

附 参考答案与解析

2006 年北京—黄冈高考最后冲刺预测试卷(一) 测试报告

相关事项 测试学校	难度系数	平均分	最高分	140 分以上 人数百分比	130 ~ 140 分 人数百分比	120 ~ 130 分 人数百分比	110 ~ 120 分 人数百分比	100 ~ 110 分 人数百分比
黄冈高级中学	0.57	102.5	146	4.5%	8.6%	9.5%	12%	19.5%

【测试总评】从学生的答卷来看,该套试卷中的绝大多数题目,下手容易,做起来顺畅.即使是一些感到未曾相识的题目,只要解答时细心、认真,多费心思,广泛联想,展开思维,也是不难突破的.下面列举说明试题的特色.

1. 在选择题中,第3题是三角函数的变形,解答时,多数学生都可以做到一望而解.第5题涉及圆锥曲线的问题,紧扣定义,也是学生熟悉的解题策略,这也称得上是解答解析几何试题的通用通法.第7题是一道立体几何判断性问题,没有图形,就要画出图形,教室的黑板面和地面形成的二面角又是我们熟悉的图形,它的作用是很大的.第11题从“黄金椭圆”到“黄金双曲线”的联想,一些解题高手是能够感觉到答案的.当然,部分学生在研究双曲线时,并没有另画图形,而是借助椭圆的图形,这显然减少了解题的时间.

2. 在填空题中,第13题部分学生只得出了一个答案,缺乏解题思维的全面性,看来,“会则对,对则全”的训练模式是该强化的.第16题建立函数关系,似乎人人都能办得到,而求最值的途径又有很多.诸如二次函数法,二元均值不等式法,导数法等.当然,在草纸上的书写多了,就有些浪费时间.

3. 在解答题中,第17题,判断一个函数不是奇函数,也不是偶函数,其表述比较混乱,这也说明了学生对新颖的情景把握的不是那么好.一个对应的问题是,2005年高考中,设计了一道证明一条直线不是给定曲线的切线,这也是比较少见的.第19题是一道数列试题,对于等比数列的前 n 项和公式,一部分学生解答时缺少了公比 $q=1$ 的情形.

1. D 在 $\frac{1}{5}S_n = a_n - 1$ 中取 $n=1$,得 $S_1 = 5a_1 - 5$,即 $a_1 = \frac{5}{4}$. 在 $\frac{1}{5}S_n = a_n - 1$ 中,取 $n=2$,得 $a_1 + a_2 = 5a_2 - 5$, $\frac{5}{4} + a_2 = 5a_2 - 5$,所以 $a_2 = \frac{25}{16}$.

评析 学习数学要多思多想,试问:该数列 $\{a_n\}$ 的通项你可以求出来吗?

2. B 因为正方形的面积是16,内切圆的面积是 4π ,所以豆子落入圆内的概率是 $\frac{4\pi}{16} = \frac{\pi}{4}$.

评析 概率是高中的新知识,学习时应当紧扣课本的概念,透彻地理解概念的本质,这样就能快速解答问题.

3. A 由 $\tan \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = -\sqrt{3}$,得 $\frac{\sin \alpha - 1}{\cos \alpha} = -\sqrt{3}$,即 $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{3}$,

对左边分式的分子与分母同乘以 $1 + \sin \alpha$,得 $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + 1} = \sqrt{3}$.

评析 该问题中隐藏了三角函数当中的半角公式.

4. C $\because f(x) = 2\sin|x - \frac{\pi}{2}|$, $\therefore f(\pi - x) = 2\sin|\pi - x - \frac{\pi}{2}| = 2\sin|\frac{\pi}{2} - x| = f(x)$, $\therefore f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称.于是,就可以排除 A、B、D.

评析 在函数的解析式与图象之间建立关系,我们也可以取图象上的特殊点的坐标,代入函数的解析式进行验证.

5. (理) A 显然有 $P(x, y)$, $A(-\sqrt{5}, 0)$, $B(\sqrt{5}, 0)$. 由 $|\vec{AP}| + |\vec{BP}| = 6$ 知,动点 P 的轨迹为以 $A(-\sqrt{5}, 0)$, $B(\sqrt{5}, 0)$ 为焦点,长轴长为6的椭圆,其方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$,令 $x = 3\cos \theta$, $y = 2\sin \theta$,则

$|2x - 3y - 12| = |6\sqrt{2}\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) - 12|$,

当 $\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = -1$ 时, $|2x - 3y - 12|$ 取最大值 $12 + 6\sqrt{2}$.

评析 考查曲线上的点的坐标的设法,本题采用参数的办法是比较有效的.例如椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上点的坐标可以设为 $(a\cos \theta, b\sin \theta)$.

圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 (r > 0)$ 上点的坐标可以设为 $(a + r\cos \theta, b + r\sin \theta)$. 若记住了一些基本的解题的小结论,你就可以快速地进行模式的转化,提高你的解题能力,这也是你成为解题高手的关键所在.

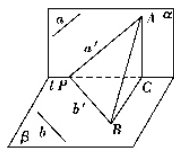
(文) A 因为关系式 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}}$ 的几何意义是动点 $P(x, y)$ 到定点 $F(1, 3)$ 的距离等于它到定直线 $l: x + y + 1 = 0$ 的距离,所以动点 $P(x, y)$ 的运动轨迹是抛物线.

评析 圆锥曲线的定义是解答解析几何问题的基本原理,我们需要很好的把握,反复的思考,体会其中的奥妙所在.试问:将关系式改为 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \frac{|x+y-4|}{\sqrt{2}}$,结论又如何呢?

6. A 因为函数 $f(x) = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$ 在 $x \in [2, 4]$ 上是减函数,所以当 $x=2$ 时, $f(x)_{\max} = f(2) = 3$; 当 $x=4$ 时, $f(x)_{\min} = f(4) = \frac{5}{3}$.

评析 研究线性分式函数 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ 的性质,比如:单调性,中心坐标,最值,画出图象等等,这是高考经常考查的热点之一.

7. C 如图,在 l 上任取一点 P ,过 P 分别在 α 、 β 内作 $a' \parallel \alpha$, $b' \parallel \beta$,在 a' 上任取一点 A ,过 A 作 $AC \perp l$,垂足为 C ,则 $AC \perp \beta$,过 C 作 $CB \perp b'$ 交 b' 于 B ,连 AB ,由三垂线定理知 $AB \perp b'$, $\therefore \triangle APB$ 为直角三角形,故 $\angle APB$ 为锐角.从而应当选 C.



评析 画图的目的是什么?图形的画法惟一吗?读者都应该自己想想.事实上,本题的解题目标可以转化为求直线 a 和 b 的交角范围.

8. C 显然, $M = \{x \in \mathbf{R}, a-1 \leq x \leq a+1\}$, $N = \{x \in \mathbf{R}, 1-a^2 \leq x \leq 1+a^2\}$. 假设 M 是 N 的真子集,则有 $\begin{cases} 1+a^2 \geq a+1 \\ 1-a^2 < a-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1-a^2 \geq a+1 \\ 1-a^2 < a-1 \end{cases}$.

解得 $a > 1$ 或 $a \leq -2$. 于是,集合 M 不是 N 的真子集时,必有实数 $-2 < a \leq 1$.

评析 当问题的正面难以解答时,我们不妨考虑问题的反面,也就是采用补集的思想来求解,这就是我们所说的“正难则反”原理.

9. B 设 $y = f^{-1}(x+a)$, 则 $x+a = f(y)$, 即 $y = f^{-1}(x+a)$ 的反函数为 $y = f(x) - a$, 所以 $f(x) - a = f(x+a)$, 取 $x=a$, 得 $f(2a) = f(a) - a = 0$.

评析 从求函数 $y = f^{-1}(x+a)$ 的反函数,得到一个函数方程 $f(x) - a = f(x+a)$, 也就是 $f(x+a) = f(x) - a$. 再赋予 x 的特殊值就可以得出答案了.试问:在原问题的情景下,我们可以求出 $f(2005a)$ 的值吗?

10. C 由 $4^x = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 得出 $f(x) = \frac{4^x - 1}{4^x + 1}$.

由 $4^{x_1} = \frac{1+f(x_1)}{1-f(x_1)}$, $4^{x_2} = \frac{1+f(x_2)}{1-f(x_2)}$ 两式相乘,并注意关系

$f(x_1) + f(x_2) = 1$, 得

$4^{x_1+x_2} = \frac{1+[f(x_1)+f(x_2)]+f(x_1)f(x_2)}{1-[f(x_1)+f(x_2)]+f(x_1)f(x_2)}$

$= \frac{2+f(x_1)f(x_2)}{f(x_1)f(x_2)} = 1 + \frac{8}{4f(x_1)f(x_2)}$

$\geq 1 + \frac{8}{[f(x_1)+f(x_2)]^2} = 9$ (当 $f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{2}$ 时取得

等号). 于是 $f(x_1+x_2) = \frac{4^{x_1+x_2}-1}{4^{x_1+x_2}+1} = 1 - \frac{2}{4^{x_1+x_2}+1} \geq 1 - \frac{2}{9+1} = \frac{4}{5}$.

评析 本题的计算量是比较大的,如果要 $f(x_1) = \frac{4^{x_1}-1}{4^{x_1}+1}$, $f(x_2) = \frac{4^{x_2}-1}{4^{x_2}+1}$ 代入条件 $f(x_1) + f(x_2) = 1$ 其运算量是否更大呢?这种解答思路行得通吗?

11. A 猜想出“黄金双曲线”的离心率 e 等于 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 事实上对直角 $\triangle ABF$ 应用勾股定理,得 $|AF|^2 = |BF|^2 + |AB|^2$, 即有 $(a+c)^2 = (b^2+c^2) + (a^2+b^2)$, 注意到 $b^2 = c^2 - a^2$, $e =$

$$\frac{c}{a}, \text{ 变形得 } e^2 - e - 1 = 0, \text{ 从而 } e = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

评析 类比推理、类比发现是近年高考的一个新的亮点. 这种问题的情景比较清晰, 结构比较巧妙, 变化比较合理, 是用“活题”考能力的典范.

12. D 本题是一道加速行程问题, 需要运用物理知识建立数学模型, 即通过加速运动建立二次函数关系式.

若经 t 秒人刚好追上汽车, 则 $S + 25 = 6t$, 由 $S = \frac{1}{2}t^2$, 得

$$\frac{1}{2}t^2 - 6t + 25 = 0 \Rightarrow t^2 - 12t + 50 = 0. \text{ 考虑距离 } d = (S +$$

$$25) - 6t = \frac{1}{2}t^2 - 6t + 25 = \frac{1}{2}(t-6)^2 + 7, \text{ 故当 } t = 6 \text{ 秒时,}$$

d 有最小值 7 米, 即人与汽车最少相距 7 米, 故选 D.

评析 本题属于跨学科综合题, 要求将物理问题抽象成数学问题, 利用数学工具, 通过推理和计算解决物理问题, 这也是今后数学高考命题的趋势之一.

13. 2 或 6 圆的标准方程为 $(x+2)^2 + y^2 = 1$, 于是切线方程为 $x = -1$ 或 $x = -3$, 所以 $p = 2$ 或 6.

评析 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线 $x = -\frac{p}{2}$ 是动态的, 它与圆相切有两个位置, 显示了问题的多解性.

14. $(\frac{\sqrt{3}}{12}, +\infty)$ 由题意可知 $PC \perp AB$,

因而四边形 $EFGH$ 为矩形. 设正三棱锥的侧棱 $PA = x$, 则 $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} =$

$\frac{x}{4}$, 设 P 在平面 ABC 上的射影为 O ,

连 AO , 则 $AO = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 在 $\text{Rt} \triangle AOP$ 中,

$$PA > AO, \text{ 从而 } x > \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 即 } S > \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

评析 显然, 点 P 到平面 ABC 的距离可以无限大, 这时 S 也可以无限大. 该问题可以在课本上找到它的影子, 你知道吗? 数学学习请别远离课本, 因为有些考题的生长点就在课本上.

15. 384 将集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ 中的元素按被 3 除所得的余数进行分类: $A_0 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $A_1 = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$, $A_2 = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\}$, 由三个数之和能被 3 整除, 故三个数均取自同一个集合或在 A_0, A_1, A_2 中各取一个 $C_6^3 + C_6^2 + C_6^2 + C_6^1 C_6^1 C_6^1 = 384$.

评析 分类思想是解答数学问题的一种有效的方法, 怎么分类, 依据怎样的标准, 这完全因题而异. 这需要在练习中感悟和反思.

16. 300m^2 如图, 设地基的长和宽分别为 x m, y m, 其中 $0 < x < 40$, $0 < y < 30$, 面积 $S = xy$.

$$\therefore \frac{EF}{AC} = \frac{BF}{BC},$$

$$\therefore \frac{x}{40} = \frac{30-y}{30}, 3x = 120 - 4y.$$

$$\therefore S = xy = \frac{1}{3} \cdot 3x \cdot y = \frac{1}{3} \cdot (120 - 4y) \cdot y$$

$$= \frac{4}{3} \cdot (30y - y^2) = -\frac{4}{3}[(y-15)^2 - 225].$$

$$\therefore 0 < y < 30,$$

$$\therefore \text{当 } y = 15 \text{ 时 (此时 } x = 20), S_{\max} = 300 \text{ m}^2.$$

评析 本题的解答有点相似于 2005 年全国高考卷 III 理科试题第 16 题. 这类问题可以有多种解法, 请读者自己去探索, 去寻找, 去感受.

17. (1) $f(\frac{\pi}{4}) = 1 + |1 - 2| + 1 = 3, f(-\frac{\pi}{4}) = 1 + |-1 - 2| + 1 =$

5. 显然 $f(-\frac{\pi}{4}) \neq f(\frac{\pi}{4}), f(-\frac{\pi}{4}) \neq -f(\frac{\pi}{4})$, 所以, 函数 $f(x)$ 既不是奇函数, 也不是偶函数.

(2) 令 $t = \tan x$, 则 $t \in \mathbb{R}$, 于是 $f(x) = g(t) = t^2 + |t - 2| + 1, t \in \mathbb{R}$. 于是有 $g(t) = \begin{cases} t^2 + t - 1, & (t \geq 2) \\ t^2 - t + 3, & (t < 2) \end{cases}$, 由于 $g(t)$ 在 $[2, +\infty)$ 上的

最小值为 $g(2) = 5$, 在 $(-\infty, 2)$ 内的最小值为 $g(\frac{1}{2}) = \frac{11}{4}$,

所以函数 $g(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的最小值为 $\frac{11}{4}$. 故函数 $f(x)$

的最小值为 $\frac{11}{4}$.

