2012 年张宇考研数学
高等数学（下）强化班内部讲义

先修课程（高等数学复习导学班）视频地址：新浪微博——宇哥考研：weibo.com/zhangyumaths

【本讲义参考文献】

《考研数学高等数学 18 讲》，张宇 编著．中国书籍出版社

《考研数学题源探析经典 1000 题》，张宇 编著．北京理工大学出版社

第 9 讲　多元函数微分学

从本讲开始进入多元函数的体系，本讲内容是考研绝对的重点，一般会在每年的考试中出至少一个小题（4 分）和一个大题（10 分左右），有时结合其他知识出综合题.本讲我们只讲多元函数微分学的公共考点，有三个，分别为：1）五个基本概念；2）多元函数微分法；3）多元函数的极值与最值问题。

第一节　多元微分学的五个基本概念

1、极限存在性

定义　设二元函数 $f(x,y)$定义在区域 D 上,点 $P_0(x_0,y_0)$在 D 内或者在 D 的边界上，如果存在常数 A, 对于任给的正数ε，总存在正数 δ, 只要点 $P(x,y)\in D$ 满足 $0<\left|PP_0\right|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$，恒有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立, 则称 A 为函数 $f(x,y)$当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的极限, 记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$.这极限也称为二重极限.

这里有两点说明.

第一，二元函数的极限怎么计算？在考研中这个要求不高.举个例子.

【例 1】设 $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

【解】因为 $0\le|f(x,y)|=\left|\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right|\le\sqrt{x^2+y^2}\to 0$，由夹逼准则，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

第二，所谓二元函数的极限（二重极限）存在，是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P(x_0,y_0)$ 时，相应的极限值都为同一个常数 A（你是否还记得，在一元函数的极限计算中我们就反复强调：“极限若存在，必唯一”）．故，如果 $P(x,y)$ 以不同方式趋于 $P(x_0,y_0)$ 时，函数趋于不同的值，则可以判定该函数在 (x_0,y_0) 点的极限值不存在．在考研中这个要求也不高.再举个例子.

【例 2】设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，试证极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

【证】这个证明过程比较经典,请记住.当 $P(x,y)$ 沿着直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时，有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$，结果随 k 的变化而变化，故二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

2．连续性

如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续.

注意，验证二元函数 $f(x,y)$在某一点(x_0,y_0)是否连续是考研的重点，但是如果不连续，对于多元函数是不讨论间断点的分类的.

3．偏导数存在性（重要！重要！）

定义　设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义, 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限为函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对 x 的偏导数, 记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.z_x{}'\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \text{或}\ f_x{}'(x_0,y_0).$$

于是，$f_x{}'(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$

$$f_y{}'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

高阶偏导数 如果函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内的偏导数 $f_x{}'(x,y)$、$f_y{}'(x,y)$ 仍具有偏导数, 则它们的偏导数称为函数 $z=f(x,y)$的二阶偏导数. 按照对变量求导次序的不同有如下四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y).$$

其中 $f''_{xy}(x,y)$、$f''_{yx}(x,y)$ 称为二阶混合偏导数.同样可得三阶、四阶、以及 n 阶偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

4. 可微

定义 如果函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\qquad (\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\ ),$$

其中 A、B 不依赖于 Δx、Δy 而仅与 x、y 有关, 则称函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)可微, 而称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)的全微分, 记作 dz, 即 $dz=A\Delta x+B\Delta y$.

在第三讲中，我们已经详细阐述了一元函数可微的深刻涵义，二元函数的可微概念也是如此（请注意对比，加深理解）.

（1）写出全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$；

（2）写出线性增量 $A\Delta x+B\Delta y$，其中 $A=f_x{}'(x_0,y_0),B=f_y{}'(x_0,y_0)$；

（3）作极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

若该极限等于 0，则 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，否则，就不可微.

用形式简单的"线性增量 $A\Delta x+B\Delta y$ "去代替形式复杂的"全增量 Δz ",且其误差" $\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)$ "是 $o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$，这就是说，用简单的代替了复杂的，且产生的误差可以忽略不计，这就是可微的真正涵义。

5. 偏导数的连续性

对于 $z=f(x,y)$，讨论其在某特殊点 (x_0,y_0)（比如二元分段函数的分段点）处偏导数是否连续，是考研的重点，其步骤为：

（1）用定义法求 $f_x'(x_0,y_0)$

（2）用公式法求 $f_x'(x,y)$

（3）计算 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f_x'(x,y)$，看 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f_x'(x,y)=f_x'(x_0,y_0)$ 是否成立，若成立，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数是连续的.

第二节　多元函数微分法

（1）链式求导规则

（2）无论 z 对谁求导，也无论 z 已经求了几阶导，求导后的新函数仍然具有与原函数完全相同的复合结构；

（3）注意书写规范.

【例】设 $z=f(e^x\sin y, x^2+y^2)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

第三节　多元函数的极值与最值问题的理论

本部分是这几年的重要考点，几乎都是大题，分值很高，请大家关注.

1、极值与最值的概念

极值定义　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，如果对于该邻域内任何异于 (x_0,y_0) 的点 (x,y)，都有

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0)\ \ (\text{或 } f(x,y)\ge f(x_0,y_0)),$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极大值(或极小值) $f(x_0,y_0)$，极大值、极小值统称为极值. 使函数取得极值的点称为极值点.

最值定义　设函数 $z=f(x,y)$ 在某区域 D 上有定义，如果对于该区域 D 上任何异于 (x_0,y_0) 的点 (x,y)，都有

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0)\ \ (\text{或 } f(x,y)\ge f(x_0,y_0)),$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得最大值(或最小值) $f(x_0,y_0)$，最大值、最小值统称为最值. 使函数取得最值的点称为最值点.

2、多元函数极值与最值问题的理论依据

（1）二元函数取极值的必要条件（类比一元函数）

设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) $\begin{cases}\text{一阶偏导数存在}\\ \text{取极值}\end{cases}$，则 $f_x'(x_0,y_0)=0, f_y'(x_0,y_0)=0$.

【注】该必要条件同样适用于三元及以上函数.

（2）二元函数取极值的充分条件

记$\begin{cases} f_{xx}''(x_0,y_0)=A \\ f_{xy}''(x_0,y_0)=B \\ f_{yy}''(x_0,y_0)=C \end{cases}$，则$\Delta=B^2-AC\begin{cases} <0\Rightarrow \text{极值}\begin{cases} A<0\Rightarrow \text{极大值} \\ A>0\Rightarrow \text{极小值} \end{cases} \\ >0\Rightarrow \text{非极值} \\ =0\Rightarrow \text{方法失效，另谋他法} \end{cases}$

【注】该充分条件不适用于三元及以上函数.

综合（1）、（2），$\Rightarrow\begin{cases} \text{用必要条件求出可疑点} \\ \text{用充分条件判别可疑点} \end{cases}$

（3）条件极值与拉格朗日乘数法

求目标函数$u=f(x,y,z)$在条件$\begin{cases} \varphi(x,y,z)=0 \\ \phi(x,y,z)=0 \end{cases}$下的极值，则

① 构造辅助函数

$$F(x,y,z,\lambda,u)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+u\phi(x,y,z)$$

② 得$\begin{cases} F_x'=f_x'+\lambda\varphi_x'+u\phi_x'=0 \\ F_y'=f_y'+\lambda\varphi_y'+u\phi_y'=0 \\ F_z'=f_z'+\lambda\varphi_z'+u\phi_z'=0 \\ F_\lambda'=\varphi(x,y,z)=0 \\ F_u'=\phi(x,y,z)=0 \end{cases}$

③ 解上述方程组得(x_0,y_0,z_0)

④ 根据实际问题，必存在最值，所得即所求.

3、多元函数极值与最值的考题分类

（1）无条件极值$\begin{cases} \text{显函数} \\ \text{隐函数} \end{cases}+\Delta$判别法；

（2）闭区域边界上的最值；

（3）闭区域上的最值.

4、求函数 $f(x,y)$ 在某区域 D 上的最值的程序

（1）求出 $f(x,y)$ 在 D 内所有可疑点处的函数值；

（2）求出 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最值；

（3）比较所有得到的函数值，其中最大者即为最大值, 最小者即为最小值.

在实际问题中，如果可以判断出 $f(x,y)$ 的最大值（最小值）一定在 D 的内部取得，且 $f(x,y)$ 在 D 内只有一个驻点，则可以断定该驻点处的函数值就是 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值（最小值）.

【重点】多元函数的极值与最值问题的典型例题分析

【例 1】（无条件极值—隐函数）设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$（*）所确定的。

试求 $z=z(x,y)$ 的极值点与极值.

