ 的关系，确定函数在区间 $[a,b]$ 上的单调性，进而确定最值.

变式 2　已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx$(a,b 为常数且 $a\neq0$)满足条件 $f(x-3)=f(5-x)$，且方程 $f(x)=x$ 有等根.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 是否存在实数 $m,n(m<n)$，使 $f(x)$ 的定义域为 $[m,n]$ 时，值域为 $[3m,3n]$. 如果存在，求出 m,n 的值. 若不存在，请说明理由.

思路　首先根据函数或方程的性质，利用待定系数法，求出 $f(x)$ 的解析式. 第

(2)问与变式 1 相似,但注意充分挖掘隐含条件,简化讨论过程.

变式 3　对于函数 $y=f(x)(x\in D)$,若同时满足下列条件:①$f(x)$在 D 上为单调函数;②存在区间 $[a,b]\subseteq D$,$(a<b)$,使得 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域也是 $[a,b]$,称 $f(x)$ 为 D 上的闭函数.

(1) 求闭函数 $y=-x^3$ 符合条件②的区间 $[a,b]$;

(2) 若 $f(x)=x^3-3x^2-9x+4$,$x\in[-1,3]$,判断 $f(x)$ 是否是闭函数;

(3) 若 $y=x^2+k(x>0)$ 是闭函数,求实数 k 的取值范围.

思路　仔细阅读理解"新定义". 第(1)问直接解方程可得. 第(2)问可以利用导数确定函数的单调性. 第(3)问与变式 1、变式 2 相仿,转化为方程解的存在性问题进行求解.

点评　函数的定义域与值域是函数的两大要素,通过简单的绝对值函数或二次函数、三次函数研究函数的这一基本性质,应该是函数问题中的基本问题. 这类问题主要考查函数、方程、不等式的关系,要熟练掌握函数和方程的性质,灵活运用分类讨论、等价转化等数学思想方法. 从题型变式来看,变式 3 最具代表意义,一般关于"闭函数"的问题可分为三种类型:一是给出具体的函数,求"闭函数"的区间 $[a,b]$;二是给出具体的函数,讨论"闭函数"区间 $[a,b]$ 的存在性,这二者看似相同(都是可以通过解方程,求出 a,b 的值),但要注意二者的本质差异(讨论方程解的存在性,不一定需要解出方程的根,想一想变式 3 的第(2)小题,你是怎么处理的?);三是给出的函数中含有参变量,由"闭函数"区间 $[a,b]$ 的存在性,求参数的取值范围(这实际上可以看作是 1、2 的逆向思考).

【典例 2】　已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1,公差为 2 的等差数列,对每一个 $k\in\mathbf{N}^*$,在 a_k 与 a_{k+1} 之间插入 2^{k-1} 个 2,得到新数列 $\{b_n\}$. 设 S_n、T_n 分别是数列 $\{b_n\}$ 和 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 试问 a_{10} 是数列 $\{b_n\}$ 的第几项;

(2) 是否存在正整数 m,使得 $S_m=2\ 008$?若存在,求出 m 的值;若不存在,请说明理由;

(3) 若 a_m 是数列 $\{b_n\}$ 的第 $f(m)$ 项,试比较 $S_{f(m)}$ 与 $2T_m$ 的大小,并说明理由.

分析　注意数列的构成规律,不要把思维的角度定格在数列的每一项上,试着把 a_k 和它后面的 2^{k-1} 个 2 看作一个整体.

解析　(1)$\because$ 在数列 $\{b_n\}$ 中,对每一个 $k\in\mathbf{N}^*$,在 a_k 与 a_{k+1} 之间有 2^{k-1} 个 2,

$\therefore a_{10}$ 在数列 $\{b_n\}$ 中的项数为 $10+1+2+4+\cdots+2^8=10+\dfrac{1-2^9}{1-2}=521$,

即 a_{10} 是数列 $\{b_n\}$ 中第 521 项.

(2) $a_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$,

在数列 $\{b_n\}$ 中,a_k 及其前面所有项之和为

$[1+3+5+\cdots+(2k-1)]+(2+4+8+\cdots+2^{k-1})=2^k+k^2-2$，

$\because 2^{10}+10^2-2=1\ 122<2\ 008<2^{11}+11^2-2$，且 $2\ 008-1\ 122=886=443\times 2$，

$\therefore$ 存在 $m=521+443=964$，使得 $S_m=2\ 008$.

(3) 由(2)得 $S_{f(m)}=2^m+m^2-2$，

又 $T_m=1+3+5+\cdots+(2m-1)=m^2$，

$\therefore S_{f(m)}-2T_m=2^m+m^2-2-2m^2=2^m-(m^2+2)$，

要比较 $S_{f(m)}$ 与 $2T_m$ 的大小，只需要比较 2^m 与 m^2+2 的大小即可.

当 $m=1$ 时，$2^m=2$，$m^2+2=3$，故 $2^m<m^2+2$；

当 $m=2$ 时，$2^m=4$，$m^2+2=6$，故 $2^m<m^2+2$；

当 $m=3$ 时，$2^m=8$，$m^2+2=11$，故 $2^m<m^2+2$；

当 $m=4$ 时，$2^m=16$，$m^2+2=18$，故 $2^m<m^2+2$；

当 $m\geqslant 5$ 时，$2^m=(1+1)^m=1+C_m^1+C_m^2+\cdots+C_m^{m-2}+C_m^{m-1}+1$

$$\geqslant 1+m+\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}+m+1=m^2+m+2>m^2+2,$$

故当 $m=1,2,3,4$ 时，$S_{f(m)}<2T_m$；

当 $m\geqslant 5$ 时，$S_{f(m)}>2T_m$.

典例外延

变式 1　已知一个数列 $\{a_n\}$ 的各项是 1 或 3，首项是 1，且第 $k(k=1,2,3,\cdots)$ 个 1 与第 $k+1$ 个 1 之间有 $(2k-1)$ 个 3，即 1，3，1，3，3，3，1，3，3，3，3，3，1，…. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

(1) 试问第 100 个 1 为该数列的第几项；

(2) 求 $S_{2\ 007}$；

(3) 是否存在正整数 m，使得 $S_m=2\ 007$？若存在，求出 m 的值？若不存在，说明理由.

思路　注意数列中插入的项数不同. 从插入项的个数与特征两方面入手解决问题.

变式 2　把自然数按上小下大、左小右大的原则排成如图 5－1－1 的三角形数表(每行比上一行多一个数) 设 $a_{ij}(i、j\in \mathbf{N}^*)$ 是位于这个三角形数表中从上往下数第 i 行、从左往右数第 j 个数，如 $a_{42}=8$.

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & 2 & & 3 \\ 4 & & 5 & & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \end{array}$$

图 5－1－1

(1) 若 $a_{ij}=2\ 006$，求 i、j.

(2) 记三角形数表从上往下数第 n 行各数的和为 b_n，

令 $c_n=\begin{cases}1, n=1,\\ \dfrac{n}{b_n-n}, n\geqslant 2.\end{cases}$ 若数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 T_n.

思路　逐行考虑数列的项数与特征，第 n 行是 n 个连续的正整数. 选准解题的突破口，第 n 行的第一个数与前 $n-1$ 行项数的关系. 求出 b_n，则第(2)问迎刃而解.

点评　复合数列是由单一数列复合或派生而形成的. 复合数列建立了数列与数列之间的关系,使得问题的复杂性更大,这是近年来高考数列综合题的一大热点. 典例与变式 1 有相同的题型结构,或以等差数列(公差非零)或以常数数列为原型,插入一定量的相同数值,产生一个复合数列,不同之处在于插入数值的个数不同(或等差或等比). 变式 2 把非零自然数按一定规律重新排列,形成新的数阵,突破了典例或变式 1 的数列传统形式(线性). 但无论是典例还是变式,其共性在于研究数列的方法相同,即从复合数列的复合过程把握数列的变化规律,把复合数列分段或按行作为一个整体进行研究.