评析 绝对值函数在高考当中是一个冷点, 复习时可要注意呀. 我们判断一个函数的奇偶性是比较常见的问题, 而既不是奇函数, 又不是偶函数的解答题却比较少见的, 这只要举出反例.

18. (1) $\therefore$ 点数最大为 6, 抛掷 n 次点数之和的最大值为 $6n, 6 \times 4 > 4^2, 6 \times 5 > 5^2, 6 \times 6 = 6^2, 6 \times 7 < 7^2, \dots$, 当 $n \geq 6$ 时, 点数之和不可能大于 n^2 , 即过关的概率为 0.

$\therefore$ 最多能连过 5 关.

(2) 记第 n 次过关为事件 A_n , 基本事件总数为 6^n .

第一关 $\therefore 1^2 = 1, \therefore$ 只要点数不小于 2, $\therefore P(A_1) = \frac{5}{6}$;

第二关 $2^2 = 4, A_2$ 即“不能过第 2 关”依次取 $a = 2, 3, 4$, 解不定方程 $x + y = a$,

$$C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 = 6, \therefore P(A_2) = 1 - P(\bar{A}_2) = 1 - \frac{6}{6^2} = \frac{5}{6};$$

第三关 $\therefore 3^2 = 9$, 依次取 $a = 3, 4, \dots, 9$, 解 $x + y + z = a$,

$$C_2^2 + C_3^2 + \dots + C_7^2 + (C_8^2 - 3) = C_9^3 - 3 = 81,$$

$$\therefore P(A_3) = 1 - \frac{81}{6^3} = \frac{5}{8},$$

$$\therefore \text{连过前 3 关的概率 } P = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{8} = \frac{125}{288}.$$

评析 概率问题是高考命题的主干知识, 涉及到的问题情景是常考常新的, 多数是与生活实际和生产实际相关联的.

19. 解法一 (1) 在 $\triangle A_1 C_1 N$ 中, $A_1 C_1 = 1, C_1 N = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

由余弦定理知,

$$A_1 N^2 = A_1 C_1^2 + C_1 N^2 - 2 A_1 C_1 \cdot C_1 N \cos A_1 C_1 N = 1 + (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2 -$$

$$2 \cdot 1 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \cos 45^\circ = \frac{5}{9}, \text{ 在 } \text{Rt} \triangle BB_1 N \text{ 中, } BN^2 = BB_1^2 + B_1 N^2$$

$$= a^2 + (\frac{\sqrt{2}}{3})^2 = a^2 + \frac{2}{9},$$

在 $\text{Rt} \triangle AA_1 B$ 中, $A_1 B^2 = AA_1^2 + AB^2 = 1 + a^2$.

在 $\text{Rt} \triangle A_1 M N$ 和 $\text{Rt} \triangle B M N$ 中, $MN^2 = A_1 N^2 - A_1 M^2 = BN^2 - BM^2$, 即

$$MN^2 = \frac{5}{9} - \frac{1}{9} \cdot (1 + a^2) = a^2 + \frac{2}{9} - \frac{4}{9} \cdot (1 + a^2), \text{ 即 } a^2 = 1, \text{ 即}$$

$$a = 1, MN = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(2) 由 $S_{\triangle PA_1 B} = \frac{1}{2} \cdot A_1 B \cdot h$ (h 是 $\triangle PA_1 B$ 的 $A_1 B$ 边上的高) 知, 要使 $\triangle PA_1 B$ 的面积取得最小值, 只需 h 最小, 而 h 的最小值, 即为异面直线 $A_1 B$ 与 $B_1 C_1$ 间的距离.

$$\text{在 } \text{Rt} \triangle A_1 C_1 M \text{ 中, } C_1 M^2 = A_1 C_1^2 + A_1 M^2 = 1 + (\frac{\sqrt{2}}{3})^2 = \frac{11}{9},$$

$$\text{在 } \triangle MNC_1 \text{ 中, } MN^2 = \frac{1}{3} = \frac{11}{9} - (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2 = MC_1^2 - C_1 N^2.$$

故 $MN \perp B_1 C_1$, 而 $MN \perp A_1 B$, 所以 MN 是异面直线 $A_1 B$ 与 $B_1 C_1$ 的公垂线, 从而异面直线 $A_1 B$ 与 $B_1 C_1$ 间的距离是 $MN = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

即 $h_{\min} = MN = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 即 P 点与 N 重合时, $\triangle PA_1 B$ 的面积取得最小值.

解法二 (1) 以 A 为原点, 射线 AB, AC, AA_1 分别为 x, y, z 轴的正半轴建立空间直角坐标系, 则 $\overrightarrow{A_1 B} = (1, 0, -a), \overrightarrow{MN} = (\frac{1}{3},$

$$\frac{1}{3}, \frac{a}{3}). \text{ 由 } \overrightarrow{A_1 B} \perp \overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{A_1 B} \cdot \overrightarrow{MN} = 0, \text{ 得}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{a^2}{3} = 0 \Rightarrow a = 1, |\overrightarrow{MN}| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(2) 设 $P(t, 1-t, 1)$, 于是 $\overrightarrow{A_1 P} = (t, 1-t, 0), \overrightarrow{A_1 B} = (1, 0, -1)$, 设 $\overrightarrow{A_1 B}$ 与 $\overrightarrow{A_1 P}$ 所成的角为 θ .

$$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{A_1 P}| \cdot |\overrightarrow{A_1 B}|}{|\overrightarrow{A_1 P}| \cdot |\overrightarrow{A_1 B}|} = \frac{t}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2t^2 - 2t + 1}} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{3t^2 - 4t + 2}}{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}}.$$

$$S_{\triangle PA_1 B} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1 B}| \cdot |\overrightarrow{A_1 P}| \cdot \sin \theta = \frac{\sqrt{3t^2 - 4t + 2}}{2}.$$

则当 $t = \frac{2}{3}$ 时, $S_{\min} = \frac{\sqrt{6}}{6}$. 即当点 P 与 N 重合时, $\triangle PA_1 B$ 的面

积才能取得最小值 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

评析 此题也可将直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成正方体,问题转化为求正方体相邻两个异面的面对角线间的距离.

20. 因为本题综合了命题、等比数列、等差数列,又有一定的开放性,所以,在未来的高考中是有可能出现类似问题的.先写出逆命题,再用基本元素(首项、公比)表示其他的元素.

(1) 逆命题:在等比数列 $\{a_n\}$ 中,前 n 项和为 S_n ,若 a_m, a_{m+2}, a_{m+4} 成等差数列,则 S_m, S_{m+2}, S_{m+4} 成等差数列.

(2) 设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ,公比为 q ,由已知得 $2a_{m+2} = a_m + a_{m+4}$,于是有 $2a_1q^{m+1} = a_1q^m + a_1q^{m+4}$,
 $a_1q^m \neq 0, q \neq 0, \therefore 2q^2 - q - 1 = 0$,

$\therefore a_1 \neq 0, q \neq 0, \therefore 2q^2 - q - 1 = 0$,

$\therefore q = 1$ 或 $q = -\frac{1}{2}$.

当 $q = 1$ 时,

$\therefore S_m = ma_1, S_{m+2} = (m+2)a_1, S_{m+4} = (m+4)a_1$,

$\therefore S_m + S_{m+4} \neq 2S_{m+2}, \therefore S_m, S_{m+2}, S_{m+4}$ 不成等差数列.

当 $q = -\frac{1}{2}$ 时,

$$\therefore 2S_{m+2} = \frac{2a_1[1 - (-\frac{1}{2})^{m+2}]}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}a_1[1 - (-\frac{1}{2})^{m+2}],$$

$\therefore S_m + S_{m+4} = 2S_{m+2}$,

$\therefore S_m, S_{m+2}, S_{m+4}$ 成等差数列.

综上得:当公比 $q = 1$ 时,逆命题为假;当公比 $q = -\frac{1}{2}$ 时,逆命题为真.

评析 对公比进行分类是本题解题的关键所在,问题好在分类,活在逆命题亦假亦真二者兼顾,可谓是一道以知识呈现能力立意的新颖试题.

21. (1) 设切点为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,则过 $A(x_1, y_1)$ 处切线方程为 $y - y_1 = 2ax_1(x - x_1)$ 即 $y = 2ax_1x - ax_1^2 = 2ax_1x - y_1$,同理,过 $B(x_2, y_2)$ 处切线方程为 $y = 2ax_2x - y_2$.

又 $P(x_0, y_0)$ 在上述两切线上,

$\therefore y_0 = 2ax_1x_0 - y_1, y_0 = 2ax_2x_0 - y_2$,

$\therefore$ 过 A, B 两点的直线方程为 $y_0 = 2ax_0x - y$,即 $y = 2ax_0x - y_0$.

(2) 联立 $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = 2ax_0x - y_0 \end{cases}$,得 $ax^2 - 2ax_0x + y_0 = 0$,

$\therefore x_1 + x_2 = 2x_0, x_1x_2 = \frac{y_0}{a}$,又 $F(0, \frac{1}{4a})$,

$$\therefore |AF| \cdot |BF| = \sqrt{x_1^2 + (y_1 - \frac{1}{4a})^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + (y_2 - \frac{1}{4a})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{y_1}{a} + y_1^2 - \frac{y_1}{2a} + (\frac{1}{4a})^2} \cdot \sqrt{\frac{y_2}{a} + y_2^2 - \frac{y_2}{2a} + (\frac{1}{4a})^2}$$

$$= (y_1 + \frac{1}{4a})(y_2 + \frac{1}{4a}) = y_1y_2 + \frac{1}{4a}(y_1 + y_2) + \frac{1}{16a^2}$$

$$= ax_1^2 \cdot ax_2^2 + \frac{1}{4a}(ax_1^2 + ax_2^2) + \frac{1}{16a^2}$$

$$= y_0^2 + \frac{1}{4}[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] + \frac{1}{16a^2}$$

$$= y_0^2 - \frac{1}{2a}y_0 + \frac{1}{16a^2} + x_0^2$$

$$= (y_0 - \frac{1}{4a})^2 + x_0^2 = |PF|^2.$$

评析 解析几何试题的运算量是比较大的,这就要求我们在复习时,明确解题目标,清楚解题的思维路线,寻求简捷合理的解题过程.

22. (理) (1) $f'(x) = \frac{x+m-1}{x+m} (x > -m)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1 - m$.

$\therefore$ 当 $-m < x < 1 - m$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 1 - m$ 时, $f'(x) > 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(-m, 1 - m)$ 内是减函数,在 $(1 - m, +\infty)$ 内是增函数,当 $x = 1 - m$ 时,函数 $f(x)$ 有极小值 $1 - m$.

(2) 由(1)知, $f(x)$ 在定义域 $(-m, +\infty)$ 内只有一个极值点,所以 $f(x)$ 的最小值就是 $1 - m$,从而当 $1 - m \geq 0$ 时,不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立,故所求的实数 m 的取值范围是 $m \leq 1$.

(3) $\therefore m > 1, \therefore f(1 - m) = 1 - m < 0$.

又 $f(e^m - m) = e^m - m - \ln(e^m - m + m) = e^m - 2m$,

$\therefore e > 2, m > 1, m \in \mathbb{N}$,

$$\therefore e^m - 2m > 2^m - 2m \geq C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 - 2m = \frac{1}{2}(m - 1)(m - 2) \geq 0,$$

$\therefore f(e^m - m) > 0$.

因此,根据问题中所给定理,方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[1 - m, e^m - m]$ 内有惟一的实根.

评析 需要指出的是,问题当中给出的定理是高等数学里的一个结论. 给出一个新的定理,由此解答相关的问题,考查了分析问题和解决问题的能力,也是我们在学习时应关注的命题动向.

(文) (1) 容易计算得 $f(0) = 2, f(1) = 0, f(2) = 1$.

当 $x = 0$ 时, $f_3(0) = f(f(f(0))) = f(f(2)) = f(1) = 0$;

当 $x = 1$ 时, $f_3(1) = f(f(f(1))) = f(f(0)) = f(2) = 1$;

当 $x = 2$ 时, $f_3(2) = f(f(f(2))) = f(f(1)) = f(0) = 2$.

即对任意 $x \in A$,恒有 $f_3(x) = x$.

$$(2) f_1(\frac{8}{9}) = 2(1 - \frac{8}{9}) = \frac{2}{9},$$

$$f_2(\frac{8}{9}) = f(f(\frac{8}{9})) = f(\frac{2}{9}) = \frac{14}{9},$$

$$f_3(\frac{8}{9}) = f(f_2(\frac{8}{9})) = f(\frac{14}{9}) = \frac{14}{9} - 1 = \frac{5}{9},$$

$$f_4(\frac{8}{9}) = f(f_3(\frac{8}{9})) = f(\frac{5}{9}) = 2(1 - \frac{5}{9}) = \frac{8}{9},$$

不难观察发现其周期性,一般地, $f_{4k+r}(\frac{8}{9}) = f_r(\frac{8}{9}) (k, r \in \mathbb{N})$.

$$f_{2006}(\frac{8}{9}) = f_{4 \times 501 + 2}(\frac{8}{9}) = f_2(\frac{8}{9}) = \frac{14}{9}.$$

评析 函数迭代是一类有意思的数学问题,它的背景根植于高等数学的内容. 其中,蕴含着周期函数,这需要读者去探索、去挖掘、去发现.

2006 年北京—黄冈高考最后冲刺预测试卷(二)

相关事项 测试学校	难度系数	平均分	最高分	140 分以上 人数百分比	130 ~ 140 分 人数百分比	120 ~ 130 分 人数百分比	110 ~ 120 分 人数百分比	100 ~ 110 分 人数百分比
清华附中	0.51	98	148	3.2%	6.1%	9.2%	11.3%	16.2%

【测试总评】 本套试卷难度与 2005 年全国卷相比略有偏高,试卷侧重考查重点章节的题型与典型的数学思想方法,如“数形结合”的思想、分类讨论的思想、待定系数法、点差法等. 由上表测试情况可反映出尖子生较少,说明了学生对于新的题型不能灵活应对. 从答卷上看,很多学生时间不够用,说明多数学生计算不够熟练,解题不能快速准确地找到切入点. 在后期的复习中应从计算技能、题型方法的总结及演变方面、解题的策略方面加以强化.

1. (理) A 原式分子分母同乘 i 得 $\frac{-2i-1}{1+2i} = -1$, 故选 A.