【分析与解答】（1）用必要条件求出可疑点，即，根据 $\begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{cases} \Rightarrow P$

对（*）两边同时求 x,y 的偏导数：

$$\begin{cases} 2x-6y-2yz_x'-2zz_x'=0 \\ -6x+20y-2z-2yz'_y-2zz'_y=0 \end{cases}$$

整理得 $$\begin{cases} x-3y-(y+z)z'_x=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ -3x+10y-z-(y+z)z'_y=0 \ldots(2) \end{cases}$$

令 $\begin{cases} z_x'=0 \\ z_y'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=0 \\ -3x+10y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y \\ z=y \end{cases}$，带入（*）$\Rightarrow$ 可疑点 $\begin{cases} P_1(9,3),z_1=3 \\ P_2(-9,-3),z_1=-3 \end{cases}$

（2）用充分条件判别可疑点

对（1）再求 x 的偏导，$1-(z'_x)^2-(y+z)z''_{xx}=0 \ldots\ldots\ldots(3)$

对（1）再求 y 的偏导，$-3-(1+z'_y)z_x'-(y+z)z''_{xy}=0 \ldots\ldots(4)$

对（2）再求 y 的偏导，$10-z'_y-(1+z'_y)z'_y-(y+z)z''_{yy}=0 \ldots(5)$

又结合 $\begin{cases} z_x'=0 \\ z_y'=0 \end{cases} \Rightarrow z''_{xx}=\dfrac{1}{y+z}$，$z''_{xy}=\dfrac{-3}{y+z}$，$z''_{yy}=\dfrac{10}{y+z}$

①对于 $P_1(9,3),z_1=3$

记 $\begin{cases} A_1=z''_{xx}\Big|(9,3,3)=\dfrac{1}{6} \\ B_1=z''_{xy}\Big|(9,3,3)=-\dfrac{1}{2} \\ C_1=z''_{yy}\Big|(9,3,3)=\dfrac{5}{3} \end{cases}$，则 $\Delta_1=B_1^{\ 2}-A_1C_1=-\dfrac{1}{36}$，由 $\begin{cases} \Delta_1<0 \\ A_1>0 \end{cases} \Rightarrow P_1(9,3)$ 为极小值点，$z_1=3$ 为极小值

②对于 $P_2(-9,-3),z_2=-3$，同理可得，$\begin{cases} \Delta_2=-\dfrac{1}{36}<0 \\ A_2=-\dfrac{1}{6}<0 \end{cases} \Rightarrow P_2(-9,-3)$ 为极大值点，$z_2=-3$ 为极大值

【例 2】（无条件极值—显函数）求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值

【分析与解答】 $f'_x(x,y)=2x(2+y^2)$, $f'_y(x,y)=2x^2y+\ln y+1$

令$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$，解得唯一驻点$(0,\frac{1}{e})$

由于$A=f''_{xx}(0,\frac{1}{e})=2(2+y^2)\big|_{(0,\frac{1}{e})}=2(2+\frac{1}{e^2})$，$B=f''_{xy}(0,\frac{1}{e})=4xy\big|_{(0,\frac{1}{e})}=0$，

$C=f''_{yy}(0,\frac{1}{e})=(2x^2+\frac{1}{y})\Big|_{(0,\frac{1}{e})}=e$，则$B^2-AC<0$或$AC-B^2>0$

又因为$A>0$,所以$f(x,y)$在驻点$(0,\frac{1}{e})$处取极小值$f(0,\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$

【例 3】（**闭区域边界上的最值**）求函数$u=x^2+y^2+z^2$在约束条件$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x+y+z=4 \end{cases}$下的最大值与最小值.

【分析与解答】（1）作$F(x,y,z,\lambda,u)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+u(x+y+z-4)$

（2）则

$$\begin{cases} F_x'=2x+2\lambda x+u=0 \\ F_y'=2y+2\lambda y+u=0 \\ F_z'=2z-\lambda+u=0 \\ F_\lambda'=x^2+y^2-z=0 \\ F_u'=x+y+z-4=0 \end{cases}$$

（3）解该方程组$\Rightarrow P_1(1,1,2);P_2(-2,-2,8)$

（4）根据实际问题，必存在最值，所得即所求，故$u_{\max}=72,u_{\min}=6$.

【注】方程组（＊1）的求解过程是在草稿纸上进行的，这里要注意两点：
（1）当方程组的未知量具有轮换对称性时，我们要充分利用这个条件，减少未知数个数；
（2）减少个数以后，寻找未知数个数少的方程进行求解。

【例 4】（**闭区域上的最值**）求函数$f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$在区域$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4,y\ge 0\}$上的最大值与最小值.

【分析与解答】（1）对于区域D的内部，这是无条件极值，求出可疑点并计算可疑点处的函数值：

令$\begin{cases} f_x'=2x-2xy^2=0 \\ f_y'=4y-2x^2y=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} P_1(\sqrt{2},1) \\ P_2(-\sqrt{2},1) \end{cases}\Rightarrow f_1=2,f_2=2$；

（2）对于区域D的边界，这是条件极值，考虑用拉格朗日乘数法或者直接代入法，这个题目用把边界方程带入解题过程比较简单：

设$L_1:x^2+y^2=4\quad(y>0)$，于是，$f(x,y)=f(x,\sqrt{4-x^2})=x^4-5x+8$

则 $f'=4x^3-10x=0 \Rightarrow x_1=0, x_{2,3}=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}, y_1=2, y_{2,3}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$，即

$$P_3(0,2), P_4(\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}), P_5(-\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}) \Rightarrow f_3=8, f_4=f_5=\frac{7}{4}$$

设$L_2: y=0 \quad (-2\le x\le 2)$，于是 $f(x,y)=f(x,0)=x^2$

$$\Rightarrow P_6(0,0), P_7(-2,0), P_8(2,0) \Rightarrow f_6=0, f_7=4, f_8=4$$

$$比较f_1至f_8 \Rightarrow \begin{cases} f_{\max}=8 \\ f_{\min}=0 \end{cases}$$

【例 5】**（综合题）**求函数$u=xy+2yz$在约束条件$x^2+y^2+z^2=10$下的最大值和最小值。

【解法 1】设$F(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda(x^2+y^2+z^2-10)$.

$$令\begin{cases} F_x'=y+2\lambda x=0, \\ F_y'=x+2z+2\lambda y=0, \\ F_z'=2y+2\lambda z=0, \\ F_\lambda'=x^2+y^2+z^2-10=0, \end{cases}$$

解之，得可能的最值点为

A(1, $\sqrt{5}$,2), B(-1，$\sqrt{5}$,-2), C(1，$-\sqrt{5}$,2),

D(-1，$-\sqrt{5}$,-2), E($2\sqrt{2}$，0, $-\sqrt{2}$), F($-2\sqrt{2}$，0, $\sqrt{2}$).

因为在 A,D 两点处$u=5\sqrt{5}$；在 B,C 两点出$u=-5\sqrt{5}$；在 E,F 两点处$u=0$，所以$u_{\max}=5\sqrt{5}$，

$u_{\min}=-5\sqrt{5}$.

【注】方程组（＊2）的求解过程仍然在草稿纸上进行，但是我们遗憾地发现，所有的未知量都没有轮换对称性，无法化简方程组，此时，有一句话请大家关注：“约束条件是否可以代入解题过程从而简化计算”？

我们发现，$(1)\cdot x+(2)\cdot y+(3)\cdot z \quad \Rightarrow (xy+2yz)+\lambda(x^2+y^2+z^2)=0$，

即，$(xy+2yz)=-10\lambda$.

由连续函数在闭区域上必有最值，只要求出λ的全部值（注意λ作为一个独立变量是可以取 0 值的，很多同学在这里有误解），代入-10λ，最大者为最大值，最小者为最小值。
求λ也有两种办法，示范给大家看。
第一种办法，

1）请看方程组的前三个方程，你是否发现它们是关于x,y,z的线性方程组（此时λ作为常系数）；

2） 又由于约束条件是$x^2+y^2+z^2=10$，说明x,y,z不可以同时都是 0；

3） 综合以上两点，关于 x, y, z 的线性方程组有非零解，于是可得其系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}2\lambda & 1 & 0\\ 1 & 2\lambda & 2\\ 0 & 2 & 2\lambda\end{vmatrix}=0,$$

即 $|A|=\begin{vmatrix}2\lambda & 1 & 0\\ 1 & 2\lambda & 2\\ 0 & 2 & 2\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\lambda & 1 & -4\lambda\\ 1 & 2\lambda & 0\\ 0 & 2 & 2\lambda\end{vmatrix}=2\lambda\begin{vmatrix}2\lambda & 1 & -2\\ 1 & 2\lambda & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=2\lambda(4\lambda^2-5)=0$

（这个行列式的计算过程之所以写地很详细，是想提醒大家尽量不要直接展开成 λ^3 的多项式，那样的因式分解会比较费事，最好能通过初等变换提出 $\lambda-\lambda_1$，这样只分解 λ^2 的多项式就很轻松了。数学需要做的细致一些，扎实一些，很多同学平时不做计算，只重视思路，总以为计算很简单，到了考场上就出了大问题，请吸取经验和教训，踏实一些。）

故，$\lambda_1=0,\lambda_2=\dfrac{\sqrt{5}}{2},\lambda_3=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，于是得

$$\mu_{\max}=5\sqrt{5}，\ \mu_{\min}=-5\sqrt{5}。$$

第二种办法，当 $\lambda=0$ 时，可直接得到 E($2\sqrt{2}$，0, $-\sqrt{2}$), F($-2\sqrt{2}$，0, $\sqrt{2}$).

当 $\lambda\neq 0$ 时，$(3)-2\cdot(1)\Rightarrow 2\lambda(z-2x)=0\Rightarrow z=2x$，将其带入 (2) $\Rightarrow$ $y=\dfrac{-5x}{2\lambda}$，再将其带入 (1)

$\Rightarrow \dfrac{-5x}{2\lambda}+2\lambda x=0$，即 $4\lambda^2x-5x=0$，因 $x\neq 0$，所以 $4\lambda^2-5=0$，得

$$\lambda_1=\frac{\sqrt{5}}{2},\lambda_2=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

第 10 讲　二重积分

二重积分是数学一、数学二和数学三的考生在多元积分学上唯一的公共考试内容，也是历年考研中的必考题，基本上会考查一个大题和一个小题.二重积分计算上的细节很多，出题的角度很多，这些年的考试中，命题人通过新颖的手法给出了不少精彩的题目，值得我们很好的去品味，放在下面具体去讲解. 在导语中关键强调一点，二重积分重在计算，思路上说，难度不高；计算上讲，却不容易. 历届考生的考试结果告诉我们，即使一个很常规的二重积分计算题，最终统计出的结果也会有很高的难度和较好的区分度，为什么？因为很多考生计算不过关，请大家引以为戒.