【典例 3】　设 $f(x)$ 是定义在 A 上的连续函数,如果对任意 x_1、$x_2\in A(x_1\neq x_2)$,当 $0<\lambda<1$ 时,都有 $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]>\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ 成立,则称 $f(x)$ 是区间 A 上的凸函数.

(1) 试判断 $f(x)=-x^2$ 是否为 $\mathbf{R}$ 上的凸函数,并证明你的结论;

(2) 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的凸函数,对于任意 x_1、x_2、$x_3\in\mathbf{R}$,求证:$f(\frac{x_1+x_2+x_3}{3})\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$;

(3) 已知函数 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上是凸函数. 在 $\triangle ABC$ 中,求 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的最大值.

分析　本题通过新定义创设新情境,考查学生的阅读理解能力以及应用概念解决问题的能力. 3 个小问环环相扣、层层递进,第(1)问应该根据凸函数的定义进行验证;第(2)问是研究凸函数的性质,也需要从定义出发进行推导;第(3)问运用凸函数的性质,解决具体函数中的有关问题.

解析　(1) 任取 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$,且 $x_1\neq x_2$,则

$$
\begin{aligned}
&f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]-\lambda f(x_1)-(1-\lambda)f(x_2)\\
&=-[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]^2+\lambda x_1^2+(1-\lambda)x_2^2\\
&=-\lambda^2x_1^2-(1-\lambda)^2x_2^2-2\lambda(1-\lambda)x_1x_2+\lambda x_1^2+(1-\lambda)x_2^2\\
&=\lambda(1-\lambda)x_1^2+\lambda(1-\lambda)x_2^2-2\lambda(1-\lambda)x_1x_2\\
&=\lambda(1-\lambda)(x_1-x_2)^2.
\end{aligned}
$$

$\because 0<\lambda<1$,$x_1\neq x_2$,

$\therefore f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]>\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$,

$\therefore f(x)=-x^2$ 是 $\mathbf{R}$ 上的凸函数.

(2) 对定义域内的任意 x_1、x_2、x_3,有

$$f(\frac{x_1+x_2+x_3}{3})=f(\frac{2}{3}\cdot\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{1}{3}x_3)\geqslant\frac{2}{3}f(\frac{x_1+x_2}{2})+\frac{1}{3}f(x_3)\geqslant\frac{2}{3}[\frac{1}{2}f(x_1)$$

$+\frac{1}{2}f(x_2)]+\frac{1}{3}f(x_3)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}.$

(3)由(2)知$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\leqslant\sin\frac{A+B+C}{3}$,

又在$\triangle ABC$中,$A+B+C=\pi$,

$\therefore \sin A+\sin B+\sin C\leqslant 3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$,当$A=B=C=\frac{\pi}{3}$时等号成立,

$\therefore \sin A+\sin B+\sin C$有最大值$\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

典例外延

变式1　集合A是由适合以下性质的函数$f(x)$构成的:对于任意的$x>0,y>0$,且$x\neq y$,都有$f(x)+2f(y)>3f(\frac{x+2y}{3})$.

(1)试判断$f_1(x)=\log_2 x$及$f_2(x)=(x+1)^2$是否在集合A中?说明理由;

(2)设$f(x)\in A$,且定义域是$(0,+\infty)$,值域是$(1,2)$,$f(1)>\frac{3}{2}$,写出一个满足条件的$f(x)$的解析式,并证明你写出的函数$f(x)\in A$.

思路　根据定义逐一验证即可,其中不等式的证明可以采用作差比较法. 第(2)问要抓住具备性质"$f(x)+2f(y)>3f(\frac{x+2y}{3})$"的函数应该是"下凸函数"这一特征.

变式2　已知函数$f(x)=2x^3+(m-x)^3(m\in\mathbf{N}^*)$.

(1)证明:若$x_1,x_2\in(0,m)$,则$f(x_1)+f(x_2)\geqslant 2f(\frac{x_1+x_2}{2})$;

(2)证明:若$a_n=f(n)$,$n=1,2,3,\cdots,m-1$,则$a_1+a_{m-1}\geqslant a_2+a_{m-2}$;

(3)对于任意的$a,b,c\in[\frac{m}{2},\frac{2}{3}m]$,问以$f(a)$,$f(b)$,$f(c)$的值为边长的三条线段是否可以构成三角形?请说明理由.

思路　第(1)问可以用比较法或综合法证明不等式. 第(2)问由函数变为数列,条件"$n=1,2,3,\cdots,m-1$"说明$n\in(0,m)$,暗示利用第(1)问的结论解决问题. 第(3)问归结为函数的值域问题.

变式3　已知函数$f(x)=x-\sin x$.

(1)若$x\in(0,\pi)$,$\theta\in(0,\pi)$,求证:$\frac{2f(\theta)+f(x)}{3}\geqslant f(\frac{2\theta+x}{3})$;

(2)若$x\in(k\pi,(k+1)\pi)$,$\theta\in(k\pi,(k+1)\pi)$,$k\in\mathbf{Z}$,猜想$\frac{2f(\theta)+f(x)}{3}$与$f(\frac{2\theta+x}{3})$的大小关系(不必写出比较过程).

思路　第(1)问作差即证明 $\sin\frac{2\theta+x}{3}-\frac{2\sin\theta+\sin x}{3}\geqslant 0$,可以考虑用导数方法证明其成立,第(2)问猜想的依据应当是函数的凸性.

点评　函数的凹凸性是高等数学的内容,但用中学数学方法处理相关问题已经成为高考的一个热点.典例与变式从不同侧面考查了函数凹凸性的概念与性质及应用.典例着重从函数凸性的严格定义出发,证明确定函数的性质,并以此进行简单的应用.变式1是典例的特殊化,变式2立足于函数凸性的应用,而变式3则侧重于如何用中学数学方法解决函数的凸性.实际上,变式3的本质就是函数 $y=\sin x$ 在区间 $(k\pi,(k+1)\pi)$,$k\in\mathbf{Z}$.当 k 为偶数时,$y=\sin x$ 在区间 $(k\pi,(k+1)\pi)$ 上是上凸的,所以 $\frac{2\sin x_1+\sin x_2}{3}\leqslant\sin\frac{2x_1+x_2}{3}$ 当 k 为奇数时,$y=\sin x$ 在区间 $(k\pi,(k+1)\pi)$ 上是下凸的,所以 $\frac{2\sin x_1+\sin x_2}{3}\geqslant\sin\frac{2x_1+x_2}{3}$.

【典例4】　已知函数 $f(x)=\frac{4x-a}{x^2+1}$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上为增函数,且 $f(\alpha)\cdot f(\beta)=-4$.

(1) 求 α,β 的值(用 a 表示);

(2) 求 $f(\beta)-f(\alpha)$ 的最小值及取得最小值时 a 的值.

分析　首先可以确定函数 $f(x)$ 的单调区间,说明 α,β 与确定区间的关系,注意由一个方程"$f(\alpha)\cdot f(\beta)=-4$",求两个未知数"$\alpha,\beta$",其方程必定隐藏着某种特殊性.第(2)问建立 $f(\beta)-f(\alpha)$ 与 a 的等量关系,求关于 a 的函数最小值.

解析　(1) $f'(x)=\left(\frac{4x-a}{x^2+1}\right)'=\frac{-2(2x^2-ax-2)}{(x^2+1)^2}$,由 $f'(x)>0$,即 $2x^2-ax-2<0$,得 $\frac{a-\sqrt{a^2+16}}{4}<x<\frac{a+\sqrt{a^2+16}}{4}$,

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的单调增区间是 $\left[\frac{a-\sqrt{a^2+16}}{4},\frac{a+\sqrt{a^2+16}}{4}\right]$.