评析 复数的计算除了要熟悉 i 的高次幂计算、 ω 的计算技巧外,还要注意形如 $\frac{a+bi}{b-ai}$ 的计算方法.

(文) A $f(x) \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x-2}} = 1$.

评析 注意口诀“积为定值、和有最小”及“正、定、等”缺一不可.

2. D $\therefore A = \{x | -3 < x < 4\}, \therefore$ 由 $x \in A$ 及 $4 - (-3) > 2\pi$ 得 $B = \{x | -2 \leq y \leq 2\}, \therefore B \cap A = B$.

评析 注意 $(-3, 4)$ 区间包含 $y = 2 \cos x$ 的一个周期长度, $\therefore y = 2 \cos x$ 可取到最大值 2 和最小值 -2.

3. C $p \wedge q$ 一真一假时①不成立,由 $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ 知②成立;

逆否命题与原命题等价, $\therefore$ ③正确. 对于④,当 a, b 同正或异号时明显成立,当 a, b 同负时则有 $a > b \Rightarrow 0 < -a < -b \Rightarrow (-a)^n < (-b)^n \Rightarrow -a^n < -b^n \Rightarrow a^n > b^n$,即④正确.

评析 本题考查不等式的基本性质和命题间的关系,只有熟悉基本知识才能灵活应变. 本题的难点在于命题④的判定,该命题是课本性质的一个拓展,要求学生分清 n 为奇数与偶数的不同.

4. C 大人的座位可能是 A、C、E 或 B、D、F,故大人入座的方法数为 $2A_3^3$,而小孩入座剩下座位的方法有 A_3^3 种,由分步计数法原理知方法总数为 $2A_3^3 \cdot A_3^3 = 72$.

评析 分步计数原理与分类计数原理是分解转化复杂排列组合问题的有效途径,解排列组合问题常用方法还有插空法、捆绑法、隔板法等.

5. B 第5行公比为2,故第5行第4列的数为128;4和256所在的对角线构成数列的公比为4,第4行第4列的数为64;第4列的公比为2,∴ $a=64 \times 2^{-3}=8$.

评析 解题的关键在于等比数列中 $a_n=a_m q^{n-m}$,切入点在于先求得第4列的两个数.

6. D 由对称性知 $k=1, \frac{-k}{2} + \frac{-m}{2} - 1 = 0, \therefore m = -3$,画可行域移动目标函数 $z=x+y$ 的图象知,当 $z=x+y$ 过点 $(-1,0)$ 时, $z_{\min}=-1$.

评析 此题为线性规划问题,解题关键是要突破圆上点关于直线对称这个背景.

7. (理) C 由 $y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}(1 - \frac{1}{x})$ 知 $1 > x > 0$ 时 $y' < 0$, $x > 1$ 时 $y' > 0$;∴ $x=1$ 时 $y_{\min}=1$,即 $f(x)$ 的值域为 $[1, +\infty)$,∴当 $k < 1$ 时,方程 $\ln x + \frac{1}{x} = k$ 无解.

评析 “对于实数 $k \in B$,在集合 A 中不存在原象”等价于方程 $\ln x + \frac{1}{x} = k$ 无解,解题的关键在于利用导数求 $f(x)$ 的值域.

(文) C $y = \log_{0.5}(2-x) - \sqrt{1-x}$ 在定义域内递增,值域为 $(-\infty, 0]$,由 $k = \log_{0.5}(2-x) - \sqrt{1-x}$ 无解知 $k > 0$.

评析 “对于实数 $k \in B$,在集合 A 中不存在原象”等价于方程 $k = \log_{0.5}(2-x) - \sqrt{1-x}$ 无解,解题的关键在于抓住函数 $f(x)$ 的单调性.

8. A $f(x)$ 周期 $T=\pi$,由 $f(a)=5$ 知 $x=a$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴且 $f(x)$ 在 $[a, a+\frac{\pi}{2}]$ 上递减,

$$\therefore f(a + \frac{5\pi}{6}) = f(a + \frac{5\pi}{6} - \pi) = f(a - \frac{\pi}{6}) = f[2a - (a - \frac{\pi}{6})] = f(a + \frac{\pi}{6}) < f(a + \frac{\pi}{12}), \therefore f(a + \frac{\pi}{12}) > f(a + \frac{5\pi}{6}).$$

评析 解此题与 φ, a 无关,不能受此迷惑. 解题关键是掌握函数的性质: ①函数 $y=A\sin(\omega x + \varphi)$ 只在对称轴处取到最大或最小值,且在最大与最小值之间递减. ②若 $x=a$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴则 $f(x)=f(2a-x)$. 另外本题亦可用特值法.

9. (理) B 由三个极限存在知, $f(x)=t(x+1)(x-2)(x-3)(t \neq 0)$. 再由 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} [t(x-2)(x-3)] = 12t = 6$ 或

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} [t(x+1)(x-3)] = -3t = -\frac{3}{2} \text{ 得 } t = \frac{1}{2}. \text{ 故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} [\frac{1}{2}(x+1)(x-2)] = 2, \text{ 又 } \because F(x) \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上连续,}$$

$$\therefore a = F(3) = \lim_{x \rightarrow 3} F(x) = 2.$$

评析 本题考查极限函数与函数连续的基础知识以及待定系数法,而 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$ 等类型的极限计算是常考的题型.

(文) B 验证法,若 $a < -1$ 则 $x < a$ 时 $f'(x) < 0, a < x < -1$ 时 $f'(x) > 0, f(x)$ 在 $x=a$ 处取到极小值;

若 $-1 < a < 0$ 则 $x > a$ 时 $f'(x) < 0, -1 < x < a$ 时 $f'(x) > 0, f(x)$ 在 $x=a$ 处取到极大值.

评析 判断极值点时可用数轴标根法,但是要注意最高次项系数 a 的符号.

10. C 设 A, B, P 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y)$,由 $\begin{cases} mx_1^2 + ny_1^2 = 1 \\ mx_2^2 + ny_2^2 = 1 \end{cases}$ 得 $m(x_1 - x_2) \cdot 2x + n(y_1 - y_2) \cdot 2y = 0$,又 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -1, \therefore$ 中点 P 的轨迹为 $mx - ny = 0, \therefore \frac{m}{n} = \frac{1}{4}$.

$$\therefore \text{离心率 } e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{m}{n}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

评析 设而不求、点差法是解相交弦问题的典型方法,另外本题还涉及到两直线重合的性质.

11. D 设四棱锥的两组不相邻的侧面的交线为 m, n ,直线 m, n 确定了一个平面 β . 作与 β 平行的平面 α ,与四棱锥的各个侧面相交,则截得的四边形必为平行四边形. 而这样的平面 α 有无数个.

评析 本题重点考查线面位置关系,涉及的主要知识有①平面的基本公理2;②面面平行的性质;③线线平行的传递公理. 本题的解题关键在于引证交线 m, n ,同时本题不受底面是否为平行四边形的影响.

12. B $1 + \frac{1}{2}(C_{20}^0 + C_{20}^2 + C_{20}^4 + \dots + C_{20}^{20}) = 1 +$

$$\frac{1}{2}(3^{20} - 1) = 1 + \frac{1}{2}[(10 - 1)^{10} - 1] = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} C_{10}^i$$

$$10^{(10-i)}(-1)^i, \therefore \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} C_{10}^i 10^{(10-i)}(-1)^i \text{ 中的每一项都能被 } 10 \text{ 整除, } \therefore a \text{ 被 } 10 \text{ 除的余数是 } 1.$$

评析 $b \equiv a \pmod{10}$ 的含义是 a, b 被10除的余数相同,理解这一点才能明确代数式 a 的变形方向.

13. (理) 41.7 设原数据为变量 ξ ,新数据为 η ,则 $\eta = 2\xi - 80, \xi = \frac{1}{2}\eta + 40$,

$$\therefore E\xi = \frac{1}{2}E\eta + 40 = 40.6, D\xi = \frac{1}{4}D\eta = 1.1, E\xi + D\xi = 41.7.$$

评析 注意利用期望与方差的性质来理顺两个量的关系.

(文) 72 分层抽样比为 $\frac{4-2}{12} = \frac{1}{6}$,故该企业的员工总数为 $6 \times (2+6+4) = 72$.

评析 本题不能直接确定抽样比,关键是能通过人数差来求得抽样比.

14. $(-2, 0)$ 在抛物线 $y^2 = 16x$ 中 $F(4, 0), A(-4, 0)$ “和谐点”为 $P(2, 0)$. 向量 a 应使 P 移至原点,故 $a = (-2, 0)$.

评析 平移向量 $a = P(0) - (2, 0) = (-2, 0)$.

15. $\frac{3\pi}{8}$ D_1P 与平面 AB_1 所成角为 $\angle D_1PA_1$,把平面 D_1CBA_1 与平面 AA_1B 展开摊平(如图),则当 $AP + D_1P$ 取最小值时,三点 D_1, P, A 共线,∴ $\angle D_1PA_1 = \angle PA_1A + \angle A_1AP = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$.

评析 图形的展开与折叠问题淡化了几年,现在又有重新成为热点的迹象.

16. (理) ②③④ $F(0) = f(4) + f(-4) = 0$ 不确定 而

$$F'(x) = [f'(x^2 - 4) - f'(-4 - x^2)] \times 2x,$$

$$\therefore F'(\pm 2) = 0, \text{ 且 } F'(x) \text{ 是定义在 } \mathbb{R} \text{ 上的奇函数,}$$

∴③④亦正确.

评析 可导奇函数的导函数是偶函数,可导偶函数的导函数是奇函数(导函数连续).

(文) ①②③ 由图形易知①②为真;当 $a > 1$ 时 $f(a+1) = \log_a(a+1) > \log_a 2 = f(b+2)$,当 $0 < a < 1$ 时 $f(a+1) = \log_a(a+1) > \log_a 2 = f(b+2)$,故③正确. 由 $a=2$ 可知④错.

评析 函数问题要注意数形结合,字母问题要注意分类讨论.

17. 由 $(a^2 + b^2) \sin(A-B) = (a^2 - b^2) \sin C$ 得 $(a^2 + b^2) \sin(A-B) = (a^2 - b^2) \sin(A+B)$,由两角和差的正弦公式展开得:

$$2b^2 \sin A \cos B = 2a^2 \cos A \sin B.$$

$$\text{根据正弦定理有 } 2 \sin B \cos B = 2 \sin A \cos A,$$

$$\therefore \sin 2B = \sin 2A,$$

∴ A, B 为三角形的内角,

$$\therefore A = B \text{ 或 } A + B = \frac{\pi}{2}.$$

$$(1) \text{ 若 } a = 3, b = 4 \text{ 则 } A \neq B, \therefore A + B = \frac{\pi}{2}, C = \frac{\pi}{2}, \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB},$$

$$\therefore |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = \sqrt{\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}} = \sqrt{a^2 + b^2} = 5.$$

(2) 若 $C = 60^\circ$,则 $C \neq \frac{\pi}{2}, \therefore A = B, a = b$,三角形为等边三角形.

$$\text{由 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a^2 \sin C = \sqrt{3}, \text{ 解得 } a = 2,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 2 \times 2 \times \cos 120^\circ = -6.$$

评析 三角问题主要是函数图象问题与恒等变形问题,而二者常与平面向量有一定的综合. 本题考查了两角和差公式、倍角公式、诱导公式、正弦定理、向量的数量积、向量夹角的概念和性质等,用逻辑推理和解三角形把三角变形与向量巧妙组合. 另外,作为06年的预测还应注意向量与不等式组合的可能性.

18. (理) (1) 获得“宝物”累积价值达 $3a$ 元,说明在 A, B 网页中都寻得宝物.

由独立事件同时发生的分步计数原理得所求的概率 $P = \frac{1}{2} \times$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

(2) 设从 A, B 两个网页开始寻宝所获得的累积价值分别为 ξ, η 元,则有

$$P(\xi = 0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, P(\xi = a) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{8},$$

$$P(\xi=3a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

$$P(\eta=0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, P(\eta=2a) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8},$$

$$P(\eta=3a) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

$$\therefore E\xi = 0 \cdot \frac{1}{2} + a \cdot \frac{3}{8} + 3a \cdot \frac{1}{8} = \frac{6a}{8} \text{ (元)};$$

$$E\eta = 0 \cdot \frac{3}{4} + 2a \cdot \frac{1}{8} + 3a \cdot \frac{1}{8} = \frac{5a}{8} \text{ (元)}.$$

$\therefore$ 先从 A 网页开始寻宝获得的收益的期望最大.
(文) (1) 恰获得价值 a 元的“宝物”,说明在 A 中寻得宝物且在 B 中未寻得宝物.

在 A 中寻得宝物的概率为 $\frac{1}{2}$, 在 B 中未寻得宝物的概率为 $1 -$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

由独立事件同时发生的分步计数原理得所求的概率 $P = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.

(2) $\therefore$ 从哪个网页开始是随机选择的, $\therefore$ 选择从 A、B 开始的概率都是 $\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 选择从 A 开始获得“宝物”累积价值达 $3a$ 元的概率 $P_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

选择从 B 开始获得“宝物”累积价值达 $3a$ 元的概率 $P_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

$\therefore$ 由互斥事件分类计数原理得所求概率为 $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$.

评析 要求期望应先求概率分布,而概率的计算类型不外乎等概率问题、互斥与对立问题、独立事件问题、二项分布问题(重复试验)、几何分布问题等.平时复习能搞清这些类型的问题,则考试时概率题便能灵活应对而不致于丢分了.

19. (理) 解法一 (1) 原图中 $\therefore \angle DAB = \angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $\therefore AD \parallel BC, AB \perp BC$.
 $\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{DF}{FC}$, $\therefore EF \parallel BC \parallel AD, AE \perp EF$.

折起后 由 $AE \perp EF$ 及已知 $AE \perp BE$ 得 $AE \perp$ 平面 $BEFC$,

$\therefore AE \subset$ 平面 $AEFD$, $\therefore$ 平面 $AEFD \perp$ 平面 $BEFC$.

(2) 过 D 在平面 $AEFD$ 内作 $DH \perp EF$ 于 H,

则由(1)知 $DH \perp$ 平面 $BEFC$, $AD = 2$,

$\therefore G$ 是 BC 的中点, $\therefore GBEH$ 为矩形, 连 HB , 则由 $EG \perp BD$ 和三垂线定理得 $EG \perp BH$,

$\therefore GBEH$ 为正方形, $AE = BE = EH = 2, \lambda = \frac{1}{2}$.