第一节　二重积分的概念与对称性

类比于定积分，我们给出二重积分的精确定义：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i,c+\frac{d-c}{n}j\right)\frac{b-a}{n}\frac{d-c}{n}$$

这里的 D 不是一般的平面有界闭区域，而是一个“长方形区域”，如图所示.
于是我们可以根据“凑定积分定义”的方法，给出“凑二重积分定义” 的步骤如下：

①先提出$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$；

②再凑出$\frac{i}{n}$与$\frac{j}{n}$；

③由于 $\frac{i}{n}=0+\frac{1-0}{n}i$，故$\frac{i}{n}$可以读作“0 到 1 上的 x”，

同理，$\frac{j}{n}=0+\frac{1-0}{n}j$，故$\frac{j}{n}$可以读作“0 到 1 上的 y”，

且$\frac{1}{n}=\frac{1-0}{n}$，既可以读作“0 到 1 上的 dx”，也可以读作“0 到 1 上的 dy”，

于是，“凑定义”成功！

先看一个例子. 请计算$I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{ij}{n^4}$.

【解答】$I\overset{①}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{ij}{n^2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\overset{②}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\overset{③}{=}\int_0^1\int_0^1 xydxdy=\iint\limits_D xyd\sigma=\frac{1}{4}$

再看 2010 年的考研试题. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$（　　）

(A) $\int_0^1 dx\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　　(B) $\int_0^1 dx\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

(C) $\int_0^1 dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$　　(D) $\int_0^1 dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

【分析与解】按照命题单位，也就是教育部考试中心的说法：“本题主要考查二重积分的概念与将和式转化为积分和的方法，是一道基本概念题.”且指出“考生对二重积分的概念平时不太重视，对其“和式”不熟悉”.

设$D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le -1,0\le y\le 1\right\}$，记$f(x,y)=\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}$。

用直线 $x=x_i=\frac{i}{n}(i=0,1,2,\cdots,n)$ 与 $y=y_i=\frac{j}{n}(j=0,1,2,\cdots,n)$ 将 D 分成 n^2 等份，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+x_i)(1+y_j^2)}\frac{1}{n^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\frac{j^2}{n^2}\right)}\frac{1}{n^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$是函数$f(x,y)$在$D$上的一个二重积分的和式，所以

原式$=\iint\limits_D\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$，故应选（$D$）.

事实上，这个题目让命题人颇费了一番周折：他又想考我们，又怕门槛太高（题目太陌生），所以题目出成了选择题，答案写成了积分的形式，给了考生提示.只不过，这并不是最后答案，答案应该写出来，

为$\frac{\pi}{4}\ln 2$，你看出来了么？也就是说，此题如果出成填空题，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$________. 估计做出来的人会更少.

【例】设D是由$y=x^3,y=1,x=-1$所围成的平面闭区域，其中D_1为D在第一象限的部分，则$\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　）

$A)2\iint\limits_{D_1}xyd\sigma$　　$B)2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin yd\sigma$　　$C)2\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)d\sigma$　　$D)0$

【例】设区域$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0\right\}$，$f(x)$为$D$上的正值连续函数，$a,b$为常数，求

$$I=\iint\limits_D\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma.$$

第二节　二重积分的计算

【例】计算$I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$,其中$D=\left\{(r,\theta)\middle|0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$

【注】基本公式：$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin xdx=1-\frac{\sqrt{2}}{2},\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\sqrt{2},\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=1,\int_0^{\pi}\sin xdx=2;$

华里士（Wallis）公式：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & n\text{为正的偶数}\\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3} & n\text{为大于1的奇数}\end{cases}$

$$\int_0^{\pi}\sin^n xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx\ ;\quad \int_0^{\pi}\cos^n xdx=\begin{cases}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx, & n\text{为偶数}\\ 0, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^n xdx=\int_0^{2\pi}\cos^n xdx=\begin{cases}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx, & n\text{为偶数}\\ 0, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx;\quad \int_0^{\pi}f(\sin x)dx\ne\int_0^{\pi}f(\cos x)dx;$$

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx;$$

【例】利用二重广义积分计算$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx.$

解　设$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$,于是

$$I^2=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\cdot\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\cdot\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy$$
$$=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dy=\iint\limits_{\substack{0\le x<+\infty\\0\le y<+\infty}}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$
故

$$\underline{\underline{\text{用极坐标变换}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-r^2}\cdot rdr=\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{+\infty}e^{-r^2}d\left(-r^2\right)=-\frac{\pi}{4}\left(e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

注：这一结果在概率论与数理统计中经常要用到，最好记住这一结果。

【例】综合问题分析

第 11 讲　微分方程

考研的微分方程主要任务是计算，其次是应用.它的理论性不强，但是计算量较大；在应用方面主要是几何上的应用，然后是经济应用和物理应用.

值得指出地是，近几年的试题中经常出现很普通的微分方程的求解问题，而且分值占到 9 分或者 10 分，所以提醒大家注意的是，要重视微分方程的基本问题和基本运算.

数学一、二、三的公共考试内容

1．微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.

2．变量可分离的微分方程．齐次微分方程和一阶线性微分方程的解法.

3．线性微分方程解的性质及解的结构．二阶常系数齐次线性微分方程的解法. 自由项为多项式．指数函数．正弦函数．余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程的解法．某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程.

4．会用微分方程解决一些简单的应用问题.

数学一、二的单独考试内容

1．会用降阶法解下列形式的微分方程： $y^{(n)}=f(x),y''=f(x,y')\text{和}y''=f(y,y')$.

数学一的单独考试内容

1．伯努利方程和全微分方程，简单的变量代换解某些微分方程.

数学三的单独考试内容（放在数学三专题内容里讲）

1．一阶常系数线性差分方程的求解方法.

第一节　微分方程的概念及其应用

1、概念

微分方程　含有未知函数的导数（或者微分）的方程, 称为微分方程. 一般写成

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0\text{ 或 }y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

微分方程的阶　方程中未知函数导数的最高阶数, 称为微分方程的阶.

如： $y'''-y''+6y=0$ 就是三阶方程..

微分方程的通解与特解　若微分方程的解中含有独立常数的个数等于微分方程的阶数，则该解称为微分方程的通解，不含任意常数的解称为特解.

即，若 $y=y(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 是 n 阶微分方程 $F\left(x,y(x),y'(x),\cdots y^{(n)}(x)\right)\equiv0$ 在区间 I 上的解，其中

$C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为 n 个独立的任意常数， $x\in I$ ，则称它为该微分方程的通解.

【关键提示】$F(y,y',y'',\dots y^{(n)})=0$ 首先反映了$\boxed{\text{未知函数 } y \text{ 及其各阶导数之间的关系}}$，故可以充分利用此关系来研究问题。

【例】设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，若 $f(x_0)>0$，且 $f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0（　　）

（A）取得极大值　　（B）取得极小值

（C）某个领域内单调增加　　（D）某个领域内单调减少

第二节　一阶微分方程的求解

1、**变量可分离型**　能写成 $y'=f(x)g(y)$ 形式的方程称为变量可分离型方程. 其解法为：

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)\Rightarrow\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$$

2、齐次方程　形如 $\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$ 或者 $\frac{dx}{dy}=\varphi(\frac{x}{y})$ 的方程. 其解法为：

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=u\cdot x\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，于是原方程变为 $\frac{du}{dx}\cdot x+u=f(u)$，即

$$\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

3、**一阶线性微分方程**　形如 $y'+p(x)y=q(x)$ 的方程，其中 $p(x),q(x)$ 为已知的连续函数. 其计算公式为：$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)dx+C\right)$

4、**伯努利方程**　形如 $y'+p(x)y=q(x)y^n(n\neq0,\neq1)$ 的方程，其中 $p(x),q(x)$ 为已知的连续函数. 其解法为：

（1）先变形为 $y^{-n}\cdot y'+p(x)y^{1-n}=q(x)$

（2）令 $z=y^{1-n}$，得 $\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$，则 $\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$

（3）解此一阶线性微分方程即可.

5、 $y''=f(x,y')$ 型（方程中不显含未知函数 y ）

令 $y'=p(x)$，$y''=p'$，则原方程变为一阶方程 $\frac{dp}{dx}=f(x,p)$

6、 $y''=f(y,y')$ 型（方程中不显含自变量 x ）

令 $y'=p$，$y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot p$，则原方程变为一阶方程 $p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p)$

第三节　高阶微分方程的求解

1、二阶常系数齐次线性微分方程的通解

对于 $y''+py'+qy=0$，其对应的特征方程为 $\lambda^2+p\lambda+q=0$，求其特征根，有以下三种情况请大家牢记. 以下 C_1,C_2 为任意常数.

（1）若 $p^2-4q>0$，设 λ_1,λ_2 是特征方程的两个不等实根，即 $\lambda_1\neq\lambda_2$，可得其通解为

$$\boxed{y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}}$$

（2）若 $p^2-4q=0$，设 λ_1,λ_2 是特征方程的两个相等的实根，即二重根，令 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，可得其通解为

$$\boxed{y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}}$$

（3）若 $p^2-4q<0$，设 $\alpha\pm\beta i$ 是特征方程的一对共轭复根，可得其通解为

$$\boxed{y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)}$$

2、二阶常系数非齐次线性微分方程的特解

对于 $y''+py'+qy=f(x)$，考研大纲规定我们需要掌握以下两种情况：

（1）自由项 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$ 时，特解要设定为 $\boxed{y^*=e^{\alpha x}Q_n(x)x^k}$

$$\text{其中，}\begin{cases} e^{\alpha x}\text{照抄} \\ Q_n(x)\text{为}x\text{的}n\text{次一般多项式} \\ k=\begin{cases} 0 & \alpha\neq\lambda_1,\ \alpha\neq\lambda_2 \\ 1 & \alpha=\lambda_1\text{或}\alpha=\lambda_2 \\ 2 & \alpha=\lambda_1=\lambda_2 \end{cases} \end{cases}$$

（2）自由项 $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x\right]$ 时，特解要设定为

$$\boxed{y^*=e^{\alpha x}\left[Q^{(1)}{}_l(x)\cos\beta x+Q^{(2)}{}_l(x)\sin\beta x\right]x^k}$$

$$\text{其中，}\begin{cases} e^{\alpha x}\text{照抄} \\ l=\max\left\{m,n\right\},Q^{(1)}{}_l(x),Q^{(2)}{}_l(x)\text{分别为}x\text{的两个不同的}l\text{次一般多项式} \\ k=\begin{cases} 0 & \alpha\pm\beta i\text{不是特征根} \\ 1 & \alpha\pm\beta i\text{是特征根} \end{cases} \end{cases}$$

第 12 讲　无穷级数

无穷级数是数学一、数学三的重要考试内容，理论较多，分析性强，计算量大，不易被掌握，故历年考研题都属于较难的问题，需要同学们高度重视，科学总结，多做训练.