由题意,知 $\frac{a-\sqrt{a^2+16}}{4}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{a+\sqrt{a^2+16}}{4}$,且 $f\left(\frac{a-\sqrt{a^2+16}}{4}\right)\leqslant f(\alpha)<f(\beta)\leqslant f\left(\frac{a+\sqrt{a^2+16}}{4}\right)$,

又 $\because f(\alpha)\cdot f(\beta)=-4<0$,$\therefore f(\alpha)<0<f(\beta)$,$\therefore f(\alpha)\cdot f(\beta)\geqslant f\left(\frac{a-\sqrt{a^2+16}}{4}\right)\cdot f\left(\frac{a+\sqrt{a^2+16}}{4}\right)$.

而 $f\left(\frac{a-\sqrt{a^2+16}}{4}\right)=\frac{-8}{\sqrt{a^2+16}-a}$,$f\left(\frac{a+\sqrt{a^2+16}}{4}\right)=\frac{8}{\sqrt{a^2+16}+a}$,

$\therefore f(\frac{a-\sqrt{a^2+16}}{4})\cdot f(\frac{a+\sqrt{a^2+16}}{4})=-4$，

故$f(\alpha)\cdot f(\beta)\geqslant -4$.

又$f(\alpha)\cdot f(\beta)=-4$，$\therefore f(\alpha)=f(\frac{a-\sqrt{a^2+16}}{4})$且$f(\beta)=f(\frac{a+\sqrt{a^2+16}}{4})$，

由函数单调性，得$\alpha=\frac{a-\sqrt{a^2+16}}{4}$，$\beta=\frac{a+\sqrt{a^2+16}}{4}$.

(2)由(1)知$f(\beta)-f(\alpha)=f(\frac{a+\sqrt{a^2+16}}{4})-f(\frac{a-\sqrt{a^2+16}}{4})=\frac{8}{\sqrt{a^2+16}+a}-\frac{-8}{\sqrt{a^2+16}-a}=\sqrt{a^2+16}\geqslant 4$，

当且仅当$a=0$时取等号.

故$f(\beta)-f(\alpha)$的最小值为4，此时$a=0$.

典例外延

变式1 设关于x有一元二次方程$2x^2-ax-2=0$的两根为$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$，函数$f(x)=\frac{4x-a}{x^2+1}$.

(1) 求$f(\alpha)+f(\beta)$的值；

(2) 求证$f(x)$在$[\alpha,\beta]$上是增函数；

(3) 当a为何值时，$f(x)$在$[\alpha,\beta]$上的最大值与最小值之差最小？

思路 利用根与系数关系，求$f(\alpha)+f(\beta)$的值；函数在$[\alpha,\beta]$上的单调性可利用定义解决；由单调性容易求得$f(x)$在$[\alpha,\beta]$上的最大值与最小值之差.

变式2 关于x的一元二次方程$2x^2-tx-2=0$的两根为$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$，函数$f(x)=\frac{4x-t}{x^2+1}$.

(1) 若x_1,x_2为区间$[\alpha,\beta]$上的两个不同的点，求证：$4x_1x_2-t(x_1+x_2)-4<0$；

(2) $f(x)$在区间$[\alpha,\beta]$上的最大值与最小值分别为f_{max}和f_{min}，记$g(t)=f_{max}-f_{min}$，求$g(t)$的最小值；

(3) 对任意正数x_1,x_2，求证：$|f(\frac{x_1\alpha+x_2\beta}{x_1+x_2})-f(\frac{x_1\beta+x_2\alpha}{x_1+x_2})|<2|\alpha-\beta|$.

思路 结合二次函数的图像，可知$f(x_1)\leqslant 0$且$f(x_2)\leqslant 0$，再证明结论. 第(2)问求f_{max}和f_{min}需要先研究函数的单调性. 第(3)问要注意欲证明不等式左右两边的差异，关键是消去x_1与x_2，观察代数式$\frac{x_1\alpha+x_2\beta}{x_1+x_2}$与$\frac{x_1\beta+x_2\alpha}{x_1+x_2}$的结构，容易联想到定比分点公式，因此可以推导出$\alpha<\frac{x_1\alpha+x_2\beta}{x_1+x_2}<\beta$，$\alpha<\frac{x_1\beta+x_2\alpha}{x_1+x_2}<\beta$，再利用单调性放缩.

点评　函数与方程是高中数学永恒不变的一个主题.典例与2个变式有相同的二次方程和相同的分式函数,主要要求考生熟练掌握二次方程的求根公式,会进行代数式的化简与变形,要求考生掌握函数的基本性质(定义域、值域、单调性),同时体现了导数知识的简单运用,可以培养考生严密的思维习惯和敏锐的洞察力.2个变式是对典例的逆向思考,以典例的难度最大,变式2的第(3)问是变式1的纵向引申,考查的知识较为隐蔽.

参考答案

1.1 (1)若$0\leqslant a<b$,则$f(x)$在$[a,b]$上单调递减,故$f(a)=2b$,$f(b)=2a$,

于是有$\begin{cases}-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}=2b,\\-\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}=2a,\end{cases}$解得$a=1$,$b=3$.

(2)若$a<0<b$,则$f(x)$在$[a,0]$上单调递增,在$[0,b]$上单调递减,

因此$f(x)$在$x=0$处取得最大值$2b$,在$x=a$或$x=b$处取得最小值$2a$,故$2b=\frac{13}{2}$,$b=\frac{13}{4}$.

由于$a<0$,又$f(b)=-\frac{1}{2}(\frac{13}{4})^2+\frac{13}{2}=\frac{39}{32}>0$,故$f(x)$在$x=a$处取得最小值$2a$,

即$-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}=2a$,

解得$a=-2-\sqrt{17}$.

(3)若$a<b\leqslant 0$,则$f(x)$在$[a,b]$上单调递增,故$f(a)=2a$,$f(b)=2b$,即$-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}=2a$,$-\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}=2b$.

由于方程$\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{13}{2}=0$的两根异号,故满足$a<b\leqslant 0$的实数$a$,$b$不存在.

综上,$a=1$,$b=3$或$a=-2-\sqrt{17}$,$b=\frac{13}{4}$.

1.2 (1)由$ax^2+bx=x$,即方程$ax^2+(b-1)x=0$有等根,知$b=1$.

由$f(x-3)=f(5-x)$,得函数$f(x)$的图像关于$x=1$对称,

$\therefore -\frac{b}{2a}=1$,解得$a=-\frac{1}{2}$,

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$.

(2) $\because f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，而 $f(x)\in[3m,3n]$，$\therefore 3n\leqslant\frac{1}{2}$，即 $n\leqslant\frac{1}{6}$.

而二次函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$ 图像的对称轴为 $x=1$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[m,n]$ 上必为增函数.

设存在 m,n 满足条件，则

$\begin{cases}f(m)=3m,\\f(n)=3n,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\frac{1}{2}m^2+m=3m,\\-\frac{1}{2}n^2+n=3n,\end{cases}$ 解得 $m=0$ 或 -4，$n=0$ 或 -4.

故 $m=-4$，$n=0$.

1.3 (1) 依题设知，$y=-x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调递减，因此，要使其在 $[a,b]$ 上是闭函数，则需满足

$$\begin{cases}-a^3=b,\\-b^3=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1,\\b=1,\end{cases}$$

$\therefore$ 闭函数 $y=-x^3$ 符合条件的区间是 $[-1,1]$.

(2) 由 $f'(x)=3(x+1)(x-3)=0\Rightarrow x=-1$ 或 3，所以 $f(x)$ 在 $[-1,3]$ 上单调递减.