过 H 在平面 BCF 内作 $HT \perp BF$ 垂足为 O, 交 CF 于 T, 连 DO 则由三垂线定理知 $DO \perp BF$,

$\therefore \angle DOT$ 为二面角 $D-BF-C$ 的平面角.

在 $Rt\triangle BEF$ 中 $EF = \frac{AD+BC}{2} = 3, BF = \sqrt{13}$, 在 $Rt\triangle HOF$ 中

$$HO = HF \cdot \frac{BE}{BF} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle HOD$ 中 $\tan DOH = \frac{HD}{HO} = \sqrt{13}$, 故 $\angle DOH = \arctan \sqrt{13}$. 即

二面角 $D-BF-C$ 的大小为 $\pi - \arctan \sqrt{13}$.

(3) 由(2)知 $DO = \sqrt{HD^2 + HO^2} = \sqrt{4 + \frac{4}{13}} = 2\sqrt{\frac{14}{13}}$, 设点 C 到平面 BDF 的距离为 d ,

则由 $V_{D-BFC} = V_{C-BDF}$ 得 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times BF \times DO \times d = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times BC \times EB \times DH$,

$$\text{代入数据得 } d = \frac{4 \times 2 \times 2}{2\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{14}}{7}.$$

解法二 (1) 同解法一(1).

(2) 由(1)知 $AE \perp EF, AE \perp BE, BE \perp EF$, 故可建立如图空间坐

标系 $E-xyz$.

原图中, $\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DC} = \lambda$,

$\therefore AE = 4\lambda, BE = 4 - 4\lambda$,

$\therefore B(4 - 4\lambda, 0, 0), C(4 - 4\lambda, 4, 0), G(4 - 4\lambda, 2, 0), D(0, 2, 4\lambda)$,

$\therefore \overrightarrow{BD} = (4\lambda - 4, 2, 4\lambda)$,

$\overrightarrow{EG} = (4 - 4\lambda, 2, 0)$,

$\therefore \overrightarrow{EG} \perp \overrightarrow{BD}, \therefore -(4\lambda - 4)^2 + 4 = 0$, 解得 $\lambda = \frac{1}{2} < 1$,

$\therefore A(0, 0, 2), B(2, 0, 0), D(0, 2, 2), F(0, 3, 0)$,

$\therefore \overrightarrow{BF} = (-2, 3, 0), \overrightarrow{BD} = (-2, 2, 2)$.

设平面 DBF 的一个法向量为 $n_1 = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} n_1 \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ n_1 \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \end{cases}$, 即

$$\begin{cases} -2x + 2y + 2z = 0 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases}, \text{取 } n_1 = (3, 2, 1).$$

又平面 BCF 的一个法向量为 $n_2 = (0, 0, 1)$,

$$\therefore \cos \langle n_1, n_2 \rangle = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| |n_2|} = \frac{\sqrt{14}}{14},$$

即二面角 $D-BF-C$ 的大小为 $\pi - \arccos \frac{\sqrt{14}}{14}$.

(3) $\therefore C(2, 4, 0), \therefore \overrightarrow{BC} = (0, 4, 0), \therefore C$ 到平面 BDF 的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot n_1|}{|n_1|} = \frac{8}{\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{14}}{7}.$$

评析 传统的解法关键是用三垂线定理来找二面角的平面角, 用等体积求距离. 而向量法解题的要点是用方程组来求平面的一个法向量以及判定二面角 $D-BF-C$ 为钝角, 解题时常用的公式有距离公式 $d = \frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{n}|}$ 和夹角公式 $\cos \langle n_1, n_2 \rangle =$

$\frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| |n_2|}$. 本题的难点是由 $EG \perp BD$ 来确定 λ 的值.

(文) 解法一 (1) 原图中 $\therefore AD \parallel BC, E, F$ 分别为 AB, CD 中点, $\therefore EF \parallel BC \parallel AD$,

又 $\therefore \angle ABC = \frac{\pi}{2}, \therefore \angle AEF =$

$$\frac{\pi}{2}, AE \perp EF.$$

折起后 由 $AE \perp EF$ 及已知 $AE \perp BE$ 得 $AE \perp$ 平面 $BEFC$, $\therefore AE \subset$ 平面 $AEFD$, $\therefore$ 平面 $AEFD \perp$ 平面 $BEFC$.

(2) 过 D 在平面 $AEFD$ 内作 $DH \perp EF$ 于 H, 连 HB,

则由(1)知 $DH \perp$ 平面 $BEFC$,

$\therefore G$ 是 BC 的中点, $BE = EH = 2, BE \perp EH$,

$\therefore GBEH$ 为正方形, $\therefore EG \perp BH$.

由三垂线定理知 $EG \perp BD$, 即异面直线 EG 与 BD 所成角为 90° .

(3) 过 H 在平面 BCF 内作 $HT \perp BF$, 垂足为 O, 交 CF 于 T, 连 DO 则由三垂线定理知 $DO \perp BF$,

$\therefore \angle DOT$ 为二面角 $D-BF-C$ 的平面角,

在 $Rt\triangle BEF$ 中 $EF = \frac{AD+BC}{2} = 3, BF = \sqrt{13}$, 在 $Rt\triangle HOF$ 中

$$HO = HF \cdot \frac{BE}{BF} = \frac{2}{\sqrt{13}},$$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle HOD$ 中 $\tan DOH = \frac{HD}{HO} = \sqrt{13}$, 故 $\angle DOH = \arctan \sqrt{13}$, 即

二面角 $D-BF-C$ 的大小为 $\pi - \arctan \sqrt{13}$.

解法二 (1) 同解一(1).

(2) 由(1)知 $AE \perp EF, AE \perp BE, BE \perp EF$,

故可建立如图空间坐标系 $E-xyz$.

$\therefore B(2, 0, 0), C(2, 4, 0)$,

$G(2, 2, 0), D(0, 2, 2)$,

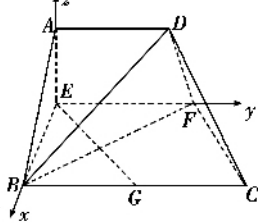
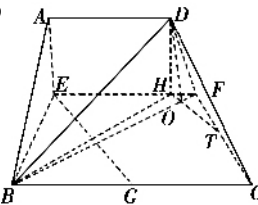
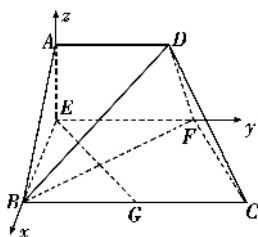
$\therefore \overrightarrow{BD} = (-2, 2, 2), \overrightarrow{EG} = (2, 2, 0)$,

$\therefore \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{BD} = -2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 0 = 0$,

$\therefore EG \perp BD$, 即异面直线 EG 与 BD 所成角为 90° .

(3) $\therefore A(0, 0, 2), B(2, 0, 0), D(0, 2, 2), F(0, 3, 0)$,

$\therefore \overrightarrow{BF} = (-2, 3, 0), \overrightarrow{BD} = (-2, 2, 2)$.



设平面 DBF 的一个法向量为 $n_1 = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} n_1 \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ n_1 \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \end{cases}$, 即

$$\begin{cases} -2x + 2y + 2z = 0 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases}, \text{取 } n_1 = (3, 2, 1).$$

又平面 BCF 的一个法向量为 $n_2 = (0, 0, 1)$, $\therefore \cos \langle n_1, n_2 \rangle = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| |n_2|} = \frac{\sqrt{14}}{14}$,

即二面角 $D-BF-C$ 的大小为 $\pi - \arccos \frac{\sqrt{14}}{14}$.

20. (1) 依题意 $f'(x) = 3kx^2 - 6(k+1)x < 0$ 的解集为 $(0, 4)$,
故 $0, 4$ 是 $3kx^2 - 6(k+1)x = 0$ 的两根, 所以 $\frac{2(k+1)}{k} = 4$, $\therefore k = 1$.

又点 P 处切线的方向向量为 $a = (-1, 12)$,

$$\therefore 3b^2 - 12b = -12, \text{即 } b = 2.$$

(2) 由 (1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$, $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$, $\therefore$
 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) > 0$; $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$,
 $\therefore f(x)$ 有极大值为 $f(0) = 2$.

又 $f'(1) = -3$, $f'(-1) = -5$, 即 $f(t) \in [-5, 2]$,

令 $g(x) = 2x^2 + 5x + a$, 则 $g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增,

$\therefore$ 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $g(x) \in [-3 + a, 7 + a]$.

依题意有 $[-5, 2] \subseteq [-3 + a, 7 + a]$, $\therefore \begin{cases} -3 + a \leq -5 \\ 7 + a \geq 2 \end{cases}$, 解得
 $-5 \leq a \leq -2$.

评析 求导和利用导数来判断函数的单调性、利用导数求极值、最值和切线的斜率、利用导数来解证不等式和研究方程等是导数与函数结合的主要题型. 本题解题的关键在于单调减区间恰为 $(0, 4) \Leftrightarrow f'(x) < 0$ 的解区间为 $(0, 4)$. 而关于 x 的方程 $g(x) = f(t)$ 总有实数解, 意味着 $f(t)$ 的值域是 $g(x)$ 值域的子集.

21. (1) 设双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b \neq 0)$,

$\therefore M(6, 0)$, $A(1, 0)$, $|AM| = 5$, 且 M 到直线 AP 的距离为 3 ,

$$\therefore \tan \angle MAP = \frac{3}{4},$$

$\therefore M$ 是 $\triangle APQ$ 的内心,

$\therefore$ 直线 AM 是 $\angle PAQ$ 的角平分线, 不妨设 P 在第一象限,

则直线 AP, AQ 的斜率分别为 $k_{AP} = \frac{3}{4}$, $k_{AQ} = -\frac{3}{4}$,

由双曲线的对称性及点 M 到 PQ 的距离为 3 知直线 PQ 的方程为 $x = 9$,

联立 PQ 方程 $x = 9$ 与直线 AP 的方程 $y = \frac{3}{4}(x-1)$ 得点 $P(9, 6)$,

将点 P 的坐标代入双曲线的方程得 $9^2 - \frac{6^2}{b^2} = 1$, 解得 $b^2 = \frac{36}{80}$

$$= \frac{9}{20},$$

$\therefore$ 双曲线的方程为 $x^2 - \frac{20}{9}y^2 = 1$.

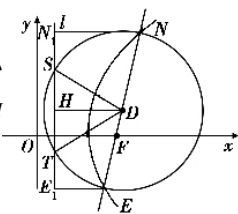
(2) 设双曲线 C 的右焦点为 F , 离心率为 e , 如图.

作 $NN_1 \perp l$ 于 N_1 , $EE_1 \perp l$ 于 E_1 , $DH \perp l$ 于 H ,

$$\text{则 } 2|DH| = |NN_1| + |EE_1| = \frac{NF}{e} +$$

$$\frac{EF}{e} = \frac{EN}{e},$$

$$\therefore \cos \angle SDH = \frac{DH}{DS} = \frac{2DH}{2DS} = \frac{NN_1 + EE_1}{EN} = \frac{1}{e}.$$



$$\therefore \cos \angle SDT = 2\cos^2 \angle SDH - 1 = \frac{2}{e^2} - 1 = \frac{2}{1 + \frac{20}{9}} - 1 = \frac{11}{29}.$$

评析 第(1)问考查待定系数法, 突破点为三角形内心的性质及双曲线的对称性. 第(2)问考查双曲线的第二定义, 题型新颖且有一定的深度, 解题的关键就是转化的思想, 先用垂径定理转化, 后用第二定义转化为焦半径、焦点弦、方程轨迹、相交弦、最值等问题是解析几何中常考的经典热门问题, 解决这些问题往往要利用化归的思想、设而不求的技巧来化繁为简.

22. (1) $\therefore a_n^2 - a_{n+1}^2 = 4a_n^2 \cdot a_{n+1}^2$,

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} = 4 (n \geq 1, n \in \mathbb{N}^*),$$

$\therefore$ 数列 $\{\frac{1}{a_n^2}\}$ 为等差数列, 并且首项为 $\frac{1}{a_1^2} = 1$, 公差为 4 .

$$\therefore \frac{1}{a_n^2} = 1 + 4(n-1) = 4n-3, a_n^2 = \frac{1}{4n-3},$$

$$\therefore a_n > 0, \therefore a_n = \frac{1}{\sqrt{4n-3}} (n \in \mathbb{N}^*).$$

$$(2) \text{ (理、文) 由 } a_n = \frac{1}{\sqrt{4n-3}}, \frac{T_{n+1}}{a_n^2} = \frac{T_n}{a_{n+1}^2} + 16n^2 - 8n - 3,$$

$$\text{得 } (4n-3)T_{n+1} = (4n+1)T_n + (4n-3)(4n+1) \Rightarrow \frac{T_{n+1}}{4n+1} = \frac{T_n}{4n-3} + 1,$$

$\therefore$ 数列 $\{\frac{T_n}{4n-3}\}$ 是公差为 1 的等差数列, $\frac{T_n}{4n-3} = b_1 + n - 1$, $T_n = (4n-3)(n+b_1-1)$.

又 $\therefore b_n$ 等差数列, $\therefore T_n = (4n-3)(n+b_1-1)$ 中常数项为 0 , 即 $b_1 = 1$.

从而 $T_n = (4n-3)n$, $\therefore b_n = 8n-7, n \in \mathbb{N}^*$.

$$(理) \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{nb_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n}{8n^2 - 7n} = \frac{1}{2}.$$

$$(3) \text{ 由 (2) 知 } \frac{T_n}{4n} = \frac{4n-3}{4},$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{\sqrt{4n-3}}, n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = \frac{2}{2\sqrt{4n-3}} < \frac{2}{\sqrt{4n-7} + \sqrt{4n-3}} = \frac{\sqrt{4n-3} - \sqrt{4n-7}}{2},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4k-3}} < 1 + \frac{1}{2} (\sqrt{5} - \sqrt{1} + \sqrt{9} - \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{4n-3} - \sqrt{4n-7}) = \frac{1}{2} (\sqrt{4n-3} + 1),$$

$$\therefore (S_n - \frac{1}{2})^2 < (\frac{1}{2}\sqrt{4n-3})^2 = \frac{4n-3}{4} = \frac{T_n}{4n}, \text{即 } (S_n - \frac{1}{2})^2 < \frac{T_n}{4n}.$$

评析 这是数列与不等式的综合题, 第(1)问的解题要点是借助倒数的特性转化非常规数列为等差数列. 第(2)问的关键是利用等差数列前 n 项和的表达式中常数项为 0 的特性来处理, 问题(2)也可用待定系数法, 但相对来说计算量较大. 而(3)用到放缩法证明不等式, 其本质为裂项求和. 对于不等式中的非常规数列求和问题, 要么转化问题, 要么放缩后求解, 考生应把握好这个原则.