本部分主要内容分为三个：（1）数项级数的判敛问题（一般出 4 分的小题）；（2）求幂级数的收敛域（一般出 4 分的小题）；（3）幂级数求和函数与函数展开为幂级数（一般出 11 分的大题）.近些年出现了一

些综合性的问题，如与微分方程结合考“微分方程的幂级数解法”等.

预备知识 一、概念 二、 级数分类

$$\text{级数}\begin{cases}\text{（常）数项级数}\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(u_n\ge 0)\text{——正项级数}\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)\text{——交错级数}\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(u_n\text{符号无限制})\text{——任意项级数}\end{cases}\\ \text{函数项级数}\begin{cases}\text{幂级数 }\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\\ \text{付氏级数(数学三不要求，不必理会)}\end{cases}\end{cases}$$

第一节 数项级数及其判敛问题

一、正项级数($\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n,u_n\ge 0$)的敛散性判别法

先将五种重要的判别法总结如下，然后给出正项级数敛散性判别的程序. 强调一下，下面的一般项u_n均是非负的.

1、**收敛原则** 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件是：它的部分和数列$\{S_n\}$有界. 即：

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛}\Leftrightarrow S_n\text{有上界}$$

【注】收敛原则一般多用于证明性问题，是一种经典的证明题依据.

2、**比较判别法** 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数, 且$0\le u_n\le v_n$，则$\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n\text{收敛}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛}\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{发散}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n\text{发散}\end{cases}$

3、**比较判别法的极限形式（重要！重要！）**

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}\overset{\frac{0}{0}}{=}\begin{cases}0\quad\Rightarrow u_n\text{是高阶无穷小}\Rightarrow\begin{cases}\text{若}\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n\text{收敛，则}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛}\\ \text{若}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{发散，则}\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n\text{发散}\end{cases}\\ \infty\quad\Rightarrow v_n\text{是高阶无穷小}\Rightarrow\begin{cases}\text{若}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛，则}\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n\text{收敛}\\ \text{若}\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n\text{发散，则}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{发散}\end{cases}\\ A\ne 0\Rightarrow u_n\text{与}v_n\text{是同阶无穷小}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{与}\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n\text{同敛散}\end{cases}$$

【注】 （1）比较判别法及其极限形式实质上是跟“别人”比，故需要找到合适的尺度.

（2）四个重要的尺度：

①等比级数$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ $\begin{cases} |q|<1 \xrightarrow{\text{收敛于}} \dfrac{a}{1-q} \\ |q| \geq 1 \to \text{发散} \end{cases}$

② $p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} p>1 \Rightarrow \text{收敛} \\ p \leq 1 \Rightarrow \text{发散} \end{cases}$

③广义$p-$级数$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ $\begin{cases} p>1 \Rightarrow \text{收敛} \\ p \leq 1 \Rightarrow \text{发散} \end{cases}$

④交错$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} p>1 \Rightarrow \text{绝对收敛} \\ 0<p \leq 1 \Rightarrow \text{条件收敛} \end{cases}$ （$p>0 \Rightarrow$ 收敛）

4、**比值判别法（达朗贝尔判别法）** 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \begin{cases} \rho<1 & \Rightarrow \text{级数收敛} \\ \rho>1(\text{或为}+\infty) & \Rightarrow \text{级数发散} \\ \rho=1 & \Rightarrow \text{该法失效，另谋他法（一般转而用比较判别法）} \end{cases}$$

5、**根值判别法（柯西判别法）** 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数，则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \begin{cases} \rho<1 & \Rightarrow \text{级数收敛} \\ \rho>1(\text{或为}+\infty) & \Rightarrow \text{级数发散} \\ \rho=1 & \Rightarrow \text{该法失效，另谋他法（一般转而用比较判别法）} \end{cases}$$

【注】（1）比值判别法与根值判别法实质上是跟“自己个儿”比，故一般项u_n的形式是否有特点是关键；

（2）若一般项u_n中含有a^n等，一般用$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$或$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$均可；

（3）若一般项u_n中含有$a^n, n!$等，一般用$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

（4）如果$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}=1$或$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}=1$，则判别方法失效，不能对$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的敛散性下结论，比如，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$是发散的，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$是收敛的，但都有$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}=1$、$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}=1$.

（5）特别需要指出，比值与根值判别法中$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho<1$、$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}=\rho<1$只是$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充分条件

而非必要条件！看一个例子. 设$u_n=\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$，$v_n=\dfrac{3}{2^n}$，则，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，$0\le u_n\le v_n$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，

但是，$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2(2+(-1)^n)}=a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=\dfrac{1}{6}$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=\dfrac{3}{2}$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在！

6、正项级数敛散性的判别程序

第一步，看一般项u_n是否非负，确定其是否正项级数；

第二步，看一般项u_n中含有$a^n, n!$等，如果有，则优先考虑比值或者根值判别法；

第三步，如果第二步的条件不满足，则考虑比较判别法，对于比较判别法的极限形式$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$，关键是选择一个合适的“尺度”$v_n$；对于比较判别法$0\le u_n\le v_n$或者$0\le v_n\le u_n$，关键是找到合适的$v_n$，这个$v_n$一般是通过将$u_n$自身进行放大缩小得来的，在考研中要求不会太高；

第四步，如果第二步和第三步都做不出来，只好考虑收敛原则.

二、交错级数($\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, u_n>0$)的敛散性判别法

1、多亏了莱布尼兹

交错级数似乎比正项级数要复杂，正项级数有五个判别法，那么交错级数有几个判别法呢？是不是更多更繁呢？恰恰相反，伟大的微积分创立者莱布尼兹告诉了我们一个极其简单的方法，这就是——**莱布尼茨判别法：**

如果交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足条件：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$；

(2) $u_n\ge u_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$；

则级数收敛.

【注】对于（1）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，只需做极限运算，一般不难；真正的难点在于对（2）$u_n\ge u_{n+1}$的证明，一般有两种考虑：一是用初等数学的办法，证明$u_{n+1}-u_n\le 0$或者$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\le 1$；二是令$u_n=f(n)$，并连续化为$f(x)$（这里的$f(x)$要有可导的性质），只要能够证明$\boxed{\text{当}x\text{充分大时}}$（想想看为什么——还记得级数的基本性质 3 么？去掉级数的前有限项，不会改变级数的收敛性），$f'(x)\le 0$，则$u_n\ge u_{n+1}$. 整理思路为：

$$\boxed{\text{令}u_n=f(n)\xrightarrow{\text{连续化为}}f(x)\overset{x\text{足够大}}{\Rightarrow}f'(x)\le 0\Rightarrow u_n\ge u_{n+1}}$$

三、任意项级数($\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n, u_n$符号无限制)的敛散性判别法

定义（1）设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为任意项级数，若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛,就称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛**；

（2）设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为任意项级数，若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,但$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散,就称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **条件收敛**.

【例】设常数$\alpha>0$，若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n|a_n|}{\sqrt{n^2+\alpha}}$ （ ）

（A）发散 （B）条件收敛 （C）绝对收敛 （D）敛散性与α有关

【例】如果数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则以下级数必收敛的是（ ）

$(A)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$ $(B)\sum_{n=1}^{\infty}{u_n}^2$ $(C)\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ $(D)\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$

【分析】很多同学在复习数项级数的判敛问题时感觉摸不着头脑，尤其是对于这种抽象的问题，更是害怕.我想，做题时的“总结不足”可能是一个重要的原因——有些同学说，我已经做了很多题，可是为什么做新的练习时还是不会呢？答：很可能是你做题的质量不高，<u>为了做题而做题，做完一题扔一题</u>，只追求数量，这肯定不行. 做完一个题，就要停下来总结一下这个题你能学到什么技术，容易错在哪里，有什么值得借鉴的；做完同一知识点下的几个题，就要停下来好好琢磨琢磨这几个题之间有没有什么联系，考虑考虑能从哪些角度去解决这类问题. 这种总结做多了，你的做题质量和效率就会越来越高.