设 $f(x)=x^3-3x^2-9x+4$ 在 $[a,b]$ $(\subseteq[-1,3])$ 上的值域为 $[a,b]$，由函数在 $[-1,3]$ 上单调递减可知，函数在 $[a,b]$ 也单调递减，所以，

$\begin{cases}a^3-3a^2-9a+4=b,\\b^3-3b^2-9b+4=a,\end{cases}$ 两式相减得 $a^2+ab+b^2-3(a+b)-8=0$，$(*)$

但是，$\because [a,b]\subseteq[-1,3]$，$\therefore -1\leqslant a<b\leqslant3$，而 $f(0)=4$，$f(1)=-7$，

$\therefore f(0)=4>3\geqslant b=f(a)$，$f(1)=-7<-1\leqslant a=f(b)$，

由 $f(x)$ 在 $[-1,3]$ 单调递减，得 $0<a<b<1$，

$\therefore a^2+ab+b^2<3$，$3(a+b)>0$，故 $(*)$ 式不成立.

故不存在区间 $[a,b]$ 使函数的值域也为 $[a,b]$，即 $f(x)=x^3-3x^2-9x+4$，$x\in[-1,3]$ 不是闭函数.

(3) 设函数 $y=x^2+k$ 在 $[a,b]$ $(\subseteq(0,+\infty))$ 上的值域为 $[a,b]$，由函数在 $(0,+\infty)$ 上单调递增可知，函数在 $[a,b]$ 上也单调递增，所以

$\begin{cases}a^2+k=a,\\b^2+k=b\end{cases}\Rightarrow a$、$b$ 是方程 $x^2-x+k=0$ 的两个正根.

令 $u(x)=x^2-x+k$，则由

$\begin{cases}\Delta=1-4k>0,\\u(0)=k>0\end{cases}\Rightarrow 0<k<\frac{1}{4}$，

∴ 满足题意的 k 的取值范围是 $(0,\frac{1}{4})$.

2.1 (1) 将数列 $\{a_n\}$ 的各项依次重新分组,记 $(1,3,\underbrace{3,3,\cdots,3}_{(2k-1)个3})$ 为第 k 组($k=1,2,3,\cdots$),则该组共有 $1+(2k-1)=2k$ 项. 所以前 k 组共有项数 $k(k+1)$.

故第 100 个 1 所在的项是前 99 组所有项的后一项,即为 $99\times(99+1)+1=9\ 901$ (项).

(2) $\because 44\times45=1\ 980<2\ 007<45\times46=2\ 070$, ∴ 第 2 007 项在第 45 组内,

∴ 前 2 007 项中共有 45 个 1,其余 1 962 个数均为 3, $\therefore S_{2\ 007}=45+3\times1\ 962=5\ 931$.

(3) ∵ 前 k 组所在全部项的和为 $S_{k(k+1)}=k+3\times[k(k+1)-k]=3k^2+k$,

$\therefore S_{25(25+1)}=3\times25^2+25=1\ 900$, $S_{26(26+1)}=3\times26^2+26=2\ 054$.

而 $2\ 054-2\ 007=47$ 不是 3 的倍数,

故不存在正整数 m,使得 $S_m=2\ 007$.

2.2 (1) 数表中前 i 行的个数和为 $1+2+3+\cdots+i=\frac{i(i+1)}{2}$,

$\because \frac{62\times63}{2}=1\ 953$,而 $\frac{63\times64}{2}=2\ 016$, $\therefore i=63$ 且 $a_{(63)(63)}=2\ 016$,

$\because a_{(63)j}=2\ 006$,第 i 行的数成公差为 1 的等差数列,

$\therefore j=63-(2\ 016-2\ 006)=53$.

(2) ∵ 第 n 行有 n 个数,且 $a_{nn}=\frac{n(n+1)}{2}=a_{n1}+(n-1)$,

$\therefore a_{n1}=\frac{n^2-n+2}{2}$, $\therefore b_n=\frac{n(a_{n1}+a_{nn})}{2}=\frac{n(n^2+1)}{2}$,

∴ 当 $n\geqslant2$ 时, $c_n=\frac{n}{b_n-n}=\frac{2}{n^2-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$,其前 n 项和,

$T_n=1+(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})=1+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{5}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

3.1 (1) 取 $x=1,y=4$,则 $f_1(1)+2f_1(4)=\log_2 1+2\log_2 4=4$,

$3f_1(\frac{1+2\times4}{3})=3\log_2 3=\log_2 27>\log_2 16=4$,

$\therefore f_1(x)+2f_1(y)<3f_1(\frac{x+2y}{3})$, $\therefore f_1(x)\notin A$.

任取 $x>0,y>0$,且 $x\neq y$,

则 $f_2(x)+2f_2(y)-3f_2(\frac{x+2y}{3})=(x+1)^2+2(y+1)^2-3(\frac{x+2y}{3}+1)^2$

$=\frac{2}{3}(x-y)^2>0$,

$\therefore f_2(x)+2f_2(y)>3f_2(\frac{x+2y}{3})$,即 $f_2(x)\in A$.

(2)设函数 $f(x)=(\frac{2}{3})^x+1, x\in(0,+\infty)$,满足值域为 $(1,2)$. 且 $f(1)=\frac{5}{3}>\frac{3}{2}$.

又任意取 $x>0, y>0$,且 $x\neq y$,则:

$f(x)+2f(y)=(\frac{2}{3})^x+1+2(\frac{2}{3})^y+2=(\frac{2}{3})^x+2(\frac{2}{3})^y+3=(\frac{2}{3})^x+(\frac{2}{3})^y+(\frac{2}{3})^y+3>3\sqrt[3]{(\frac{2}{3})^{x+2y}}+3=3f(\frac{x+2y}{3})$,

$\therefore f(x)\in A$.

3.2 (1) $x_1^3+x_2^3-2\times(\frac{x_1+x_2}{2})^3=\frac{1}{4}(4x_1^3+4x_2^3-x_1^3-x_2^3-3x_1^2x_2-3x_2^2x_1)$

$=\frac{3}{4}(x_1^2-x_2^2)(x_1-x_2)=\frac{3}{4}(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2$,

$\because x_1, x_2\in(0,m)$, $\therefore \frac{3}{4}(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2\geqslant 0$, $\therefore x_1^3+x_2^3\geqslant 2\times(\frac{x_1+x_2}{2})^3$,

即 $2x_1^3+2x_2^3\geqslant 2\times 2(\frac{x_1+x_2}{2})^3$.

同理 $(m-x_1)^3+(m-x_2)^3\geqslant 2\times[\frac{(m-x_1)+(m-x_2)}{2}]^3=2\times(m-\frac{x_1+x_2}{2})^3$,

$\therefore f(x_1)+f(x_2)\geqslant 2f(\frac{x_1+x_2}{2})$.

(2)由(1)知 $a_1+a_3\geqslant 2a_2, a_2+a_4\geqslant 2a_3, a_3+a_5\geqslant 2a_4, \cdots, a_{m-3}+a_{m-1}\geqslant 2a_{m-2}$,
以上各式左右两边相加得 $a_1+a_{m-1}\geqslant a_2+a_{m-2}$.

(3)以 $f(a), f(b), f(c)$ 的值为边长的三条线段可以构成三角形.

$\because f'(x)=6x^2-3(m-x)^2=3x^2+6mx-3m^2$,

$\therefore$ 当 $x\in[\frac{m}{2},\frac{2}{3}m]$ 时, $f'(x)>0$,即 $f(x)$ 在 $[\frac{m}{2},\frac{2}{3}m]$ 上是增函数,

$\therefore \frac{3}{8}m^3=f(\frac{m}{2})\leqslant f(x)\leqslant f(\frac{2}{3}m)=\frac{17}{27}m^3$.