2006 年北京—黄冈高考最后冲刺预测试卷(三) 测试报告

相关事项 测试学校	难度系数	平均分	最高分	140 分以上 人数百分比	130 ~ 140 分 人数百分比	120 ~ 130 分 人数百分比	110 ~ 120 分 人数百分比	100 ~ 110 分 人数百分比
黄冈高级中学	0.58	108	142	1%	5%	18%	23%	34%

【测试总评】 本套试卷考查到的知识点主要有: 代数中的函数、数列、不等式、三角函数, 立体几何中的直线与直线、直线与平面的位置关系, 解析几何中的圆锥曲线的性质、直线与圆锥曲线的位置关系, 新增内容中的向量、概率与统计等. 要在数学考试中取得好成绩, 学生需要平时注重对数学思考方法的思考、提炼与总结, 在数学解题中自觉应用乃至成为一种思维习惯, 并且从思想上去找到问题的实质, 在数学思想和数学方法的观点上宏观地掌握解题思路, 用通法解决问题, 这样有利于学生克服“题海战术”和“大运动量”重复训练, 向全面提高数学素养(尤其是创新意识和实践能力)的方向发展.

1. B $P+Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11\}$, 元素个数为 8 .

评析 用枚举法可以很容易得出答案, 考查了集合的基本知识.

2. B 圆面 $x^2 + y^2 \leq 2x$ (包括圆周) 被另一个圆面 $x^2 + y^2 \leq 4$ 包含, 故甲是乙的必要不充分条件.

评析 判断充分条件必要条件时可以从逻辑关系上看, 也

可以从集合与集合之间关系上看,若从逻辑关系上看,若 $p \Rightarrow q$ 则 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件. 此题画图作答比较简便.

3. D (理) 由 $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases}$ 得 $3 \leq x \leq 6$, 设 $x = 3 + 3\sin^2 \theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$, 则 $\sqrt{x-3} + \sqrt{6-x} = \sqrt{3\sin^2 \theta} + \sqrt{3(1-\sin^2 \theta)}$
 $= \sqrt{3}(\sin \theta + \cos \theta) = \sqrt{6} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{6}$,

故 $k_{\max} = \sqrt{6}$, 故选 D.

评析 本题要求学生掌握不等式的转化方法与技巧,善于对问题进行等价转换,掌握求函数最值时所运用的参数法.

(文) 由正弦定理得 $\frac{|BC|}{\sin A} = \frac{|AC|}{\sin B} = \frac{|AB|}{\sin(A+B)}$,
 $\therefore \frac{|BC| + |AC|}{\sin A + \sin B} = \frac{|AB|}{\sin(A+B)}$ 即 $\frac{\sin(A+B)}{\sin A + \sin B} = \frac{|AB|}{|BC| + |AC|}$
 $= \frac{4}{5}$,
 $\therefore \frac{2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} = \frac{4}{5}$, 即 $\frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} = \frac{4}{5}$, 而 $\frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} =$
 $\frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}$,
 $\therefore$ 解得 $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = \frac{9}{9}$.

评析 已知三角形边之间关系求角,通常借助于正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 而题中告诉的是 $|AC| + |BC| = 10$, $|AB| = 8$, 所以必须再借助于合比定理得到 $\frac{a+b}{\sin A + \sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 最后还要借助三角函数公式将倍角转为所需要的半角.

4. B 设 $F(x) = f(x) - 1$, 易知 $F(x)$ 为奇函数, 其图象关于原点对称, 由于 $F(x)_{\max} = M - 1$, $F(x)_{\min} = m - 1$,
 $\therefore -(m-1) = M-1$ 即 $M+m=2$, 故选 B.

评析 对于形式较复杂的函数,要找出最大值与最小值之和,一般很难求出最大值或最小值,但分析形式,发现 $f(x) - 1$ 为奇函数,而奇函数的图象关于原点对称,所以最大值与最小值互为相反数. 所以 $-(m-1) = M-1$ 即 $M+m=2$.

5. A 作 $DO \perp$ 平面 ABC , 垂足为 O , 再作 $OE \perp AB$, 垂足为 E . 则 $DE \perp AB$, 故 $\angle DEO$ 为 $D-AB-C$ 的平面角, 即 $\angle DEO = \frac{\pi}{4}$, 因为 DO

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} DE = \sqrt{2} \frac{S_{\triangle ABD}}{AB} = 2.$$

$$\text{所以 } V_{D-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot DO = 4.$$

评析 已知一棱长及两底面积求体积,要求体积很自然想到求 h , 于是作 $DO \perp$ 面 ABC , 再结合已知条件,可求出 DO 故体积可得出.

6. (理) B 设 $f(x) = \frac{\sin x}{\cos \beta} + \frac{\sin \beta}{\cos x}$, 易知 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时 $f(x)$ 为增函数.

而当 $x = \frac{\pi}{2} - \beta$ 和 $x = \alpha$ 时有 $f(\alpha) = f(\frac{\pi}{2} - \beta)$, 故 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, 即 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

评析 应用函数单调性解题的创造性体现在:通过已知条件进行联想,从而发现或构造单调函数. 当然此题也可以令 $\sin \alpha = \cos \beta$, 则 $\sin \beta = \cos \alpha$, 也满足题意,但需要具备一定的观察能力.

(文) D 令 $3^{\sin x} = t (\frac{1}{3} \leq t \leq 3)$, 则原方程可化为 $2at^2 + 4at + a - 8 = 0$.

分离参数得 $a = f(t) = \frac{8}{2(t+1)^2 - 1}$, 则函数 $f(t)$ 在 $[\frac{1}{3}, 3]$ 上

单调递减, 知 $a_{\min} = f(3) = \frac{8}{31}$, $a_{\max} = f(\frac{1}{3}) = \frac{72}{23}$.

评析 求参数的范围此处用到换元法(作用在使方程形式更为简洁)和分离参数法(作用在于便于求参数的范围),而此两法在求范围问题中应用很广泛.

7. B 将方程 $x^2 + ax + b = 0$ 看作以 (a, b) 为动点的直线 $l: xa + b + x^2 = 0$ 的方程, 则 $a^2 + b^2$ 的几何意义为 l 上的点 (a, b) 到原点 $O(0, 0)$ 的距离的平方, 由点到直线的距离 d 的最小性知 $a^2 + b^2 \geq d^2 = (\frac{0+0+x^2}{\sqrt{x^2+1}})^2 = \frac{x^4}{x^2+1} = (x^2+1) +$

$$\frac{1}{x^2+1} - 2 \quad (x \geq 2),$$

令 $u = x^2 + 1$, 易知 $f(u) = u + \frac{1}{u} - 2 \quad (u \geq 5)$ 在 $[5, +\infty)$

上单调递增, 则 $f(u) \geq f(5) = \frac{16}{5}$, $\therefore a^2 + b^2$ 的最小值为 $\frac{16}{5}$, 故选 B.

评析 借助 $a^2 + b^2$ 的几何意义, 将 $a^2 + b^2$ 转化为点 $(0, 0)$ 到动直线 $xa + b + x^2 = 0$ 的距离, 再利用点到直线的距离公式, 可求出最小值, 对于利用几何意义求最值, 不失为一种好方法.

8. C 因为 $\sqrt{2} + \sqrt{3} > \pi$, $0 < \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} < \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$,

则 $\cos(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}) > \cos(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$ 即 $\sin \sqrt{2} > \sin \sqrt{3}$.

又 $0 < \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \sqrt{3} < \pi$, 所以 $\cos \sqrt{2} - \cos \sqrt{3} > 0$, 故方程表示椭圆.

$$\therefore (\sin \sqrt{2} - \sin \sqrt{3}) - (\cos \sqrt{2} - \cos \sqrt{3}) =$$

$$2\sqrt{2} \sin \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} \sin(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{4}),$$

$$\text{且 } -\frac{\pi}{2} < \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} < 0, \frac{3\pi}{4} < \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi,$$

$$\therefore \sin(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}) < 0, \sin(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{4}) > 0.$$

$$\therefore (\sin \sqrt{2} - \sin \sqrt{3}) - (\cos \sqrt{2} - \cos \sqrt{3}) < 0, \text{ 即 } \sin \sqrt{2} - \sin \sqrt{3} < \cos \sqrt{2} - \cos \sqrt{3}.$$

故曲线表示焦点在 y 轴上的椭圆.

评析 判断二次曲线的类型, 通常利用二次曲线的定义, 如 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 表示椭圆, 若 $a > b > 0$ 则表示焦点在 x 轴上的椭圆, 若 $0 < a < b$ 则表示焦点在 y 轴上的椭圆.

9. (理) D 若不考虑相邻三角形不同色的要求, 则有 $4^4 = 256$ 种涂法. 下面求相邻三角形不同色的涂法种数: ①若 $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 同色, 它们共有 4 种涂法, 对每一种涂法, $\triangle BOC$ 与 $\triangle AOD$ 各有 3 种涂法, 所以此时共有 $4 \times 3 \times 3 = 36$ 种涂法. ②若 $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 不同色, 它们共有 $4 \times 3 = 12$ 种涂法, 对每一种涂法 $\triangle BOC$ 与 $\triangle AOD$ 各有 2 种涂法, 所以此时有 $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ 种涂法. 故相邻三角形均不同色的概率 $P = \frac{36+48}{256} = \frac{21}{64}$. 故选 D.

评析 涂色问题应注意分类. 如此例中分 $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 同色与不同色两类.

(文) C 设直角三角形的两条直角边为 a, b , 则 $\frac{1}{2}ab = a + b +$

$\sqrt{a^2 + b^2}$ 从而 $4(a^2 + b^2) = (2a + 2b - ab)^2$, 于是有 $ab - 4a - 4b + 8 = 0$, $(a-4)(b-4) = 8$, 由 a, b 为正整数有 $(a-4, b-4) = (1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)$, 即知三角形的三边长为 5, 12, 13 或 6, 8, 10.

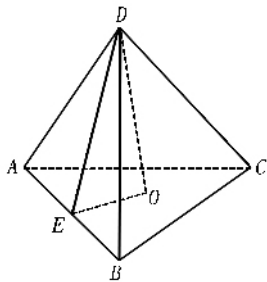
评析 利用勾股定理得到两条边长 a, b 的关系, 而解本题的关键是将其关系简单化, 将 $4(a^2 + b^2) = (2a + 2b - ab)^2$ 简化为 $(a-4)(b-4) = 8$, 从而得到 a, b 的可能取值情况.

10. B 设双曲线、椭圆的离心率分别为 e_1, e_2 则 $e_1 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$,

$$e_2 = \frac{\sqrt{m^2 - b^2}}{m}, \text{ 又 } \because e_1 e_2 = 1, \therefore \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \cdot \frac{\sqrt{m^2 - b^2}}{m} =$$

1, 化简即得 $m^2 = a^2 + b^2$, $\therefore$ 以 a, b, m 为边的三角形是直角三角形.

评析 本题很好地考查了双曲线、椭圆的离心率等问题,



- 圆锥曲线的离心率问题是高考考查的热点.
11. B 采用特殊值法,不妨设 $g(x) = x$, 则方程 $x - f[g(x)] = 0$ 即 $x - f(x) = 0$ 有实数解, 当 $f(x)$ 依次代入 4 个选项中的 4 个函数时, 只有 B 选项使得 $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{5} = x$ 无解, 故选 B.
- 评析 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的解析式的设法不惟一, 比如可令 $f(x) = x$, 则方程 $x - f[g(x)] = 0$, 即 $x - g(x) = 0$ 有解, 显然, 当 $g[f(x)] = x^2 + x + \frac{1}{5}$, 即 $g(x) = x^2 + x + \frac{1}{5}$ 时方程 $x^2 + x + \frac{1}{5} = x$ 无实根.

12. B $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{31}{32} \Rightarrow \frac{a_1(1-q^{10})(1-q)}{a_1(1-q)(1-q^5)} = \frac{31}{32} \Rightarrow 1+q^5 = \frac{31}{32} \Rightarrow q^5 = -\frac{1}{32} \Rightarrow q = -\frac{1}{2}$,

又 $a_1 = -1$, $\therefore S_2 = \frac{a_1(1-q^2)}{1-q} = -\frac{1}{2}$. 故选 B.

评析 本题主要考查等比数列的前 n 项和公式的灵活运用, 较好地考查了基本知识与思维灵活性.

13. (理) $\frac{mns}{4}$ 设 $\left[\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{smallmatrix} \right]$ 是题设的数表, 它的第一行的数之和是 $a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1m} = \frac{(a_{11} + a_{1m})m}{2}$;

第 n 行的数之和为 $a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nm} = \frac{(a_{n1} + a_{nm})m}{2}$;

各列的数的和依次为: $\frac{(a_{11} + a_{n1})n}{2}$, $\frac{(a_{12} + a_{n2})n}{2}$, $\cdots$, $\frac{(a_{1m} + a_{nm})n}{2}$.

设表中所有的数的和为 S_{nm} , 则 $S_{nm} = \frac{(a_{11} + a_{n1})n}{2} + \frac{(a_{12} + a_{n2})n}{2} + \cdots + \frac{(a_{1m} + a_{nm})n}{2} = [(a_{11} + a_{n1}) + (a_{12} + a_{n2}) + \cdots + (a_{1m} + a_{nm})] \times \frac{n}{2} = [(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1m}) + (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nm})] \times \frac{n}{2} = \left[\frac{(a_{11} + a_{1m})m}{2} + \frac{(a_{n1} + a_{nm})m}{2} \right] \times \frac{n}{2} = (a_{11} + a_{1m} + a_{n1} + a_{nm}) \times \frac{mn}{4} = \frac{mns}{4}$.

评析 本题为数列与矩阵结合题, 要求所有数的和, 只需根据等差数列前 n 项和公式 $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$, 将所有数的和转化为已知条件四个角上的数的和 s 即可.