下面给大家做一个示范，做了很多题目以后，对于抽象的数项级数的判敛问题，能不能做如下总结呢？

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}w_n$是任意项级数（Σ的上标都是∞，而下标并非总是 1.）

（1）设 a,b,c 为$\boxed{\text{非零}}$常数，且$au_n+bv_n+cw_n=0$，则在$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}w_n$中只要有两个级数是收敛的，第三个必收敛；

（2）若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散；

（3）若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$绝对收敛； （$\left|\frac{u_n}{n}\right|\le\frac{1}{2}\left(u_n^2+\frac{1}{n^2}\right)$）

（4）若$\sum u_n$收敛， 则$\sum|u_n|$不定 （反例：$\sum(-1)^n\frac{1}{n}$）

（5）设$\sum u_n$收敛，则$\sum u_n^2$不定 （反例：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\to\sum\frac{1}{n}$发）

（6）设$\sum u_n$收敛，则$\sum(-1)^n u_n$不定 （反例：$\sum\frac{1}{n}$发$\to\sum(-1)^n\frac{1}{n}$收$\to\sum\frac{1}{n}$发）

（7）设$\sum u_n$收敛，则$\sum(-1)^n\frac{u_n}{n}$不定 （反例：$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$收，$\rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发）

（8）设$\sum u_n$收敛，则$\sum u_{2n}$(偶数项)，$\sum u_{2n-1}$(奇数项)不定

（反例：$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$收敛，但是其奇数项和偶数项都发散）

（9）设$\sum u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收．（收敛函数任加括号所得新级数仍收敛且和不变）

（10）设$\sum u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$不定．

（反例：$(u_1+u_2)+(u_3+u_4)+(u_5+u_6)+\cdots$ $\begin{cases}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots & \text{收敛}\\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots & \text{发散}\end{cases}$．）

（11）设$\sum u_n$收敛，则 $\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1}) \quad \text{收敛}. & \sum u_n+\sum u_{n+1} \quad \text{收}+\text{收}=\text{收}\\ \sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1}) \quad \text{收敛}. & \sum u_n-\sum u_{n+1} \quad \text{收}-\text{收}=\text{收}\end{cases}$．

（12）设$\sum u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_nu_{n+1}$不定．

（反例：$u_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}},u_nu_{n+1}=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=-\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$发散）

【注】补充一个对数判别法

对数判别法不是考研大纲要求的，但是它在事实上优于根值判别法，所以在这里补充这一个好的判别工具，做选择题时供大家借鉴．

对数判别法 若$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\ln n}=p$，在$p>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；当$p<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散；当$p=1$此法失效。

【例】判断$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2\ln n}{n^2}\right)^{n^2}$的收敛性。

【分析与解答】$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2\ln n}{n^2}\right)^n=e^{\lim_{n\to\infty}n(1-\frac{2\ln n}{n^2}-1)}=e^{\lim_{n\to\infty}-\frac{2\ln n}{n}}=e^0=1$ 根值判别法失效，转而用对数判别法，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=-\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\ln\left(1-\frac{2\ln n}{n^2}\right)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\frac{2\ln n}{n^2}}{\ln n}=2>1$$，故 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2\ln n}{n^2}\right)^{n^2}$ 收敛.

第二节 阿贝尔定理与幂级数的收敛域

一、阿贝尔定理

二、求收敛域的程序

（1）对于 $\sum u_n(x)$，加绝对值 $\Rightarrow\left|\sum u_n(x)\right|$，成为正项级数；

（2）用正项级数的 $\begin{cases}\text{比值}\\\text{根值}\end{cases}$ 判别法，令 $\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}<1\\\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}<1\end{cases}\Rightarrow x$ 的取值范围，即得收敛区间；

（3）单独讨论收敛区间的两个端点的级数敛散性；

综合（2）、（3）即可求得级数的收敛域，为 (a,b)、$(a,b]$、$[a,b)$、$[a,b]$ 之一.

【例】求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n-1)}\dfrac{(x-1)^n}{n(n-3^n)}$ 的收敛域。

第三节 函数展开成幂级数

【例 1】将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$ 展开为（x+5）的幂级数。

【解】本题属于利用<u>直接恒等变形</u>的展开问题。

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$$

$$=\frac{1}{x+5-8}-\frac{1}{x+5-7}=-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+5}{8}}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+5}{7}}$$

$$=-\frac{1}{8}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+5}{8}\right)^n+\frac{1}{7}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+5}{7}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{7^{n+1}}-\frac{1}{8^{n+1}}\right)(x+5)^n$$

【例 2】将 $f(x)=\ln(2-2x^2-4x^4)$ 展开为 x 的幂级数.

[解] 本题属于利用<u>逐项求导求积</u>的展开问题。

$$f(x)=\ln(2\cdot(1+x^2)(1-2x^2))=\ln 2+\ln(1+x^2)+\ln(1-2x^2)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}-\frac{4x}{1-2x^2}$$

$$=2x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}-4x\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^{2n}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}-4\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^{2n+1}$$

注意到 $f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)dx$, 且 $f(0)=\ln 2$

$$\Rightarrow f(x)=\ln 2+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+2}x^{2n+2}-4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2n+2}x^{2n+2}$$

$$=\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n+1}-\frac{2^{n+1}}{n+1}\right]x^{2n+2}=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^{2n}\qquad(|x|<\frac{1}{\sqrt{2}})$$

第四节 幂级数求和函数

【例 1】 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的和函数.

【解】 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，逐项求导，得 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，$|x|<1$，

然后两边积分，得 $S(x)-S(0)=\int_0^x\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-x)$，

又因 $S(0)=0$，故和函数 $S(x)=-\ln(1-x)+S(0)=-\ln(1-x), x\in[-1,1)$

【例 2】求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和函数.

【解】 设 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，则原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=xS(x)$，

对 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 两边积分，得 $\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$, $\quad |x|<1$，

再两边求导，$\left(\int_0^x S(x)dx\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=xS(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$ ，$|x|<1$.

【总结】

1. 幂级数求和函数的突破口：

1）当 $(an+b)^c$ 在分母上时，先导后积，如例 1；

2）当 $(an+b)^c$ 在分子上时，先积后导，如例 2.

2. 对于先导后积的处理办法：

这里有个细致的问题需要大家做扎实，做准确，请问 $\int S'(x)dx$ 是否等于 $S(x)$ 呢？

由于 $\int_a^x S'(t)dt=S(t)\Big|_a^x=S(x)-S(a)$，故 $S(x)=\int_a^x S'(t)dt+S(a)$

又由于当 a 为中心点时 $\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \overset{a=0}{=} a_0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \overset{a=x_0}{=} a_0 \end{cases}$ 都收敛，故下限通常取中心点.

3. 始终不要忘记在解题过程中标注收敛域.
4. 建议大家记住由这两个例题所得到的结果：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \qquad -1 \le x < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad -1 < x < 1$$

利用这两个公式可直接得到如下常数项级数的和：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

第五节　傅里叶级数

一、狄利克雷(Dirichlet)收敛定理

设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的可积函数，如果在 $[-l,l]$ 上 $f(x)$ 满足：

（1）连续或只有有限个第一类间断点；

（2）只有有限个极值点；

则 $f(x)$ 的傅里叶级数处处收敛，记其和函数为 $S(x)$，则

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right)$$

且 $$S(x) = \begin{cases} f(x) & x\text{为连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & x\text{为第一类间断点} \\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} & x\text{为端点} \end{cases}$$

这个定理看起来抽象，实际上很有用处：当 x_0 为连续点时，我们可以利用 $S(x_0) = f(x_0)$ 这个事实，用傅里叶级数知识求某些数项级数的和。

二、周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数

设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足狄利克雷收敛定理的条件，则它的傅里叶级数为

$$f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中系数 a_n 和 b_n 分别为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

考研的实际考题分为以下三种情况：

1、将普通周期函数 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上展开为傅里叶级数

$$展开系数为\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)dx \\ a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

2、将奇偶周期函数 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上展开为傅里叶级数

$$当 f(x) 为奇函数时，展开系数为\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \\ b_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

此时的傅里叶展开式由于只含正弦函数表达式，故也称为正弦级数。

$$当 f(x) 为偶函数时，展开系数为\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l} f(x)dx \\ a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots) \\ b_n = 0 \end{cases}$$

此时的傅里叶展开式由于只含余弦函数表达式，故也称为余弦级数。

3、将非对称区间 $[0,l]$ 上的函数 $f(x)$ 展开为正弦级数或者余弦级数

$$[0,l]上的f(x)\begin{cases} \xrightarrow[\text{需作奇延拓}]{\text{若要求展开成正弦级数}} 得到[-l,l]上的奇函数f(x) \\ \xrightarrow[\text{需作偶延拓}]{\text{若要求展开成余弦级数}} 得到[-l,l]上的偶函数f(x) \end{cases}$$

$$当 f(x) 为奇函数时，展开系数为\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \\ b_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

此时的傅里叶展开式由于只含正弦函数表达式，即展开为了正弦级数。

$$当 f(x) 为偶函数时，展开系数为\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l} f(x)dx \\ a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots) \\ b_n = 0 \end{cases}$$

此时的傅里叶展开式由于只含余弦函数表达式，即展开为了余弦级数。

【例】将函数 $f\left(x\right)=1-x^2(0\le x\le\pi)$ 展开成余弦级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和。

第 13 讲 数学三专题内容

本讲是数学三专门的考点，也可以叫做微积分在经济学中的应用，主要包括：导数、积分、偏导数、无穷级数、微分方程等在经济上的应用，差分方程的解法等. 一般出题是 4 分的小题，有些年份出成 10 分左右的大题. 本讲的内容在考试大纲上是分散且隐蔽的，我们就不在这里写出考试内容，主要请看本讲的知识讲解和例题解析，那里有详细的归纳和说明.

第一节 基础知识

一、复利与连续复利

复利计算公式 $\boxed{A_m=A(1+r)^m}$

其中 A 表示一开始的本金，r 表示每一期的利率，m 表示复利的总期数，A_m 表示 m 年后的余额.

① 如果年利率为 r 的利息一年支付 1 次，那么当初始存款为 A 元时，t 年后余额 A_t 则为

② 如果年利率为 r 的利息一年支付 n 次，那么当初始存款为 A 元时，t 年后余额 A_t 则为

$$A_t=A(1+\frac{r}{n})^{nt}$$

③ 对于②，当 $n\to\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}A_t=\lim\limits_{n\to\infty}A(1+\frac{r}{n})^{nt}=Ae^{rt}$，这称为**连续复利**.