不妨设 $\frac{3}{8}m^3\leqslant f(a)\leqslant f(b)\leqslant f(c)\leqslant\frac{17}{27}m^3$,则 $f(a)+f(b)\geqslant 2\times\frac{3}{8}m^3=\frac{3}{4}m^3>\frac{17}{27}m^3\geqslant f(c)$,故以 $f(a), f(b), f(c)$ 的值为边长的三条线段可以构成三角形.

3.3 (1)设 $g(x)=\frac{2f(\theta)+f(x)}{3}-f(\frac{2\theta+x}{3})$,则 $g(x)=\sin\frac{2\theta+x}{3}-\frac{2\sin\theta+\sin x}{3}$.

$g'(x)=\frac{1}{3}\cos\frac{2\theta+x}{3}-\frac{1}{3}\cos x$.

$\because x\in(0,\pi),\theta\in(0,\pi),\therefore \frac{2\theta+x}{3}\in(0,\pi)$,

由 $g'(x)=0$,得 $x=\theta$,

$\therefore$ 当 $x\in(0,\theta)$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 是减函数;当 $x\in(\theta,\pi)$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 是增函数,

$\therefore g(\theta)$ 是函数 $g(x)$ 的最小值.

故当 $x\in(0,\pi)$ 时,$g(x)\geqslant g(\theta)=0$,即 $\frac{2f(\theta)+f(x)}{3}\geqslant f(\frac{2\theta+x}{3})$.

(2)在题设条件下,当 k 为偶数时,$\frac{2f(\theta)+f(x)}{3}\geqslant f(\frac{2\theta+x}{3})$;当 k 为奇数时,

$\frac{2f(\theta)+f(x)}{3}\leqslant f(\frac{2\theta+x}{3})$.

4.1 $\alpha+\beta=\frac{a}{2},\alpha\beta=-1$.

(1)$f(\alpha)+f(\beta)=\frac{4\alpha-a}{\alpha^2+1}+\frac{4\beta-a}{\beta^2+1}=\frac{4(\alpha\beta+1)(\alpha+\beta)-a[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2]}{(\alpha+\beta)^2+(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta+1}=$

$\frac{-a(\frac{a^2}{4}+4)}{\frac{a^2}{4}+4}=-a$.

(2)设 $\alpha\leqslant x_1<x_2\leqslant\beta$,则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{4+a(x_1+x_2)-4x_1x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}\cdot(x_1-x_2)$,

$4+a(x_1+x_2)-4x_1x_2=-4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)(x_1+x_2)-4x_1x_2=2[(x_1-\beta)(\alpha-x_2)+(x_1-\alpha)(\beta-x_2)]>0$,

又 $x_1-x_2<0$,$\therefore f(x_1)<f(x_2)$,即 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上是增函数.

(3)由(2)知,$f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的最小值是 $f(\alpha)$,最大值是 $f(\beta)$. 则

$f(\beta)-f(\alpha)=\frac{4+a(\alpha+\beta)-4\alpha\beta}{(\alpha^2+1)(\beta^2+1)}(\beta-\alpha)=\frac{4+\frac{a^2}{2}+4}{4+\frac{a^2}{4}}\sqrt{(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta}=$

$2\sqrt{\frac{a^2}{4}+4}=\sqrt{a^2+16}\geqslant 4$,

所以,当且仅当 $a=0$ 时,$f(\beta)-f(\alpha)$ 取得最小值 4.

4.2 (1)$\because x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$,$\therefore$ 由抛物线 $y=2x^2-tx-2$ 的开口向上可知 $f(x_1)\leqslant 0$ 且 $f(x_2)\leqslant 0$,

即 $2x_1^2-tx_1-2\leqslant 0$，$2x_2^2-tx_2-2\leqslant 0$，

两式相加得 $2(x_1^2+x_2^2)-t(x_1+x_2)-4\leqslant 0$，

故由平均值不等式可得 $4x_1x_2-t(x_1+x_2)-4<0$.

(2) 依题意，$\alpha=\dfrac{t-\sqrt{t^2+16}}{4}$，$\beta=\dfrac{t+\sqrt{t^2+16}}{4}$，$\therefore f(\alpha)=\dfrac{-8}{\sqrt{t^2+16}-t}$，$f(\beta)=\dfrac{8}{\sqrt{t^2+16}+t}$，

由 $\sqrt{t^2+16}\geqslant|t|$，知 $f(\beta)>0>f(\alpha)$.

另一方面，设 $\alpha\leqslant x_1<x_2\leqslant\beta$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{4+t(x_1+x_2)-4x_1x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}(x_1-x_2)$，

由(1)的结论可知 $f(x_1)<f(x_2)$，从而 $f(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是增函数，

$\therefore g(t)=f_{\max}-f_{\min}=f(\beta)-f(\alpha)=\dfrac{8}{\sqrt{t^2+16}+t}-\dfrac{-8}{\sqrt{t^2+16}-t}=\sqrt{t^2+16}\geqslant 4$，等号在 $t=0$ 时取得.

(3) $\because \dfrac{x_1\alpha+x_2\beta}{x_1+x_2}-\alpha=\dfrac{x_2(\beta-\alpha)}{x_1+x_2}>0$，$\dfrac{x_1\alpha+x_2\beta}{x_1+x_2}-\beta=\dfrac{x_1(\alpha-\beta)}{x_1+x_2}<0$，$\therefore \alpha<\dfrac{x_1\alpha+x_2\beta}{x_1+x_2}<\beta$，

同理：$\alpha<\dfrac{x_1\beta+x_2\alpha}{x_1+x_2}<\beta$，

$\therefore f(\alpha)<f\left(\dfrac{x_1\alpha+x_2\beta}{x_1+x_2}\right)<f(\beta)$，$f(\alpha)<f\left(\dfrac{x_1\beta+x_2\alpha}{x_1+x_2}\right)<f(\beta)$，

$\therefore \left|f\left(\dfrac{x_1\alpha+x_2\beta}{x_1+x_2}\right)-f\left(\dfrac{x_1\beta+x_2\alpha}{x_1+x_2}\right)\right|<f(\beta)-f(\alpha)$.

而由(2)知，$f(\alpha)=-2\beta$，$f(\beta)=-2\alpha$，

$\therefore \left|f\left(\dfrac{x_1\alpha+x_2\beta}{x_1+x_2}\right)-f\left(\dfrac{x_1\beta+x_2\alpha}{x_1+x_2}\right)\right|<2|\alpha-\beta|$.

高考大预测

本套试卷的内容包括：集合与简易逻辑、函数、数列与导数，其中集合与简易逻辑占31分、函数占47分、数列占44分、导数占28分. 第1题、第2题、第3题、第6题、第9题、第13题、第14题、第15题等主要考查基本知识和基本运算，考查数形结合思想方法的有第5题、第7题、第10题等，等价转化思想方法的有第4题、第11题等，分类讨论思想方法的有第19题、第20题、第21题等；大部分都涉及函数与方程的思想运用，如第8题、第9题、第12题、第22题等. 在能力要求上，第9题给出新定义（区间长度），第17题给出具备指定性质的函数集合，考查学生的阅读理解能力；第16题、第21题考查学生的类比推理能力与似真推理能力等. 试题整体难度较大，难度系数在0.4～0.5之间.