(文) -1023 设该等比数列为 $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{10}\}$, 公比为 q , 则由等比数列的性质得

$$x_1 x_{10} = x_2 x_9 = x_3 x_8 = \cdots = x_4 x_7 = x_5 x_6.$$

由已知及韦达定理得 $x_1 = 1$, $x_1 x_{10} = \frac{1}{512}$, 则 $x_{10} = \frac{1}{512}$, 即

$$x_1 q^9 = \frac{1}{512}, \text{故 } q = \frac{1}{2},$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{10} = \frac{x_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{1023}{512}.$$

由韦达定理得 $-\frac{m_1}{512} = x_1 + x_{10}$, $-\frac{m_2}{512} = x_2 + x_9, \cdots$,

$$-\frac{m_5}{512} = x_5 + x_6,$$

$$\therefore m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 = -512(x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}) = -1023.$$

评析 已知二次方程的根之间的关系求系数的值可借助于韦达定理. 故得到 $m_1 + m_2 + \cdots + m_5 = -512(x_1 + x_2 + \cdots + x_{10})$, 而 10 个根之间构成等比数列, 可根据等比数列的定义求出 $q = \frac{1}{2}$, 再借助于求和公式 $S_n = \frac{x_1(1-q^{10})}{1-q}$, 得到 10 根之和, 接着 $m_1 + m_2 + \cdots + m_5$ 之值就迎刃而解了.

14. 12R 设 $AB = a, BC = b, AA_1 = c$, 在 $\text{Rt} \triangle A_1AO$ 中有 $\frac{a^2 + b^2}{4} + c^2 = R^2$.

$$\therefore 8c^2 + \frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}b^2 = (4c^2 + \frac{a^2}{4}) + (4c^2 + \frac{b^2}{4}) + (a^2 + b^2) \geq 2ac + 2bc + 2ab.$$

在上不等式两边同加上 $a^2 + b^2 + c^2$ 得

$$9(c^2 + \frac{a^2 + b^2}{4}) \geq (a + b + c)^2,$$

即 $(a + b + c)^2 \leq 9R^2$, 则 $a + b + c \leq 3R$.

$\therefore$ 所有棱长之和 $l = 4(a + b + c) \leq 12R$.

“ $=$ ”成立时有 $a = b = c = \frac{4R}{3}$.

评析 本题把几何体与基本不等式有机结合, 要求能找到 a, b, c 的等式关系, 并能正确地进行配凑, 具有很高的技巧, 考查学生的观察能力, 灵活思辨的能力, 重在思考与变形.

15. $120 \pi \quad \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = \frac{4}{5}x + 5 \Leftrightarrow$

$$\frac{\sqrt{(x+4)^2 + y^2}}{x + \frac{25}{4}} = \frac{4}{5},$$

由椭圆第二定义知: 曲线 C 即为椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, 于是 C 上

的点 P 到点 F 的距离的最大值为 11, 最小值为 1, 所以, 所扫过的图形是以 P 为圆心, 11 为外圆半径长, 1 为内圆半径长的圆环, 其面积为 $\pi(11^2 - 1^2) = 120\pi$.

评析 此题关键在于确定曲线 C 的类型, 由第二定义: 到定点的距离与到定直线的距离之比为一定值 (定值小于 1), 故曲线 C 为椭圆, 故其所扫过的面积就是一个圆环, 最大半径为椭圆上的点到 P 点的最远距离 (即椭圆左端点到 P 点的距离), 最小半径为椭圆上的点到 P 点的最近距离 (即椭圆右端点到 P 点的距离).

16. $\frac{1+5^{21}}{6} \quad f(x) = \frac{1 - (-x)^{21}}{1 - (-x)} = \frac{1+x^{21}}{1+x}$, 由 $x = y + 4$, 得

$$g(y) = \frac{1 + (y+4)^{21}}{5+y}, \text{取 } y = 1, \text{得 } a_0 + a_1 + \cdots + a_{20} = \frac{1+5^{21}}{6}.$$

评析 此题即为“利用等比数列求和公式对多项式进行求和”从而将关于 x 的多项式轻易地转化为关于 y 的表达式, 而要求 $g(y)$ 的各个系数之和, 便可根据赋值法令 $y = 1$ 即可.

17. (1) $\because a = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\therefore a \cdot a = 1$.
 $\therefore f[f(x)] = f[x - 2(x \cdot a)a] = x - 2(x \cdot a)a - 2[(x - 2(x \cdot a)a)a]a = x - 2(x \cdot a)a + 2(x \cdot a)a = x$,
 $\therefore f[f(x)]$ 的结果不会随 θ 的变化而变化.

(2) 由 (1) 知 $f[f(m+2n)] = m+2n$, $f[f(2m-n)] = 2m-n$,
 $\therefore f[f(m+2n)] \cdot f[f(2m-n)] = (m+2n) \cdot (2m-n) = 2m^2 + 3m \cdot n - 2n^2 = 3m \cdot n + \frac{15}{2}$. 由 $f[f(m+2n)]$ 与 $f[f(2m-n)]$ 垂直得 $3m \cdot n + \frac{15}{2} = 0$,

$$\text{则 } m \cdot n = -\frac{5}{2} = |m| |n| \cos \varphi, \varphi = \langle m, n \rangle,$$

$$\therefore \cos \varphi = -1, \therefore \varphi = \pi.$$

故 m 与 n 的夹角为 π .

评析 若两向量垂直, 则此两向量的数量积为 0, 据此可求出 $\cos \varphi = -1$, 而根据两向量夹角的范围可知 $\varphi = \pi$.

18. (1) 如图 1, 当射线 $y = -x - m + 7 (x \geq m)$ 与圆 $(x-2)^2 + (y-7)^2 = 8$ 相切时, 由 $|2-7-m+7| = 2\sqrt{2}$ 得

$$\sqrt{2}$$

$m = -2$ 或 $m = 6$ (舍去).
 当射线 $y = -x + m + 7 (x \leq m)$ 与圆 $(x-2)^2 + (y-7)^2 = 8$ 相切时,

$$\text{由 } |2+7-m-7| = 2\sqrt{2} \text{ 得}$$

$$\sqrt{2}$$

$$m = 6 \text{ 或 } m = -2 \text{ (舍去).}$$

故所求的 m 的取值范围是区

间 $(-2, 6)$.

(2) 如图 2, 显然点 Q 在圆 $(x-2)^2 + (y-7)^2 = 8$ 的直径 AB 上, 由对称性知 $|MQ| \cdot |NQ| = |AQ| \cdot |BQ|$.

设 $|AQ| = t$, 则 $|BQ| = 4\sqrt{2} - t$, 于是

$$S = \frac{1}{2}t(4\sqrt{2} - t) \leq \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{t + (4\sqrt{2} - t)}{2} \right]^2 = 4 \text{ (当且仅当 } t = 2\sqrt{2} \text{ 时取等号),}$$

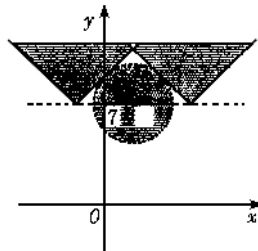


图 1

故 $\triangle QMN$ 的面积的最大值为 4.

评析 本题以集合为载体,把二元不等式所表示的平面区域、直线与圆的位置关系、均值不等式等知识进行有机整合,考查学生对数学知识的认识水平和对数学思想方法的运用能力.

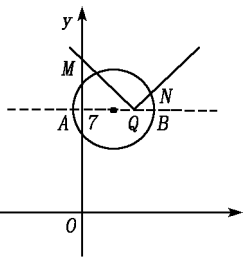


图 2

19. (1) 连 A_1O 并延长交面 BB_1C_1C 必为 C_1 , 连结 BC_1 , $\therefore A_1O = OC_1$, $A_1M = MB$, $\therefore OM \parallel BC_1$, $\therefore OM \not\subset$ 面 BCC_1B_1 , $\therefore OM \parallel$ 面 BCC_1B_1 .
(2) 连 AD_1 交 A_1D 于 N , $\therefore BC_1 \parallel AD_1$, 则 $\angle A_1ND_1$ 为所求的角,
在 $\triangle A_1ND_1$ 中, $A_1N = D_1N = \sqrt{5}$, $A_1D_1 = 2$, 由余弦定理得 $\cos \angle A_1ND_1 = \frac{3}{5}$,

所以所求的角为 $\arccos \frac{3}{5}$.

(3) 由题意知点 P 到点 B 的距离是它到直线 A_1B_1 的距离的两倍, 当点 P 在线段 BB_1 上, 且 $\frac{BP}{PB_1} = 2$ 时即成立, 因此这样的点 P 存在, 其点 P 在一双曲线上.

评析 ①证明直线与平面平行, 一定要说明此直线不在此平面内. ②求异面直线所成的角, 通常作平行直线转化为求相交直线所成的角. ③由双曲线的第二定义知, 这样的点 P 到定点距离是到定直线距离的 2 倍 (大于 1), 故 P 点轨迹为双曲线.

20. 由题意知, 椭圆方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

$\therefore \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$, $\therefore PQ \perp MN$.

设 PQ 的方程为 $ky = x + 1$, 代入椭圆方程消去 x 得 $(2 + k^2)y^2 - 2ky - 1 = 0$.

设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 则 $|PQ| = \sqrt{1 + k^2} |y_1 - y_2| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{\left(\frac{2k}{2 + k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{-1}{2 + k^2}} = \frac{2\sqrt{2}(1 + k^2)}{2 + k^2}$.

(1) 当 $k \neq 0$ 时, MN 的斜率为 $-k$, 同理可得 $|MN| = \frac{2\sqrt{2}(1 + \frac{1}{k^2})}{2 + \frac{1}{k^2}} = \frac{2\sqrt{2}(k^2 + 1)}{2k^2 + 1}$.

故四边形面积 $S = \frac{1}{2} |PQ| |MN| = \frac{4(2 + k^2 + \frac{1}{k^2})}{5 + 2k^2 + \frac{2}{k^2}}$,

令 $u = k^2 + \frac{1}{k^2}$, 则 $u \geq 2$, 即 $S = \frac{4(2 + u)}{5 + 2u} = 2(1 - \frac{1}{5 + 2u})$,

当 $k = \pm 1$ 时, $u = 2$, $S_{\min} = \frac{16}{9}$, 且 S 是以 u 为自变量的增函数, $\therefore \frac{16}{9} \leq S < 2$.

(2) 当 $k = 0$ 时, MN 为椭圆的长轴, $|MN| = 2\sqrt{2}$, $|PQ| = \sqrt{2}$, $S = \frac{1}{2} |PQ| |MN| = 2$,

综合 (1) (2) 知, 四边形 $PQMN$ 面积的最大值为 2, 最小值为 $\frac{16}{9}$.

评析 两向量数量积为 0 即两向量垂直, 即 $PQ \perp MN$, 故可将

四边形 $PQMN$ 的面积转化为两条弦长 $|PQ|$ 与 $|MN|$ 的乘积形式, 而求弦长也用到圆锥曲线与直线位置关系中最常用也最基础的“设而不求”的方法.

21. (1) 该检验员将这 6 件产品全部检验正确, 是指他将 4 件正品检验为正品, 将 2 件次品检验为次品, 故概率是 $P_1 = (1 - 0.2)^4 \cdot (1 - 0.1)^2 = 0.8^4 \cdot 0.9^2 = 0.331776$.

(2) 该检验员将这 6 件产品最终检验为 2 件正品 4 件次品, 有以下几种情况:

①将 4 件正品错误地检验为次品, 2 件次品错误地检验为正品, 概率为 $0.2^4 \cdot 0.1^2 = 0.000016$;

②将 4 件正品中的 2 件正确地检验为正品, 另 2 件错误地检验为次品, 将 2 件次品正确地检验为次品, 概率为 $C_4^2 (1 - 0.2)^2 \cdot 0.2^2 \cdot (1 - 0.1)^2 = 0.124416$;

③将 4 件正品中的 1 件正确地检验为正品, 3 件错误地检验为次品, 将 2 件次品中的 1 件错误地检验为正品, 1 件正确地检验为次品, 概率为 $C_4^1 (1 - 0.2) \cdot 0.2^3 \cdot C_2^1 (1 - 0.1) \cdot 0.1 = 0.004608$,

所以该检验员将这 6 件产品最终检验为 2 件正品 4 件次品的概率为 $P_2 = 0.000016 + 0.124416 + 0.004608 = 0.12904$.

评析 本题以产品检验为背景考查概率的求解问题, 其中既有互斥事件问题, 又有相互独立事件问题, 是一道综合性较强的题目. 这也是当前高考对概率问题考查的一个重点方向.

22. (1) 设点 $P(x_0, y_0)$ 是函数 $y = f(x)$ 图象上任一点, 则 $y_0 = \frac{x_0 + 1 - a}{a - x_0}$, 且点 P 关于 $(a, -1)$ 的对称点为 $P'(2a - x_0, -2 - y_0)$.

$$\therefore f(2a - x_0) = \frac{(2a - x_0) + 1 - a}{a - (2a - x_0)} = \frac{a + 1 - x_0}{x_0 - a},$$

$$-2 - y_0 = -2 - \frac{x_0 + 1 - a}{a - x_0} = \frac{a + 1 - x_0}{x_0 - a},$$

$\therefore f(2a - x_0) = -2 - y_0$, 那么点 P' 在函数 $y = f(x)$ 的图象上.

$\therefore$ 函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(a, -1)$ 成中心对称图形.

$$(2) \therefore [f(x) + 2][f(x) + \frac{3}{2}]$$

$$= \frac{a + 1 - x}{a - x} \cdot \frac{a + 2 - x}{2(a - x)} = \frac{(x - a - 1)(x - a - 2)}{2(a - x)^2},$$

且 $x \in [a + 1, a + 2]$, $(a - x)^2 > 0$,

$$\therefore [f(x) + 2] \cdot [f(x) + \frac{3}{2}] \leq 0,$$

$$\therefore -2 \leq f(x) \leq -\frac{3}{2}.$$

(3) ①要根据题意, 只需 $x \neq a$ 时, $f(x) = x$ 有实数解, 即 $\frac{x + 1 - a}{a - x} = x$ 有实数解, 即 $x^2 + (1 - a)x + 1 - a = 0$ 有不等于 a 的解, 则 $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x \neq a \end{cases}$, 即 $a \leq -3$ 或 $a \geq 1$, 故所求实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$.

②根据题意, 应满足 $x \neq a$ 时 $\frac{x + 1 - a}{a - x} = a$ 无实数解, 即 $x \neq a$ 时, $(1 + a)x = a^2 + a - 1$ 无实数解, 由于 $x = a$ 不是方程 $(1 + a)x = a^2 + a - 1$ 的解, 则对任意 $x \in \mathbb{R}$, 方程 $(1 + a)x = a^2 + a - 1$ 无实数解, 故 $a = -1$.