【注】考试时要弄清楚①②③三种情况，题目会明确告知.

二、边际与弹性

1、边际函数与弹性函数

（1）边际函数

设$f(x)$可导$\begin{cases}\text{数学上称}f'(x)\text{为一阶导数}\\\text{经济学上称}f'(x)\text{为边际函数}\end{cases}$，并称 $f'(x_0)$ 为$f(x)$在$x=x_0$处的边际值。

（2）弹性函数

设 $y=f(x)$ 可导，称 $E=\lim\limits_{\Delta x\to o}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=f'(x)\frac{x}{y}=f'(x)\frac{x}{f(x)}$ 为 $f(x)$ 的弹性函数，其主要反映 x 变化所致 $f(x)$ 变化的强弱程度或者叫灵敏度。

2、五个研究对象

（1）需求函数：设需求量为 Q，价格为 p，称 $Q=Q(p)$为需求函数，且一般为单减函数.

【注】**需求的价格弹性**为$\eta=\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}$

$$\begin{cases}（1）\ \eta=\dfrac{p}{Q}\dfrac{dQ}{dp}，从概念上说，由于\dfrac{dQ}{dp}<0,故\eta<0\\（2）当题设需求\eta>0时，我们取\eta=-\dfrac{p}{Q}\dfrac{dQ}{dp}\end{cases}$$

（2）供给函数：设供给量为 q, 价格 p，称 $q=q(p)$为供给函数，且一般为单增函数.

【注】**供给的价格弹性**为$\eta=\dfrac{p}{q}\dfrac{dq}{dp}>0$

（3）成本函数——总成本=固定成本+可变成本，即$C(x)=C_0+C_1(x)$，边际成本为$C'(x)$

（4）收益函数$R(x)$，边际收益为$R'(x)$

（5）利润函数$L(x)=R(x)-C(x)$，边际利润为$L'(x)$

三、一阶常系数线性差分方程

形如
$$y_{x+1}+ay_x=f(x).\qquad a\neq 0$$
的方程，称为一阶常系数线性差分方程.请同学们类比一阶常系数线性微分方程的解法去记忆，很容易记住.

（1）先看齐次方程. 对于$y_{x+1}+ay_x=0$，其特征方程为$\lambda+a=0\Rightarrow\lambda=-a$，则

通解为
$$y=C(-a)^x，\ C为任意常数.$$

（2）再看非齐次方程. $y_{x+1}+ay_x=P_m(x)\lambda^x$，其中$P_m(x)$为 x 的 m 次一般多项式，则

设定$y^*=\lambda^x Q_m(x)\cdot x^k$　　其中，$\begin{cases}1）\ \lambda^x照抄\\2）\mathrm{Q}_m(x)为x的m次一般多项式\\3）\ k=\begin{cases}0,\lambda\neq-a\\1,\lambda=-a\end{cases}\end{cases}$

第 14 讲 向量代数与空间解析几何

严格说来，向量代数与空间解析几何这一讲并不属于微积分的范畴，事实上，它是研究微积分的一种工具性知识，把握住了这些知识，我们就能够更方便地去研究，更深刻、更形象地去理解某些微积分的问题，在多元函数微积分学中较多得涉及到了这些知识（比如多元微分学的几何应用中有空间曲线的切线和法平面，空间曲面的切平面和法线；多元积分学的计算中涉及空间曲面的投影等等）. 本讲单独考题不多，但是正如上面所述，把握住这些工具性的知识，我们才能更好地应对某些综合性的考试大题.

1 向量的运算及其应用

对于$\vec a=(a_x,a_y,a_z),\ \vec b=(b_x,b_y,b_z),\ \vec c=(c_x,c_y,c_z)$

（1）$\boxed{\vec a\perp\vec b}\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\vec a\bullet\vec b=|\vec a||\vec b|\cos\theta=0\Leftrightarrow\boxed{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0}$

（2） $\boxed{\vec{a}\parallel\vec{b}} \Leftrightarrow \theta=0 \Leftrightarrow \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{matrix}\right\|=0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}}$

（3） $\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$ 三向量共面.

2 平面与直线

（1）平面方程 以下假设平面的法线向量 $\vec{n}=\left(A,B,C\right)$

点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(\varsigma-\varsigma_0)=0$

（2）直线方程 以下假设直线的方向向量 $\vec{\tau}=\left(l,m,n\right)$

点向式（标准式，对称式） $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$

3 曲线和曲面

1）空间曲线在坐标面上的投影（重点）

以求曲线 Γ 对 xOy 平面的投影曲线为例，

（1）将 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 中的 z 消去，得到 $\varphi(x,y)=0$，

（2）则曲线 Γ 在 xOy 面上的投影曲线包含于曲线 $\begin{cases}\varphi(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$.

曲线 Γ 对其他平面的投影曲线可类似求得.

2）旋转曲面（重点） 曲线 C 绕一条定直线旋转一周所形成的曲面

曲线 $C:\begin{cases}f\left(x,y\right)=0\\ x=0\end{cases}$ 沿 x 轴旋转所得旋转曲面方程为 $f\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$；

曲线 $C:\begin{cases}f\left(x,y\right)=0\\ x=0\end{cases}$ 沿 y 轴旋转所得旋转曲面方程为 $f\left(\pm\sqrt{x^2+z^2},y\right)=0$。

第 15 讲 多元函数微分学的几何应用、方向导数与梯度

承接向量代数和空间解析几何，本讲是数学一的专门内容，一般出题的形式是一个小题（4 分）或者是大题中的部分，总是，数学一每年都会在这个问题上出题.

第一节 多元函数微分学的几何应用

一、空间曲线的切线与法平面

1、空间曲线抓切向量

（1）设空间曲线Γ由参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$给出，其中，方程中的三个函数均可导，$P_0(x_0,y_0,z_0)$是$\Gamma$上的点，且当$t=t_0$时，$\varphi'(t_0)$，$\psi'(t_0)$，$\omega'(t_0)$都不为 0，则

曲线Γ在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的切向量为$\tau=\left\{\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\right\}$

这里的 τ 是指向 t 增加的方向

曲线Γ在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程为$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$.

曲线Γ在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的法平面（过$P_0(x_0,y_0,z_0)$点且与切线垂直的平面）方程为

$$\phi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

（2）设空间曲线Γ由交面式方程组$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$给出，则在以下表达式有意义的条件下，

曲线Γ在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的切向量为$\tau=\left\{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{P_0},\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{P_0},\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{P_0}\right\}$，

曲线Γ在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程为$\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{P_0}}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{P_0}}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{P_0}}$，

曲线Γ在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的法平面（过$P_0(x_0,y_0,z_0)$点且与切线垂直的平面）方程为

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{P_0}(x-x_0)+\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{P_0}(y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{P_0}(z-z_0)=0$$

二、空间曲面的切平面与法线

1 、空间曲面抓法向量

（1）设空间曲面Σ由方程$F(x,y,z)=0$给出，$P_0(x_0,y_0,z_0)$是Σ上的点，则

曲面Σ在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的法向量（垂直于该点切平面的向量）为

$$\vec{n}=\{F_x'(x_0,y_0,z_0),F_y'(x_0,y_0,z_0),F_z'(x_0,y_0,z_0)\}$$

且法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}$

曲面Σ在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面方程为

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

（2）设空间曲面Σ由方程$z=f(x,y)$给出，令$F(x,y,z)=f(x,y)-z$,则

曲面Σ在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的法向量（垂直于该点切平面的向量）为

$$\vec{n}=\{f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0),-1\}$$

且法线方程为 $$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

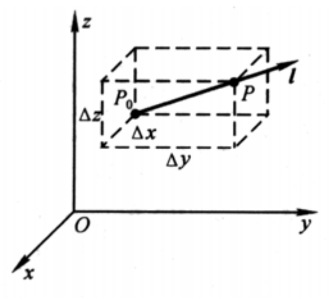
$$f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

第二节　方向导数与梯度

1、方向导数

在许多问题中，不仅要知道函数在坐标轴方向上的变化率（即偏导数），而且还要设法求得函数在某点沿着其他特定方向上的变化率.这就是本节所要讨论的方向导数.

定义　设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某空间邻域 $U\subset R^3$ 内有定义，l 为从点 P_0 出发的射线，$P(x,y,z)$ 为 l 上且在 U 内的任一点，且令



$$\begin{cases} x-x_0=\Delta x=t\cos\alpha \\ y-y_0=\Delta y=t\cos\beta \\ z-z_0=\Delta z=t\cos\gamma \end{cases}$$

以 $t=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$ 表示 P 与 P_0 之间的距离，如图所示，若极限

$$\lim_{t\to0^+}\frac{u(P)-u(P_0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{u(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

存在，则称此极限为函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 P_0 沿方向 l 的**方向导数**，记作 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}$.

定理（方向导数的计算公式）　设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 可微，则 $u=u(x,y,z)$ 在点 P_0 处沿任一方向 l 的方向导数都存在，且

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=u_x'(P_0)\cos\alpha+u_y'(P_0)\cos\beta+u_z'(P_0)\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为方向 l 的方向余弦.

2、梯度

在一个数量场中，在给定点沿不同的方向，其方向导数一般是不相同的，现在我们所关心的是：沿哪一个方向其方向导数最大？其最大值是多少？为此引进一个很重要的概念——梯度。**函数在点 P 沿哪一方向增加的速度最快？**

定义　设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 具有一阶偏导数，则定义

$$\left.\mathbf{grad}u\right|_{P_0}=\left\{u_x'(P_0),u_y'(P_0),u_z'(P_0)\right\}$$

为函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 P_0 处的**梯度**.