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 $M=\{y\mid y=x^2\}$，$N=\{y\mid x^2+y^2=2\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{(1,1),(-1,1)\}$　　B. $\{1\}$　　C. $[0,1]$　　D. $[0,\sqrt{2}]$

2. 设 $f(x)=x^2-4x\ (x\in\mathbf{R})$，则 $f(x)>0$ 的充分不必要条件是

A. $x\neq 0$　　B. $x<0$ 或 $x>4$　　C. $|x-1|>1$　　D. $|x-2|>3$

3. 设实数 x,y 满足 $x+y=4$，则 $\sqrt{x^2+y^2-2x+2y+2}$ 的最小值为

A. $\sqrt{2}$　　B. 4　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 8

4. 如果数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_2=1$ 且 $\dfrac{a_na_{n-1}}{a_{n-1}-a_n}=\dfrac{a_na_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}$，则此数列的第10项为

A. $\dfrac{1}{2^{10}}$　　B. $\dfrac{1}{2^9}$　　C. $\dfrac{1}{10}$　　D. $\dfrac{1}{5}$

5. 函数 $y=f(x+1)$ 的图像如图6－1－1所示，它在 $\mathbf{R}$ 上是单调递减，则不等式 $f(x)<1$ 的解集是

A. $x>0$　　B. $x>1$

C. $x>2$　　D. $x>3$

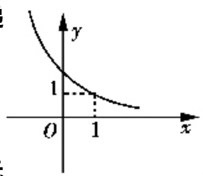


图6－1－1

6. 已知集合 $A=\{x\mid x=3^n-2^n, n\in\mathbf{N}^*$，且 $x\leqslant 100\}$，则集合 A 的元素个数为

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 21

警世物语

人生短短几十年，不要给自己留下了什么遗憾，想笑就笑，想哭就哭，该爱的时候就去爱，无谓压抑自己。

7. 设函数$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，则$f'(x)=0$有

A. 分别位于区间(1,2)、(2,3)、(3,4)内的三个根

B. 四个根$x_i(i=1,2,3,4)$

C. 分别位于区间(0,1)、(1,2)、(2,3)、(3,4)内的四个根

D. 分别位于区间(0,1)、(1,2)、(2,3)内的三个根

8. 已知数列$\{a_n\}$的通项$a_n=(\frac{2}{3})^{n-1}[(\frac{2}{3})^{n-1}-1]$，则下列表述正确的是

A. 最大项为a_1，最小项为a_3　　B. 最大项为a_1，最小项不存在

C. 最大项不存在，最小项为a_3　　D. 最大项为a_1，最小项为a_4

9. 若$n-m$表示$[m,n]$$(m<n)$的区间长度. 函数$f(x)=\sqrt{a-x}+\sqrt{x}(a>0)$的值域区间长度为$2(\sqrt{2}-1)$，则实数$a$的值为

A. 4　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

10. 已知$f(x)$是定义在R上的奇函数，其图像关于$x=1$对称且$f(\frac{1}{2})=0$，则方程$f(x)=0$在$(0,5)$内解的个数的最小值是

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

11. 定义在R上的函数$f(x)$，满足$f(x+y)=f(x)+f(y)(x,y\in\mathbf{R})$，且$f(1)=2$，那么在下面四个式子①$f(1)+2f(1)+\cdots+nf(1)$；②$f[\frac{n(n+1)}{2}]$；③$n(n+1)$；④$n(n+1)f(1)$中与$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$相等的是

A. ①③　　B. ①②　　C. ①②③④　　D. ①②③

12. 已知$f(x)=x^3-3x^2+2, x\in(0,2)$的反函数为$f^{-1}(x)$，则

A. $f^{-1}(\frac{1}{2})<f^{-1}(\frac{3}{2})$　　B. $f^{-1}(\frac{1}{2})>f^{-1}(\frac{3}{2})$

C. $f^{-1}(\frac{3}{2})<f^{-1}(\frac{5}{2})$　　D. $f^{-1}(\frac{3}{2})>f^{-1}(\frac{5}{2})$

第Ⅱ卷（非选择题　共90分）

二、填空题：本大题共4小题，每小题4分. 把答案填在题中的横线上.

13. 已知$f(x)=\begin{cases}2-x, x\leqslant 0,\\ \log_2 x, x>0\end{cases}$，则$f[f(-2)]=$______.

14. 已知集合$A=\{x|x^2-x-2\leqslant 0, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x||x-2|\leqslant 1, x\in\mathbf{R}\}$，全集$U=A\cup B$，则$\complement_U(A\cap B)=$______.

15. 若$f(x)=2x^3-6x^2+m$（m为常数）在$[-2,2]$上有最大值3，则此函数在$[-2,2]$上的最小值为______.

16. 在公比为 4 的等比数列 $\{b_n\}$ 中，若 T_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项积，则有 $\frac{T_{20}}{T_{10}},\frac{T_{30}}{T_{20}},\frac{T_{40}}{T_{30}}$ 也成等比数列且公比为 4^{100} 类比上述结论，相应地在公差为 3 的等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则数列______也成等差数列，且公差为______.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）集合 A 是由适合以下性质的函数 $f(x)$ 组成的 对任意的 $x\geqslant 0$，$f(x)\in[-2,4)$ 且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

（1）判断函数 $f_1(x)=\sqrt{x}-2$ 及 $f_2(x)=4-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x(x\geqslant 0)$ 是否在集合 A 中，试说明理由；

（2）对（1）中你认为是集合 A 中的函数 $f(x)$，不等式 $f(x)+f(x+2)<2f(x+1)$ 是否对于任意的 $x\geqslant 0$ 总成立？证明你的结论.

18.（本小题满分 12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，其中 $a_1\neq 0$，S_n 是其前 n 项和，且 S_3，S_9，S_6 成等差数列.

（1）求证 a_2，a_8，a_5 也成等差数列；

（2）判断以 a_2，a_8，a_5 为前三项的等差数列的第四项是否也是数列 $\{a_n\}$ 中的一项，若是，求出这一项 若不是，请说明理由.

19.（本小题满分 12 分）已知函数 $f(x)=\lg\frac{kx-1}{x-1}$，$(k\in\mathbf{R}$ 且 $k>0)$.

（1）求函数 $f(x)$ 的定义域；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $[10,+\infty)$ 上单调递增，求 k 的取值范围.

20.（本小题满分 12 分）关于某港口今后 20 年的发展规划，有如下两种方案：

方案甲 按现状进行运营. 据测算，每年可收入 760 万元，但由于港口淤积日益严重，从明年开始需投资进行清淤，第一年投资 50 万元，以后逐年递增 20 万元.

方案乙 从明年起开始投资 6 000 万元进行港口改造，以彻底根治港口淤积并提高吞吐能力. 港口改造需用时 4 年，在此期间边改造边运营. 据测算，开始改造后港口第一年的收入为 320 万元，在以后的 4 年中，每年收入都比上一年增长 50%，而后各年的收入都稳定在第 5 年的水平上.

（1）从明年开始至少经过多少年，方案乙能收回投资（累计总收益为正数）；

（2）从明年开始至少经过多少年，方案乙的累计总收益超过方案甲？

（收益 = 收入 − 投资）

21.（本小题满分 14 分）设函数 $f_n(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）试确定 $f_3(x)$ 和 $f_4(x)$ 的单调区间及相应区间上的单调性；

（2）说明方程 $f_4(x)=0$ 是否有解；

(3)对于自然数 n,试给出关于 x 的方程 $f_n(x)=0$ 无解的一个一般性结论,并加以证明.

22.(本小题满分 12 分)已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{4^x+2}(x\in\mathbf{R})$.

(1)试证函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4})$ 对称;

(2)若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=f(\dfrac{n}{m})(m\in\mathbf{N}^*,n=1,2,\cdots,m)$,求数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项和 S_m;

(3)设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=\dfrac{1}{3}$,$b_{n+1}=b_n^2+b_n$. 设 $T_n=\dfrac{1}{b_1+1}+\dfrac{1}{b_2+1}+\cdots+\dfrac{1}{b_n+1}$. 若(2)中的 S_m 满足对任意不小于 2 的正整数 n,$S_m<T_n$ 恒成立,试求 m 的最大值.

参考答案

1. D $\because M=\{y|y\geqslant 0\}$,$N=\{y|-\sqrt{2}\leqslant y\leqslant\sqrt{2}\}$,$\therefore M\cap N=[0,\sqrt{2}]$. 故选 D.