评析 第 (1) 小问中证明图象对称问题所用的方法为通法, 同学们应熟练掌握. 第 (2) 小问中证明 $f(x)$ 的值域或范围问题, 所用的方法也不同于一般的方法, 没有单纯地去求 $f(x)$ 的最大值、最小值, 而是根据证明的结论构造出不等式, 从而得出想要的结果, 此方法不失为一种好方法. 第 (3) 小问将函数、方程、数列紧密结合在一起, 要注意会将题中所给信息转化为自己所熟悉的语言, 如①中若构造出一个常数列, 则告诉我们 $x \neq a$ 时 $f(x) = x$ 有实数解.

2006 年北京—黄冈高考最后冲刺预测试卷 (四) 测试报告

相关事项 测试学校	难度系数	平均分	最高分	140 分以上 人数百分比	130 ~ 140 分 人数百分比	120 ~ 130 分 人数百分比	110 ~ 120 分 人数百分比	100 ~ 110 分 人数百分比
黄冈高级中学	0.58	119.7	143	2%	8%	16%	26%	15%

【测试总评】通过本次测试反映出本套试卷在难题题目比例和分布、知识点覆盖面、试题创新程度等方面都较为合理, 测试效果良

好,达到了考查学生、训练学生和激励学生的目的,使学生“考”有所获,能够在考与练中提高自己的学习能力和应考水平.测试反映出学生在二轮复习时,对课本上一些难度较大的知识和方法的复习做得还不够,尚未达到足够熟练的程度,对函数与方程、数形结合、分类讨论、转化与化归等数学思想的认识和应用需要继续加强,高考必备的空间想象能力、知识迁移能力、综合应用数学知识的能力还需进一步提高,应在二、三轮复习中继续强化训练和总结.

1. C 易求得 $M = [-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]$, N 为函数 $y = 2^x + \sqrt{x-1}$ 的值域, $\therefore$ 定义域为 $[1, +\infty)$ 且 y 为增函数, $\therefore y \geq 2$, 即 $N = [2, +\infty)$, $\therefore M \cap (\mathbb{C}_{\mathbb{R}} N) = [-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]$. 应选 C.

评析 在求解集合的运算时,首先化简各集合,并且注意集合元素的特征.若是求抽象集合的运算关系,则多借助于文氏图.若求由不等式或区间表示的集合的运算关系,则多借助于数轴来解决.

2. (理) A $\because z = \frac{1+2i}{2+i} = \frac{(1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{4+3i}{5}$, $\therefore z$ 对应复平面内的点为 $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$. 应选 A.

(文) C 由各抽样方法的使用条件可知,这种抽样方法为系统抽样. 应选 C.

评析 理科题利用复数的四则运算法则,将复数 z 化成 $a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的形式即可判断复数 z 对应的点所在的象限. 文科题必须将几种抽样方法的定义、使用条件熟记于心,弄清几种抽样方法的区别和联系是解本题的关键.

3. A 设 $f(x) = \log_2(x+1)$, $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $C(x_3, f(x_3))$, $D(0, -1)$.

$$\therefore a = \frac{f(x_1)+1}{x_1}, \\ b = \frac{f(x_2)+1}{x_2}, \\ c = \frac{f(x_3)+1}{x_3}.$$

如图所示, $a = k_{AD}$,

$b = k_{BD}$, $c = k_{CD}$.

由图可知 $k_{AD} < k_{BD} < k_{CD}$,

即 $a < b < c$. 应选 A.

评析 数形结合的思想方法是高考重点考查的对象,解本题的关键在于由“数”想图,借“图”解题.

4. A 由条件可得 $a_{n-1} + a_{n+1} = a$ ($n \geq 2$), $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = 0$, $a_4 = a-b$, $a_5 = a$, $a_6 = b$, $a_7 = 0$, $a_8 = a-b, \dots$, 故此数列为周期数列(周期为 4), 从而 $a_{100} = a_4 = a-b$, $S_{100} = 25 \times (a+b+0+a-b) = 50a$. 应选 A.

评析 本题关键是采用列举法找出数列 $\{a_n\}$ 的规律—— $\{a_n\}$ 是周期数列(周期为 4).

5. B 如图, O 为球心, A, B, C 为球面上的三点, 由已知可得 $\angle AOB =$

$$\angle BOC = \angle AOC = \frac{\pi}{3}, \text{ 则 } O-ABC$$

为正四面体, $\triangle ABC$ 外接圆半径

为 $r = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$, 则球的半径 $R = AB$

$$= \sqrt{3}r = 2\sqrt{3},$$

$\therefore$ 球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 48\pi$. 应选 B.

评析 本题将球面距离、大圆、小圆、球的表面积公式等查得淋漓尽致, 其中将最有用的图形(如本题中的正四面体 $O-ABC$) 提炼出来探究是求解决立体几何题惯用的招数, 请同学们注意应对策略.

6. (理) B 由三个极限存在知, $f(x) = a(x+1)(x-2)(x-3)$ ($a \neq 0$).

$$\text{再由 } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} a(x-2)(x-3) = 12a = 6,$$

$$\text{或 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} a(x+1)(x-3) = -3a = -\frac{3}{2}, \text{ 得 } a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{2}(x+1)(x-2) = 2. \text{ 应选 B.}$$

(文) A 由题意, 若 $|m-1| \cdot m = |m-1|$, 则 $|m-1| \leq m$, 当 $m < 0$, 此不等式显然不成立; 当 $m \geq 0$ 时, 此不等式等价于 $(m-1)^2 \leq m^2$, 即 $-2m+1 \leq 0$, $\therefore m \geq \frac{1}{2}$. 应选 A.

评析 理科题考查函数的性质和极限的定义, 是一道“小巧玲珑”的好题. 文科题是一道信息迁移题, 读懂约定的运算法则并熟练地求解不等式是圆满求解的关键.

7. C 由题设得 $z_{\min} = a+b=3$, $z_{\max} = 5a+2b=12$. 联立解得 $a=2$, $b=1$, 则 $z=2x+y$. 又对于可行域内的任意点 (x, y) 都有 $3 \leq z \leq 12$, 故 $3 \leq 2x_0 + y_0 \leq 12$. 应选 C.

评析 本题巧而不难, 重在理解线性规划的实质. 关于线性规划知识的考查, 是高考的一个冷点, 要求较低, 属于课本

的基本要求, 复习时应当控制难度.

8. B 当两个小孩在一辆车上时, 有 $C_1^2(C_4^1 + C_4^2)$ 种不同乘车方法; 当两个小孩在两辆车上时, 有 $A_2^2(C_4^1 + C_4^2 + C_4^3)$ 种不同乘车方法, 所以不同的乘车方法数是 $C_1^2(C_4^1 + C_4^2) + A_2^2(C_4^1 + C_4^2 + C_4^3) = 48$ (种). 应选 B.

评析 本题以“郊游”为背景, 考查了排列组合的有关知识, 将两个小孩作为“特殊对象”进行合理分类是解题的关键.

9. C $k_{AB} = \frac{a^2-b^2}{a-b} = a+b = -\cot \theta$, $ab = -\cos \theta$,

直线 AB 的方程为 $y-a^2 = -\cot \theta(x-a)$, 即 $x \cot \theta + y - a^2 - a \cot \theta = 0$,

$\therefore$ 圆心到直线 AB 的距离 d 为:

$$d = \frac{|-a^2 - a \cot \theta|}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}} = \frac{|-a^2 + a(a+b)|}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}} = \frac{|ab|}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}} =$$

$$|\sin \theta \cos \theta| \leq \frac{1}{2} < 1,$$

$\therefore$ 直线 AB 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相交. 应选 C.

评析 本题将一元二次方程根与系数的关系、直线与圆的位置关系交汇在一起考查, 其中三角变换用的较多, 是一道典型的小型交汇综合题, 是高考命题者惯用的命题手法.

10. A 如图所示, $V_{N-AMC} = \frac{1}{3} NO \cdot S_{\triangle AMC} = \frac{1}{3} (8-2x) \cdot$

$$\frac{1}{2} AC \cdot CM \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{3} (8-2x) \cdot \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 + 2x, x \in (0, 3), \text{ 故}$$

图象为 $(0, 3)$ 上的一段抛物线. 应选 A.

评析 本题以三棱锥为载体, 考查学生探求函数解析式和识别函数图象的能力, 是一道不可多得的好题.

11. A 椭圆的通径长为 $\frac{2b^2}{a}$, 抛物线的通径长为 $2p$, 且两曲线有相

$$\text{同的焦点, 所以有 } \begin{cases} \frac{2b^2}{a} = 2p \\ c = \frac{p}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{b^2}{a} = 2c \Rightarrow b^2 = 2ac,$$

即 $a^2 - c^2 = 2ac \Rightarrow e^2 + 2e - 1 = 0 \Rightarrow e = \sqrt{2} - 1$. 应选 A.

评析 本题将椭圆与抛物线通过“通径”有机地结合起来, 考查椭圆离心率的求解方法. 与圆锥曲线的离心率有关的问题是高考经久不衰的热点和重点内容.

12. A 函数图象的实质是变量间的对应关系, 通话 2 小时, 即 120 分钟, 题意就是比较当 $x=120$ 时两方案图象所对应的 y 的值, 即应付的话费多少. 先分别写出两方案的函数关系:

$$\text{方案 A } y(x) = \begin{cases} 98 & (0 \leq x \leq 60), \\ \frac{3}{10}x + 80 & (x > 60). \end{cases}$$

$$\text{方案 B } g(x) = \begin{cases} 168 & (0 \leq x \leq 500), \\ \frac{3}{10}x + 18 & (x > 500). \end{cases}$$

因为 $f(120) = 116$, $g(120) = 168$, 即 $f(120) < g(120)$, 所以选择方案 A 较好. 故选 A.

评析 本题在考查已知图象与解析式的同时, 还考查了观察、联想和比较能力, 及应用的意识. 解决这类问题, 需要细心观察图中函数图象的变化趋势, 找出关键点, 利用待定系数法写出函数图象解析式, 加以分析比较.

13. 108 由题意知各项系数和为 $A=4^n$ (令 $x=1$); 各项二项式的系数和为 $B=2^n$, 又由题意有 $A+B=4^n+2^n=272$, 则 $n=4$, 所以二项式为 $(3x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{x})^4$, 由通项公式得 $T_{r+1} = C_4^r \cdot (3x^{\frac{1}{3}})^{4-r} \cdot \frac{1}{x^r} = C_4^r \cdot 3^{4-r} \cdot x^{\frac{4-r}{3} - r}$, 由 $\frac{4-r}{3} - r = 1$, 得 $r=1$, 所以 x 项的系数为 $C_4^1 \cdot 3^3 = 108$.

评析 二项式定理是高考的热点内容, 常以选择题、填空题的形式出现. 解答本题时应注意区分“二项式系数”与“项的系数”这两个不同的概念, 通项公式及赋值法的应用应熟练掌握.

14. 90° 点 O 在面 A_1D 上的射影为 AD 的中点 E , 点 P 在面 A_1D 上的射影为 A_1 , 由平面几何知识易知 $A_1E \perp AD$, 由三垂线定理

得 $OP \perp AM$, 即直线 OP 与直线 AM 所成的角的大小等于 90° .
 评析 本题主要考查了非标准位置下的三垂线定理, 它是立体几何中证明垂直的一个重要方法, 要注意熟练掌握.

15. $[9, +\infty)$ 由 $x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0$, 得 $1 - m \leq x \leq 1 + m$.

$\therefore \neg q: 4 = \{x | x < 1 - m \text{ 或 } x > 1 + m, m > 0\}$.

由 $|1 - \frac{x-1}{3}| \leq 2$ 得 $-2 \leq x \leq 10$.

$\neg p: B = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > 10\}$.

$\therefore \neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件.

$\therefore A \subseteq B \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1 - m \leq -2 \Rightarrow m \geq 9. \\ 1 + m \geq 10 \end{cases}$

$\therefore$ 所求实数 m 的取值范围是 $[9, +\infty)$.

评析 本题将不等式、简易逻辑、充要条件等知识融为一体, 其中充要条件的判断用集合的观点来理解, 显示出较高的数学素养和能力.

16. $f(x) = |\sin x|$ 或 $f(x) = |2\sin x|$ 或 $f(x) = |\tan x|$ 等.

评析 本题是一道结论开放性题目, 需要学生有一定的知识储备及知识整合能力. 由③知 $f(x)$ 为周期函数, 为便于书写解析式, 可考虑三角函数, 再调整使其满足①②.

17. (1) $\because m = (\cos \frac{C}{2}, \sin \frac{C}{2}), n = (\cos \frac{C}{2}, -\sin \frac{C}{2})$,

$$\therefore m \cdot n = \cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} = \cos C.$$

$$\text{又 } m \cdot n = |m| \cdot |n| \cos \frac{\pi}{3} = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \cos C = \frac{1}{2}, \therefore C = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \because c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, c = \frac{7}{2},$$

$$\therefore \frac{49}{4} = a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab.$$

$$\because S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ab \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} ab = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore ab = 6.$$

$$\text{从而 } (a+b)^2 = \frac{49}{4} + 3ab = \frac{49}{4} + 18 = \frac{121}{4},$$

$$\therefore a+b = \frac{11}{2}.$$

评析 本题考查向量的数量积、解三角形等知识, 使三角形有关知识不再孤立, 也充分体现出向量的工具性、交汇性和传递性.

18. (理) (1) 投掷一次正四面体, 底面上每个数字的出现都是等可能的, 概率为 $\frac{1}{4}$, 则:

①若投掷一次就能返回 A 点, 则底面数字应为 4, 此时概率 $P_1 = \frac{1}{4}$.

②若投掷二次能返回 A 点, 则底面数字依次为 (1, 3), (3, 1), (2, 2) 三种结果, 其概率为 $P_2 = (\frac{1}{4})^2 \times 3 = \frac{3}{16}$.

③若投掷三次能返回 A 点, 则底面数字依次为 (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1) 三种结果, 其概率为 $P_3 = (\frac{1}{4})^3 \times 3 = \frac{3}{64}$.

④若投掷四次能返回 A 点, 则底面数字为 (1, 1, 1, 1), 其概率为 $P_4 = (\frac{1}{4})^4 = \frac{1}{256}$.

故一周内恰能返回 A 点的概率为 $\mathcal{P} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{125}{256}$.