3、方向导数与梯度的关系

由方向导数的计算公式 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=u'_x(P_0)\cos\alpha+u'_y(P_0)\cos\beta+u'_z(P_0)\cos\gamma$ 与梯度的定义

$\left.\mathbf{grad}u\right|_{P_0}=\left\{u'_x(P_0),u'_y(P_0),u'_z(P_0)\right\}$，可得到

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=\left\{u'_x(P_0),u'_y(P_0),u'_z(P_0)\right\}\bullet\left\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right\}=\left.\mathbf{grad}u\right|_{P_0}\bullet\overrightarrow{l^o}$$

$$=\left|\left.\mathbf{grad}u\right|_{P_0}\right|\left|\overrightarrow{l^o}\right|\cos\theta=\left|\left.\mathbf{grad}u\right|_{P_0}\right|\cos\theta$$

其中θ为$\left.\mathbf{grad}u\right|_{P_0}$与$\overrightarrow{l^o}$的夹角，当$\cos\theta=1$时，$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}$有最大值.

结论：函数在某点的梯度是这样一个向量，它的方向与取得最大方向导数的方向一致, 而它的模为方向导数的最大值.

【注】散度与旋度在直角坐标中的计算公式

设向量$A(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，则

散度
$$divA=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

旋度
$$\mathbf{rotA}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

与梯度在一起，常称为三个度.

第 16 讲 三重积分、第一型曲线积分与第一型曲面积分

本讲和下一讲的内容本是高等数学的重头戏，一般是至少一个小题（4 分）和一个大题（11 分），而对于大多数考生而言，却是本科学习时的“强弩之末”—当大学一年级学到这里的时候，已经没了力气，没了劲头，学的不扎实，稀里糊涂的，再加上这部分内容确实比较难，计算量比较大，所以历来考研中得分率都不高. 可以这么说，哪一年这里的题目出难了，数学一的平均分就会低一些，反之亦反. 我们希望同学们好好复习这一讲内容，事实上并不是很难的事情，如果你能够掌握好它，就会比别人高出不少分数.

第一节 三重积分

【注】三重积分的精确定义

类比于定积分和二重积分，我们给出三重积分的精确定义：

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)dv=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i,c+\frac{d-c}{n}j,e+\frac{f-e}{n}k\right)\frac{b-a}{n}\frac{d-c}{n}\frac{f-e}{n}$$

这里的Ω不是一般的空间有界闭区域，而是一个“长方体区域”，如图所示.
类比以前，我们可以给出“凑三重积分定义” 的步骤如下：

①先提出$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$；

②再凑出 $\frac{i}{n}$、$\frac{j}{n}$ 与 $\frac{k}{n}$；

③由于 $\frac{i}{n}=0+\frac{1-0}{n}i$，故 $\frac{i}{n}$ 可以读作“0 到 1 上的 x”，

同理，$\frac{j}{n}=0+\frac{1-0}{n}j$，故 $\frac{j}{n}$ 可以读作“0 到 1 上的 y”，

$\frac{k}{n}=0+\frac{1-0}{n}k$，故 $\frac{k}{n}$ 可以读作“0 到 1 上的 z”，

且 $\frac{1}{n}=\frac{1-0}{n}$，既可以读作“0 到 1 上的 dx”，也可以读作“0 到 1 上的 dy”， “0 到 1 上的 dz”,于是，“凑定义”成功！

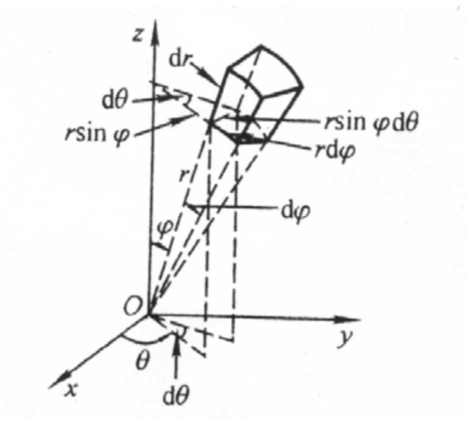
请看一个例子. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(n+i)(n^2+j^2)n}=$________.

【分析与解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n(n+i)(n^2+j^2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\frac{j^2}{n^2}\right)}\frac{k}{n}\frac{1}{n}\frac{1}{n}\frac{1}{n}$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\frac{z}{(1+x)(1+y^2)}dxdydz=\int_0^1\frac{1}{(1+x)}dx\int_0^1\frac{1}{(1+y^2)}dy\int_0^1 zdz=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

【球面法要点】



1.何时用球面法？

(1)被积函数中含 $\begin{cases}f(x^2+y^2+z^2)\\ f(x^2+y^2)\end{cases}$，且（2）积分区域为 $\begin{cases}\text{球或球的部分}\\ \text{锥或锥的部分}\end{cases}$

2.怎样定限？

1）从原点出发一条半射线（$0\to+\infty$），$\begin{cases}先碰到\Omega，记r_1(\varphi,\theta)\\后离开\Omega，记r_2(\varphi,\theta)\end{cases}$

2）顶点在原点，以z轴为对称轴的圆锥面半顶角（$0\to\pi$）$\begin{cases}先碰到\Omega，记\varphi_1(\theta)\\后离开\Omega，记\varphi_2(\theta)\end{cases}$

3）过z轴的半平面（$0\to2\pi$）$\begin{cases}先碰到\Omega，记\theta_1\\后离开\Omega，记\theta_2\end{cases}$

则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}d\varphi\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr$$

第二节 第一型曲线积分

对于平面情况.

（1）若平面曲线 L 由参数式 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$（$\alpha\le t\le\beta$）给出，则 $ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$，

且 $$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}dt$$

（2）若平面曲线 L 由 $\begin{cases}y=y(x)\\x=x\end{cases}\left(a\le x\le b\right)$给出，则 $ds=\sqrt{1+\left[y'(x)^2\right]}dx$，

且 $$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+\left[y'(x)^2\right]}dx$$

（3）若平面曲线 L 由 $L:r=r\left(\theta\right)\ \left(\alpha\le\theta\le\beta\right)$给出，则 $ds=\sqrt{\left[r(\theta)\right]^2+\left[r'(\theta)\right]^2}d\theta$，

且 $\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)\sqrt{\left[r(\theta)\right]^2+\left[r'(\theta)\right]^2}d\theta$

【例】计算 $I=\oint_L(x\sin\sqrt{x^2+y^2}+x^2+3y^2-5y)ds$，其中 $L:\dfrac{x^2}{3}+(y-1)^2=1$，其周长为 a.

【解】本题需要充分利用$\boxed{\text{技术性工具}}$化简计算，则很容易得出答案，这类题一般在考研中出成填空题.

由对称性知 $\oint_L x\sin\sqrt{x^2+y^2}ds=0$；$L$ 的方程可以化为 $x^2+3y^2-6y=0$，即 $x^2+3y^2-5y=y$，将边界方程带入被积函数，于是有

$$\oint_L(x^2+3y^2-5y)ds=\oint_L yds=\bar{y}\cdot a=a，故原式=a.$$

第三节 第一型曲面积分

一、基础性计算方法——化为二重积分

由于第一型曲面积分就是由二重积分推广而来的，所以计算第一型曲面积分的基本方法就是化为二重积分.

无论空间曲面 Σ 是由显式 $z=z(x,y)$ 还是隐式 $F(x,y,z)=0$ 给出的，我们都需要做三件事（无逻辑上的先后顺序，哪件事情最利于解题就先做哪件）：

$$\begin{cases} 1)\text{将}\Sigma\text{投影到某一平面（比如}xoy\text{面）上}\Rightarrow\text{投影区域}D\text{（比如}D_{xy}\text{）} \\ 2)\text{将}z=z(x,y)\text{或者}F(x,y,z)=0\text{代入}f(x,y,z) \\ 3)\text{计算}z'_x,\ z'_y\Rightarrow dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy \end{cases}$$

这就把第一型曲面积分化为了二重积分（如化成关于 x, y 的二重积分），得到

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}} f(x,\ y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$$

化成关于其他变量的二重积分与此类似，请大家自己独立给出积分表达式.

二、一个隐蔽的计算陷阱

这里有一点需要特别强调，将 Σ 投影到哪个平面上应该是由你自己决定的，但是 $\boxed{\Sigma\text{上的任何两点的投影点不能重合}}$，换言之，假如你要将 Σ 投向 xoy 面，则 $z=z(x,y)$ 必须是单值函数！忘记了这一点，就可能算错结果.

如果将 Σ 投向某一平面，但是曲面投影后有重合点，则

（1）要么将 Σ 转投向另一个平面，使得曲面投影后无重合点；

（2）要么将 Σ 分成若干曲面 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3\cdots$，使得这些曲面投影后无重合点.

上面这段话很重要，请大家通过后面的例题分析好好体会.

【例】设 P 为椭球面 S：$x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面与 xoy 面垂直，求点 P 的轨迹 C；并计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分。

【解】椭球面 S: $x^2+y^2+z^2-yz=1$ 在点 P 处的法向量是 $\vec{n}=(2x,2y-z,2z-y)$，又 xoy 面的法向量是 $\vec{k}=(0,0,1)$，于是，S 在点 P 处的切平面与 xoy 面垂直的充分必要条件是

$$\vec{n}\bullet\vec{k}=2z-y=0.$$

由此可得点 P 的轨迹 C 的方程为 $\begin{cases}2z-y=0,\\ x^2+y^2+z^2-yz=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2z-y=0,\\ x^2+\frac{3}{4}y^2=1,\end{cases}$

投影到 xoy 面，得 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+\frac{3}{4}y^2\le 1\right\}$，记曲面 Σ 的方程为 $z=z(x,y),(x,y)\in D$.