2. D 由 $f(x)>0$ 得 $x<0$ 或 $x>4$. 而 $|x-1|>1$ 的解集为 $\{x|x>2$ 或 $x<0\}$,$|x-2|>3$ 的解集为 $\{x|x>5$ 或 $x<-1\}$. 故选 D.

3. C $\sqrt{x^2+y^2-2x+2y+2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$ 的几何意义为直线 $x+y=4$ 上的点 $P(x,y)$ 到 $(1,-1)$ 的距离,显然它的最小值为 $\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

4. D $\because \dfrac{a_na_{n-1}}{a_{n-1}-a_n}=\dfrac{a_na_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}$,$\therefore \dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$,即数列 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ 是等差数列,$\therefore \dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1}+(n-1)\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}n$,故 $a_n=\dfrac{2}{n}$,$a_{10}=\dfrac{1}{5}$. 故选 D.

5. C 将 $y=f(x+1)$ 的图像向右平移 1 个单位,即得到 $y=f(x)$ 的图像,$\therefore f(x)<1$ 的解集为 $\{x|x>2\}$. 故选 C.

6. A $n=1$ 时,$x=3^1-2^1=1\in A$,$n=2$ 时,$x=3^2-2^2=5\in A$;$n=3$ 时,$x=3^3-2^3=19\in A$;$n=4$ 时,$x=3^4-2^4=65\in A$;$n=5$ 时,$x=3^5-2^5=211>100$,$\therefore x\notin A$,故集合 A 中只有 4 个元素.

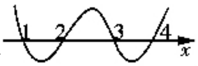


图 6-1-2

7. A $\because$ 方程 $f(x)=0$ 的根为 $x=1,2,3,4$,如图 6-1-2,$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 有三个极值点,且极值分别位于 $(1,2)$、$(2,3)$、$(3,4)$ 之间,故方程 $f'(x)=0$ 有三个根,且分别在 $(1,2)$、$(2,3)$、$(3,4)$ 之间. 故选 A.

8. A 令 $x=(\dfrac{2}{3})^{n-1}$,则 $a_n=x(x-1)$,且 $0<x\leqslant 1$. 由二次函数的性质,可得当 $x=1$,即 $n=1$ 时,a_n 最大;当 $x=\dfrac{4}{9}$,即 $n=3$ 时,a_n 有最小值. 故选 A.

9. A 函数 $f(x)=\sqrt{a-x}+\sqrt{x}(a>0)$ 的定义域为 $[0,a]$. 设 $x=a\sin^2\alpha$,$\alpha\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$.

高考大预测

则 $f(x)=\sqrt{a}\cos\alpha+\sqrt{a}\sin\alpha=\sqrt{2a}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\in[\sqrt{a},\sqrt{2a}]$. 由 $\sqrt{2a}-\sqrt{a}=2(\sqrt{2}-1)$，解得 $a=4$. 故选 A.

10. B $\because f(x)$ 是奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$；又 $\because f(x)$ 的图像关于 $x=1$ 对称，$\therefore f(1+x)=f(1-x)$，故 $f(x+2)=-f(x)$. 而 $f(\frac{1}{2})=0$，$\therefore f(\frac{3}{2})=f(\frac{5}{2})=f(\frac{7}{2})=f(\frac{9}{2})=0$. 故选 B.

11. D 令 $y=1$，得 $f(x+1)=f(x)+f(1)$，即 $f(x+1)=f(x)+2$，$\therefore f(n)=f(1)+(n-1)\times 2=2n$，$\therefore f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=n(n+1)$. 故选 D.

12. B $\because f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,2)$ 上是减函数，且 $f(x)\in(-2,2)$，故 $f^{-1}(\frac{1}{2})>f^{-1}(\frac{3}{2})$. 故选 B.

13. 2 $f[f(-2)]=f(4)=\log_2 4=2$.

14. $[-1,1)\cup(2,3]$ 由于 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$，所以 $U=A\cup B=[-1,3]$，而 $A\cap B=[1,2]$，所以 $\complement_U(A\cap B)=[-1,1)\cup(2,3]$.

15. -37 由 $f'(x)=6x^2-12x=0$，得 $x=0$ 或 2，且 $x\in(-2,0)$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 递增；当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 递减，$\therefore$ 当 $x\in[-2,2]$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $f(0)=m=3$，而此时，$f(-2)=-37$，$f(2)=-5$，$\therefore f(x)$ 的最小值为 -37.

16. $S_{20}-S_{10}$，$S_{30}-S_{20}$，$S_{40}-S_{30}$；300 $\because S_{30}-S_{20}-(S_{20}-S_{10})=(a_{30}-a_{20})+(a_{29}-a_{19})+\cdots+(a_{21}-a_{11})=(a_{40}-a_{30})+(a_{39}-a_{29})+\cdots+(a_{31}-a_{21})=S_{40}-S_{30}-(S_{30}-S_{20})=10\times 10\times 3=300$，$\therefore$ 公差为 300.

17. (1) 对于 $f_1(x)=\sqrt{x}-2$，当 $x=49$ 时，$f_1(49)=5>4$，不满足 $f(x)$ 的条件.

对于 $f_2(x)=4-6\cdot(\frac{1}{2})^x(x\geqslant 0)$，

当 $x\geqslant 0$ 时，$0<(\frac{1}{2})^x\leqslant 1$，$-2\leqslant 4-6\cdot(\frac{1}{2})^x<4$，即 $f_2(x)\in[-2,4)$.

又设 $0\leqslant x_1<x_2$，则 $(\frac{1}{2})^{x_1}>(\frac{1}{2})^{x_2}$，$\therefore -6\cdot(\frac{1}{2})^{x_1}<-6\cdot(\frac{1}{2})^{x_2}$，

$\therefore f_2(x_1)<f_2(x_2)$，即 $f_2(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，从而 $f_2(x)$ 在集合 A 中.

(2) 由 (1) 知，$f(x)=4-6\cdot(\frac{1}{2})^x(x\geqslant 0)$，

$\therefore f(x)+f(x+2)-2f(x+1)=6\cdot(\frac{1}{2})^x\cdot(-\frac{1}{4})<0$，

即 $f(x)+f(x+2)<2f(x+1)$ 对 $x\geqslant 0$ 总能成立.

18. (1) 当 $q=1$ 时，$S_3=3a_1$，$S_9=9a_1$，$S_6=6a_1$，而 $a_1\neq 0$，所以 S_3，S_9，S_6 不可能成等

差数列，

所以 $q\neq 1$，则由公式 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，得 $2\dfrac{a_1(1-q^9)}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}$，

即 $2q^6=1+q^3$，$\therefore 2q^6a_1q=a_1q+q^3a_1q$，$\therefore 2a_8=a_2+a_5$，$\therefore a_2$，$a_8$，$a_5$ 成等差数列.

(2)由 $2q^6=1+q^3$ 得 $q^3=-\dfrac{1}{2}$，

要以 a_2，a_8，a_5 为前三项的等差数列的第四项是数列 $\{a_n\}$ 中的第 k 项，必有 $a_k-a_5=a_8-a_2$，所以 $\dfrac{a_k}{a_2}-q^3=q^6-1$，所以 $\dfrac{a_k}{a_2}=-\dfrac{5}{4}$，所以 $q^{k-2}=-\dfrac{5}{4}$，所以 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{k-2}{3}}=-\dfrac{5}{4}$，

因为 k 是整数，所以 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{k-2}{3}}=-\dfrac{5}{4}$ 不可能成立，所以 a_2，a_8，a_5 为前三项的等差数列的第四项不可能也是数列 $\{a_n\}$ 中的一项.