由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{2x}{y-2z}\right)^2+\left(\frac{2y-z}{y-2z}\right)^2}=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|},$$

所以

$$I=\iint_D \frac{(x+\sqrt{3})\,|\,y-2z\,|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|\,y-2z\,|}dxdy=\iint_D (x+\sqrt{3})dxdy\,.$$

又因为$\iint\limits_D xdxdy=0$，$\iint\limits_D \sqrt{3}dxdy=2\pi$，所以

$$I=\iint_D (x+\sqrt{3})dxdy=2\pi\,.$$

【注】这个题目从内容上来说是没有问题的，但是从设置上来说有值得商榷的地方. 本题所给的曲面 S：$x^2+y^2+z^2-yz=1$是一个“歪着的”椭球面（这是线性代数中二次型的几何背景问题，有些同学甚至连这一点也没搞清楚），在考场上大部分同学只能画出一个示意图，并且很多人看不出“S 在点 P 处的切平面与 xoy 面垂直”这句话保证了将Σ投向 xoy 面时，$z=z(x,y)$是单值函数，即没有重合点，所以有些人“纠结”在这个投影是否有重合上，做不下去导致丢分. 我并不是为这部分的同学开脱责任，事实上我要说的反而是那些不知道“投影不能重合”这一点的同学，他们不考虑这么多，直接投影便做出来了，我在很多学校的辅导课上做过这个测试，结果就是如此. “知道的越少，考虑的越少，反而做的越顺利”，这样是不是不太合适. 提出此点，读到这里的所有人都可以思考一下.

第四节 第二型曲线积分

【注】**场的概念**

什么叫“场”？从数学上说，**场**就是空间区域Ω上的一种对应法则.

（1）如果Ω上的每一点$P(x,y,z)$都对应着一个数量u，则在Ω上就确定了一个数量函数

$$u=u(x,y,z)$$

它表示一个**数量场**，数量场的例子很多，比如温度场.

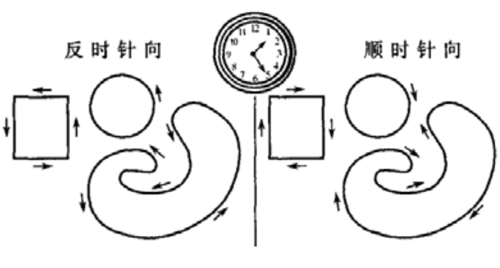
（2）如果Ω上的每一点$P(x,y,z)$都对应着一个向量$\mathbf{F}$，则在Ω上就确定了一个向量函数

$$\mathbf{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

它表示一个**向量场**，向量场的例子也很多，比如引力场.

格林公式　设平面有界闭区域 D 由分段光滑闭曲线 L 围成，$P\left(x,y\right),Q\left(x,y\right)$在 D 上连续且具有一阶连续偏导数，L 取正向，则

$$\oint_L P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma$$



（所谓 L 取正向，是指当一个人沿着 L 的正向前进时，$\boxed{\text{左手始终在 } L \text{ 所围成的 } D \text{ 内}}$，试想一下假如你在学校的环形操场上跑步，你的左手始终在草坪中，这就是正向，说明你跑的方向是对的.）

考试要点　一般来说，考试题目不可能直接满足能够使用格林公式的条件，命题人可以破坏两种条件：

（1）L 不是封闭曲线，也就是没有围成一个平面有界闭区域 D；

（2）即使 L 围成了一个平面有界闭区域 D，但是$P\left(x,y\right),Q\left(x,y\right),\dfrac{\partial P}{\partial y},\dfrac{\partial Q}{\partial x}$在 D 上不连续；

这两种情况下，不可以直接使用格林公式.

针对（1），我们可以采取“补线法”，补上一条或者若干条线，封闭出一个平面有界闭区域 D，就可以用格林公式了.看一个例子.

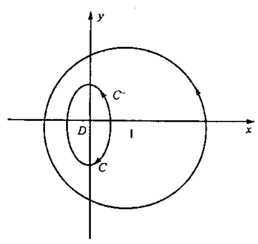
【例】已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|\ (x\in[-1,1])$，起点是 $(-1,0)$，终点为 $(1,0)$，则曲线积分 $\int_L xydx+x^2dy=$__________

【解】记 $\overline{L}: y=0(x\in[-1,1])$，起点是 $(1,0)$，终点为 $(-1,0)$，D 是由 L 与 $\overline{L}$ 围成的平面区域，利用格林公式及区域 D 关于 y 轴的对称性，得

$$\int_L xydx+x^2dy=\int_{L+\overline{L}} xydx+x^2dy-\int_{\overline{L}} xydx+x^2dy=-\iint_D(2x-x)dxdy-0=0$$

针对（2），我们可以采取“挖去法”，把不连续点（可称为“奇点”）挖去，使得条件得以满足，从而使用格林公式，这样说有些抽象，请看个例子.

【例】计算曲线积分 $\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以 $(1,0)$ 为圆心，$R(>1)$ 为半径的圆周，取逆时针方向。



解：（1）令 $P=\dfrac{-y}{4x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$，计算可得，当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 成立；

（2）但是 D 中包含点 $(0,0)$，所以 $P(x,y),Q(x,y),\dfrac{\partial P}{\partial y},\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 上统统不连续，这种情况下，不可以使用格林公式.

作足够小的椭圆（使其在 D 内部）C：$\begin{cases} x=\dfrac{\delta}{2}\cos\theta \\ y=\delta\sin\theta \end{cases}$，其中 θ 从 2π 到 0，取顺时针方向.

令 C 与 L 围成区域为 D，由格林公式，

$$I=\int_L Pdx+Qdy=\int_{L+C^-} Pdx+Qdy-\int_{C^-} Pdx+Qdy$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy-\int_{C^-} Pdx+Qdy=0-\int_{C^-} Pdx+Qdy=\int_C Pdx+Qdy=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{1}{2}\delta^2}{\delta^2}d\theta=\pi$$【注】

这里取 C 为上述椭圆周，最后计算最简单，如果取 C 为 $x=\delta\cos\theta$，$y=\delta\sin\theta$ 的圆周，那么最后的积分就比较复杂 $I=\int_0^{2\pi}\dfrac{\delta^2}{\delta^2\left[4\cos^2\theta+\sin^2\theta\right]}d\theta$

第五节 第二型曲面积分

（1）基础性计算方法——化为二重积分

对于第二型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$，可以将其拆成三个积分：$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz$，$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx$，$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$，分别投影到相应的坐标面上，化为二重积分计算，然后再加回去. 直观上，我们比较习惯投影到 xoy 面上去，所以以 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$ 为例.

无论空间曲面 Σ 是由显式 $z=z(x,y)$ 还是隐式 $F(x,y,z)=0$ 给出的，我们都需要做三件事（无逻辑上的先后顺序，哪件事情最利于解题就先做哪件）：

$$\begin{cases} 1)\text{将}\Sigma\text{投影到某一平面（比如}xoy\text{面）上}\Rightarrow\text{投影区域}D\text{（比如}D_{xy}\text{）} \\ 2)\text{将}z=z(x,y)\text{或者}F(x,y,z)=0\text{代入}f(x,y,z) \\ 3)\text{将}dxdy\text{写成“}\pm dxdy\text{”} \end{cases}$$

其中 Σ 为上侧、右侧、前侧时取“+”，否则取“－”

这就把第二型曲面积分化为了二重积分，得到

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$$

同样需要指出的是，投影时 Σ 上的任何两点的投影点不能重合，请回看。。。

（2）高斯公式法

高斯公式 设空间有界闭区域 Ω 由有向分片光滑闭曲面 Σ 围成，$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有公式

$$\oiint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

此外，根据两类曲面积分之间的关系，高斯公式也可表为

$$\oiint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

其中，Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 Σ 上点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

考试要点 一般来说，考试题目不可能直接满足能够使用高斯公式的条件，命题人可以破坏两种条件：

（1）Σ 不是封闭曲面，也就是没有围成一个空间有界闭区域 Ω；

（2）即使 Σ 围成了一个空间有界闭区域 Ω，但是 $P,Q,\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z}$ 在 Ω 上不连续；

这两种情况下，不可以直接使用高斯公式.

针对（1），我们可以采取“补面法”，补上一片或者若干片曲面，封闭出一个空间有界闭区域 Ω，就可以用高斯公式了.看一个例子.

【例】计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$,

其中 $\sum$ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧

【解】记 S 为平面 $z=0(x^2+y^2\le a^2)$ 的下侧，Ω 为 $\sum$ 与 S 所围成的区域空间

$$I=\iint\limits_{\Sigma+S}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$$
$$-\iint\limits_{S}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)dv+\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}ay^2dxdy$$
$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^4dr+\int_0^{2\pi}a\sin^2\theta d\theta\int_0^a r^3dr$$
$$=\frac{5}{6}\pi a^5+\frac{1}{4}\pi a^5=\frac{29}{20}\pi a^5$$

针对（2），我们可以采取“挖去法”，把不连续点（可称为“奇点”）挖去，使得条件得以满足，从而使用高斯公式，这样说有些抽象，请看个例子.

【例】计算曲面积分 $I=\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

【解】先计算 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$：（1）$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}})=\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$，

（2）$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}})=\frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$，（3）$\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}})=\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$，

故 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$.

被积函数及其偏导数在点（0，0，0）处不连续，取封闭曲面 $\Sigma_1:x^2+y^2+z^2=\delta^2$ 的外侧, 其中 δ 足够小以保证其在曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 内部，于是

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}=\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma+\Sigma_1^-}-\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma_1^-}=\iiint\limits_{\Omega_0}0dv+\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydxdz+zdxdy}{\delta^3}=\frac{1}{\delta^3}\iiint\limits_{\Omega:x^2+y^2+z^2\le\delta^2}3dv=\frac{3}{\delta^3}\cdot\frac{4\pi\delta^3}{3}=4\pi$$