19.(1)由 $\dfrac{kx-1}{x-1}>0$ 及 $k>0$ 得 $\dfrac{x-\frac{1}{k}}{x-1}>0$，

①当 $0<k<1$ 时，得 $x<1$ 或 $x>\dfrac{1}{k}$；

②当 $k=1$ 时，得 $\dfrac{x-1}{x-1}>0$，$\therefore x\neq 1$ 且 $x\in\mathbf{R}$；

③当 $k>1$ 时，得 $x<\dfrac{1}{k}$ 或 $x>1$，

综上，当 $0<k<1$ 时，函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup\left(\dfrac{1}{k},+\infty\right)$；

当 $k\geqslant 1$ 时，函数的定义域为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{k}\right)\cup(1,+\infty)$.

(2)由 $f(x)$ 在 $[10,+\infty)$ 上是增函数，$\therefore \dfrac{10k-1}{10-1}>0$，解得 $k>\dfrac{1}{10}$.

又 $f(x)=\lg\dfrac{kx-1}{x-1}=\lg\left(k+\dfrac{k-1}{x-1}\right)$，故对任意的 x_1，x_2，

当 $10\leqslant x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，

即 $\lg\left(k+\dfrac{k-1}{x_1-1}\right)<\lg\left(k+\dfrac{k-1}{x_2-1}\right)$，得 $\dfrac{k-1}{x_1-1}<\dfrac{k-1}{x_2-1}$，

又 $\because \dfrac{1}{x_1-1}>\dfrac{1}{x_2-1}$，$\therefore k-1<0$，即 $k<1$.

综上可知 k 的取值是 $\left(\dfrac{1}{10},1\right)$.

20. (1)设从明年开始经过第 n 年,方案乙的累计总收益为正数. 在方案乙中,前 4 年的总收入为

$$\frac{320\times(1-1.5^4)}{1-1.5}=2\ 600<6\ 000,$$

故 n 必定不小于 5,则由

$2\ 600+320\times1.5^4(n-4)>6\ 000$,

解得 $n>6\frac{8}{81}$,故 n 的最小值为 7,

∴ 从明年开始至少经过 7 年,方案乙能收回投资.

(2)设从明年开始经过 n 年方案甲与方案乙的累计总收益分别为 y_1,y_2 万元,则

$$y_1=760n-[50n+\frac{1}{2}n(n-1)\cdot20]=-10n^2+720n,$$

当 $n\leqslant4$ 时,则 $y_1>0$,$y_2<0$,可得 $y_1>y_2$;

当 $n\geqslant5$ 时,$y_2=2\ 600+320\times1.5^4(n-4)-6\ 000=1\ 620n-9\ 880$,

令 $y_1<y_2$,可得 $1\ 620n-9\ 880>-10n^2+720n$,

即 $n(n+90)>998$,

由 $10(10+90)>998$,$9(9+90)<998$,可得 n 的最小值为 10.

∴ 从明年开始至少经过 10 年,方案乙的累计总收益超过方案甲.

21. (1)$f_3(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$,$f_3'(x)=-1+x-x^2=-(x^2-x+1)<0$,

∴ $y=f_3(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

$$f_4(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4},\ f'_4(x)=-1+x-x^2+x^3=(x-1)(x^2+1),$$

在 $(-\infty,1)$ 上 $f'_4(x)<0$,在 $(1,+\infty)$ 上 $f'_4(x)>0$,

∴ 在 $(-\infty,1)$ 上 $f_4(x)$ 为减函数,在 $(1,+\infty)$ 上 $f_4(x)$ 为增函数.

(2)由(1)知,当 $x=1$ 时 $f_4(x)$ 有最小值,

$$\because [f_4(x)]_{\min}=f_4(1)=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}>0,$$

∴ $f_4(x)=0$ 无解.

(3)猜想:当 n 为偶数时,$f_n(x)=0$ 无解.

①当 n 为偶数时,函数 $f_n(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上是减函数,在 $(1,+\infty)$ 上是增函数. 设 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$,此时,$[f_n(x)]_{\min}=f_n(1)=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^{2k}\frac{1}{2k}=$

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2k-2}-\frac{1}{2k-1})+\frac{1}{2k}>\frac{1}{2k}>0,$$

故当 n 为偶数时,方程 $f_n(x)=0$ 无解;

②当 n 为奇数时,导数 $f'_n(x)<0$ 恒成立,函数 $f_n(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$,此时,

$f_n(1)=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2k-2}-\frac{1}{2k-1})>0$,

$f_n(n)=(1-n)+n^2(\frac{1}{2}-\frac{n}{3})+\cdots+n^{n-1}(\frac{1}{n-1}-\frac{n}{n})<0$,

故当 n 为奇数时,方程 $f_n(x)=0$ 有惟一解,

综上所述,当 n 为偶数时,方程无解.

22. (1)设点 $P_0(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x)$ 的图像上任意一点,其关于点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ 的对称点为 $P(x,y)$.

由 $\begin{cases}\frac{x+x_0}{2}=\frac{1}{2},\\ \frac{y+y_0}{2}=\frac{1}{4}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1-x_0,\\ y=\frac{1}{2}-y_0,\end{cases}$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(1-x_0,\frac{1}{2}-y_0)$.

由点 $P_0(x_0,y_0)$ 在函数 $f(x)$ 的图像上,得 $y_0=\frac{1}{4^{x_0}+2}$.

$\because f(1-x_0)=\frac{1}{4^{1-x_0}+2}=\frac{4^{x_0}}{4+2\cdot 4^{x_0}}=\frac{4^{x_0}}{2(2+4^{x_0})}$, $\frac{1}{2}-y_0=\frac{1}{2}-\frac{1}{4^{x_0}+2}$

$=\frac{4^{x_0}}{2(2+4^{x_0})}$,

$\therefore$ 点 $P(1-x_0,\frac{1}{2}-y_0)$ 在函数 $f(x)$ 的图像上,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ 对称.

(2)由(1)可知,$f(x)+f(1-x)=\frac{1}{2}$,$\therefore f(\frac{k}{m})+f(1-\frac{k}{m})=\frac{1}{2}\ (1\leqslant k\leqslant m-1)$,

即 $f(\frac{k}{m})+f(\frac{m-k}{m})=\frac{1}{2}$,$\therefore a_k+a_{m-k}=\frac{1}{2}$.

由 $S_m=a_1+a_2+\cdots+a_{m-1}+a_m$,又 $S_m=a_{m-1}+a_{m-2}+a_{m-3}+\cdots+a_2+a_1+a_m$,

两式相加得 $2S_m=(m-1)\times\frac{1}{2}+2a_m=\frac{m-1}{2}+2\times\frac{1}{6}=\frac{m}{2}-\frac{1}{6}$,

$\therefore S_m=\frac{1}{12}(3m-1)$.

(3)$\because b_1=\frac{1}{3}$,$b_{n+1}=b_n^2+b_n=b_n(b_n+1)>0$,

$\therefore \frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_n(b_n+1)}=\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_n+1}$，即$\frac{1}{b_n+1}=\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}$，

$\therefore T_n=(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2})+(\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_3})+\cdots+(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})=\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}}=3-\frac{1}{b_{n+1}}$.

$\because b_{n+1}-b_n=b_n^2>0$，$\therefore b_{n+1}>b_n$，$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是单调递增数列，

$\therefore T_n$ 关于 n 递增. 当 $n\geqslant 2$，且 $n\in \mathbf{N}^*$ 时，$T_n\geqslant T_2$.

$\because b_1=\frac{1}{3}$，$b_2=\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)=\frac{4}{9}$，$b_3=\frac{4}{9}(\frac{4}{9}+1)=\frac{52}{81}$，$\therefore T_n\geqslant T_2=3-\frac{1}{b_3}=\frac{75}{52}$，

$\therefore S_m<\frac{75}{52}$，即$\frac{1}{12}(3m-1)<\frac{75}{52}$，$\therefore m<\frac{238}{39}=6\frac{4}{39}$，

$\therefore m$ 的最大值为 6.