(2) 能返回 A 点的所有结果共有以上 (1) 中 8 种, 则:

$$P(\xi=1) = \frac{1}{8}, P(\xi=2) = \frac{3}{8}, P(\xi=3) = \frac{3}{8}, P(\xi=4) = \frac{1}{8}.$$

其分布列为:

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

所以, 期望 $E\xi = 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{3}{8} + 4 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{2}$ (次).

(文) (1) 从 10 人中任取 3 人, 共有等可能结果 C_{10}^3 种, 最小号码为 5, 相当于从 6, 7, 8, 9, 10 共 5 个中任取 2 个, 则共有 C_5^2 种结果, 则最小号码为 5 的概率为:

$$P_1 = \frac{C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{12}.$$

(2) 选出 3 个号码中至多有 1 个偶数包括没有偶数和只有 1 个偶数两种情况, 取法共有 $C_5^3 + C_5^1 C_5^2 = 60$ 种, 所以满足条件的

$$\text{概率为 } \mathcal{P}_2 = \frac{60}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}.$$

(3) 三个号码之和不超过 9 的可能结果为 (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (2, 3, 4), (1, 3, 4), (1, 3, 5). 则所求概率

$$\text{为 } \mathcal{P}_3 = \frac{7}{C_3^3} = \frac{7}{120}.$$

评析 概率是新教材所增加的内容, 已成为高考必考的重要内容之一. 关于概率的计算, 要掌握等可能事件的概率、概率的加法公式及乘法公式. 另外, 理科生对随机变量的数学期望及方差的计算也应高度重视.

19. (1) $f'(x) = -x^2 + 4ax - 3a^2 = 0$, 得 $x=a$ 或 $x=3a$. 由表:

x	$(-\infty, a)$	a	$(a, 3a)$	$3a$	$(3a, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{4}{3}a^3 + b$	$\nearrow$	b	$\searrow$

可知: 当 $x \in (-\infty, a)$ 时, 函数 $f(x)$ 为减函数, 当 $x \in (3a, +\infty)$ 时, 函数 $f(x)$ 也为减函数; 当 $x \in (a, 3a)$ 时, 函数 $f(x)$ 为增函数.

当 $x=a$ 时, $f(x)$ 的极小值为 $-\frac{4}{3}a^3 + b$; 当 $x=3a$ 时, $f(x)$ 的极大值为 b .

(2) 由 $|f'(x)| \leq a$, 得 $-a \leq -x^2 + 4ax - 3a^2 \leq a$. $f'(x)$ 的图象的对称轴为 $x=2a$.

$\because 0 < a < 1$, $\therefore a+1 > 2a$, $f'(x) = -x^2 + 4ax - 3a^2$ 在 $[a+1, a+2]$ 上为减函数,

$\therefore [f'(x)]_{\max} = f'(a+1) = 2a-1$, $[f'(x)]_{\min} = f'(a+2) = 4a-4$.

于是, 问题转化为求不等式组 $\begin{cases} 2a-1 \leq a \\ 4a-4 \geq -a \end{cases}$ 的解.

解不等式组, 得 $\frac{4}{5} \leq a \leq 1$, 又 $0 < a < 1$, $\therefore$ 所求 a 的取值范围是 $[\frac{4}{5}, 1)$.

(3) 当 $a = \frac{2}{3}$ 时, $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + b$.

由 $f'(x) = -x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{4}{3} = 0$, 得 $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 2$.

即 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{2}{3})$ 上是减函数, 在 $(\frac{2}{3}, 2)$ 上是增函数, 在 $(2, +\infty)$ 上是减函数.

要使 $f(x) = 0$ 在 $[1, 3]$ 上恰有两个相异实根, 即 $f(x) = 0$ 在 $[1, 2)$, $(2, 3]$ 上各有一个实根即可, 于是有 $\begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(2) > 0 \\ f(3) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} + b \leq 0 \\ b > 0 \\ -1 + b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \leq \frac{1}{3} \\ b > 0 \Rightarrow 0 < b \leq \frac{1}{3} \\ b \leq 1 \end{cases}.$$

$\therefore$ 实数 b 的取值范围是 $(0, \frac{1}{3}]$.

评析 本题将函数、方程、不等式与导数结合在一起, 充分发挥导数的工具作用, 应用导数研究函数的性质、方程根的分布、不等式的有关问题等, 是新课程高考的重点和热点问题, 不可等闲视之.

20. 解法一 (1) 连结 CG 并延长交 PA 于点 M , 连结 BM .

$\because G$ 为 $\triangle PAC$ 的重心, $\therefore CG:GM = 2:1$. 又 $CF:FB = 2:1$,

$\therefore FG \parallel BM$.

又 $\because BM \subset$ 平面 PAB , $FG \not\subset$ 平面 PAB ,

$\therefore FG \parallel$ 平面 PAB .

(2) $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA \perp AC$, 又 $AB \perp AC$,

$PA \cap AB = A$,

$\therefore AC \perp$ 平面 PAB , $\therefore AC \perp BM$.

由 (1) 已证 $FG \parallel BM$, $\therefore FG \perp AC$.

(3) 连结 EM , 由 (2) 知 $FG \perp AC$. 因此, $FG \perp$ 平面 AEC 的充要条件是 $FG \perp AE$, 即 $BM \perp AE$.

$\therefore E, M$ 分别为 PB, PA 的中点,

$$\therefore EM = \frac{1}{2}BA = 1, EM \perp PA.$$

$$\text{设 } EA \cap BM = H, \text{ 则 } EH = \frac{1}{2}HA. \text{ 设 } PA = h, \text{ 则 } EA = \frac{1}{2}PB = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{4+h^2}, EH = \frac{1}{6}\sqrt{4+h^2}.$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle AME \sim \text{Rt} \triangle MHE, \therefore EM^2 = EH \cdot EA.$$

$$\therefore 1^2 = \frac{1}{2}\sqrt{4+h^2} \cdot \frac{1}{6}\sqrt{4+h^2}, \text{ 解得 } h = 2\sqrt{2}.$$

在直角梯形 $ABCD$ 中, 由已知可算得 $AD = \sqrt{2}$.

$\therefore PA \perp$ 平面 $ABCD, AD \perp CD, \therefore PD \perp CD$.

$\therefore \angle PDA$ 为二面角 $P-CD-A$ 的平面角, 其大小为 $\arctan 2$.

$\therefore$ 当二面角 $P-CD-A$ 为 $\arctan 2$ 时, $FG \perp$ 平面 AEC .

解法二 以 A 为原点, 以 AB, AC, AP 分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正半轴, 建立空间直角坐标系 $A-xyz$, 则 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(0,2,0)$, 设 $P(0,0,h)$,

$\therefore G$ 为 $\triangle PAC$ 的重心, E 为 PB 的中点, F 在线段 BC 上, 且 $CF = 2FB$,

$$\text{则 } G(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}h), E(1, 0, \frac{1}{2}h), F(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0).$$

$$(1) \overrightarrow{FG} = (-\frac{4}{3}, 0, \frac{1}{3}h), \overrightarrow{AB} = (2, 0, 0), \overrightarrow{AP} = (0, 0, h), \text{ 设 } \overrightarrow{FG} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AP},$$

$$\text{则 } (-\frac{4}{3}, 0, \frac{1}{3}h) = (2x, 0, yh), \text{ 解得 } x = -\frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}, \text{ 故 } \overrightarrow{FG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AP},$$

$\therefore \overrightarrow{FG}$ 与 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}$ 共面, $\therefore \overrightarrow{FG} \notin$ 平面 $PAB, \therefore FG \parallel$ 平面 PAB .

(2) $\overrightarrow{AC} = (0, 2, 0), \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \therefore FG \perp AC$.

(3) 由 (2) 知 $FG \perp AC$. 因此, $FG \perp$ 平面 AEC 的充要条件是 $FG \perp AE$,

$$\text{即 } \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{AE} = 0. \text{ 又 } \overrightarrow{AE} = (1, 0, \frac{1}{2}h),$$

$$\therefore \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{AE} = -\frac{4}{3} + \frac{1}{6}h^2 = 0, \text{ 解得 } h = 2\sqrt{2}.$$

在直角梯形 $ABCD$ 中, 由已知条件可算得 $AD = \sqrt{2}$.

$\therefore PA \perp$ 平面 $ABCD, AD \perp CD, \therefore PD \perp CD$.

$\therefore \angle PDA$ 为二面角 $P-CD-A$ 的平面角, 其大小为 $\arctan 2$.

$\therefore$ 当二面角 $P-CD-A$ 为 $\arctan 2$ 时, $FG \perp$ 平面 AEC .

评析 本题全方位地考查了立体几何中的重要内容, 如线面与线线的位置关系、二面角问题等. 考查的知识点丰富, 是一道优秀的创新型试题.

$$21. (1) \text{ 设所求双曲线方程为 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0), C(c, 0).$$

$$\therefore BD = 3DC, \therefore a + c = 3(c - a), \therefore c = 2a, b = \sqrt{3}a.$$

$$\text{将 } x = c \text{ 代入方程 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ 得 } y = \pm \frac{b^2}{a},$$

$$\therefore AC = \frac{b^2}{a} = 3a, \text{ 又 } BC = 2c = 4a,$$

$$\therefore AB = 5a, \therefore 3a + 4a + 5a = 12,$$

$$\therefore a = 1, \text{ 则 } b = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{双曲线方程为 } x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 设在 x 轴上存在定点 $G(t, 0)$, 使 $\overrightarrow{BC} \perp (\overrightarrow{GM} - \lambda \overrightarrow{GN})$.

① 当直线 $l \perp x$ 轴时, $|m| > 1$ (确保直线 l 与双曲线 E 有两个不同的交点), $\lambda = 1$, 对于 x 轴上任意点 $G, GM - \lambda GN = NM, \overrightarrow{BC} \perp (\overrightarrow{GM} - \lambda \overrightarrow{GN})$.

② 当直线 l 不垂直 x 轴时, 设直线 $l: y = k(x - m), M(x_1, y_1), N$

$$(x_2, y_2), \text{ 将 } y = k(x - m) \text{ 代入 } x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \text{ 并整理得, } (3 - k^2)$$

$$x^2 + 2mk^2x - k^2m^2 - 3 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{2mk^2}{3 - k^2}, x_1x_2 = -\frac{k^2m^2 + 3}{3 - k^2}.$$

$$\therefore \overrightarrow{GM} - \lambda \overrightarrow{GN} = (x_1 - t - \lambda x_2 + \lambda t, y_1 - \lambda y_2), \overrightarrow{BC} = (4, 0),$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} \perp (\overrightarrow{GM} - \lambda \overrightarrow{GN}) \text{ 的充要条件是 } x_1 - t - \lambda x_2 + \lambda t = 0.$$

$$\text{由 } \overrightarrow{MP} = \lambda \overrightarrow{PN}, \text{ 得 } y_1 + \lambda y_2 = 0,$$

$$\therefore \lambda = -\frac{y_1}{y_2}.$$

$$\text{又 } y_1 = k(x_1 - m), y_2 = k(x_2 - m),$$

$$\therefore x_1 - t - \lambda x_2 + \lambda t = x_1 - t + \frac{y_1x_2}{y_2} - \frac{y_1t}{y_2}$$

$$= x_1 - t + \frac{k(x_1 - m)x_2}{k(x_2 - m)} - \frac{k(x_1 - m)t}{k(x_2 - m)} \\ = \frac{2x_1x_2 - (x_1 + x_2)(m + t) + 2mt}{x_2 - m},$$

$$\text{由 } x_1 - t - \lambda x_2 + \lambda t = 0, \text{ 得}$$

$$2x_1x_2 - (x_1 + x_2)(m + t) + 2mt = 0.$$

$$\therefore 2(-\frac{k^2m^2 + 3}{3 - k^2}) + \frac{2mk^2}{3 - k^2} \cdot (m + t) + 2mt = 0,$$

$$\text{化简, 得 } mt = 1, \therefore t = \frac{1}{m},$$

$$\therefore \text{在 } x \text{ 轴上存在定点 } G(\frac{1}{m}, 0), \text{ 使 } \overrightarrow{BC} \perp (\overrightarrow{GM} - \lambda \overrightarrow{GN}).$$

评析 圆锥曲线在新课程高考中的要求不仅没有降低, 反而由于它可以与平面向量综合在一起, 还有所加强, 因而常以把关题面孔出现. 在解答这类有一定难度的解答题时, 要有信心, 不言放弃, 因为高考评分是“踩点得分”, 你依据条件能写多少, 就尽量多写, 踩上得分点便有分数, 如本题第 (1) 问是“送分上”, 弃而不答, 令人惋惜!

$$22. (1) \text{ (理)} \therefore \text{函数 } y = x^2 - x + \frac{1}{2} \text{ 在 } [n, n+1] \text{ 上为增函数, } \therefore \text{其}$$

$$\text{值域为 } [n^2 - n + \frac{1}{2}, (n+1)^2 - (n+1) + \frac{1}{2}], \text{ 值域中的整数}$$

$$\text{的个数为 } [(n+1)^2 - (n+1) + \frac{1}{2}] - (n^2 - n + \frac{1}{2}) = 2n,$$

$$\therefore f(n) = 2n.$$

$$\therefore a_n = 15 - f(n) = 15 - 2n.$$

由 $a_n = 15 - 2n \geq 0, n \in \mathbb{N}^*$, 得 $n \leq 7$, 故当 $n = 7$ 时, S_n 取得最大值 49.

$\therefore$ 存在自然数 M , 使得 $S_n \leq M$ 恒成立, 相应的 M 的最小值为 49.

(2) 由 $a_n = \log_a b_n$, 得 $b_n = a^{a_n} = a^{15-2n}$.

$$\therefore g(n) = \log_{b_n} b_{n+1} = \frac{\log_a b_{n+1}}{\log_a b_n} = \frac{\log_a a^{13-2n}}{\log_a a^{15-2n}} = \frac{13-2n}{15-2n}$$

$$= 1 + \frac{2}{2n-15}.$$

$$\text{而函数 } g(n) = 1 + \frac{2}{2n-15} \text{ 在 } (0, 7) \text{ 和 } (7, +\infty) (n \in \mathbb{N}^*) \text{ 上均}$$

$$\text{递减, 且 } g(1) = \frac{11}{13}, g(7) = -1, g(8) = 3.$$

故当 $n > 8$ 时, $\log_{b_n} b_{n+1} > \log_{b_{n+1}} b_{n+2}$ 恒成立.

$\therefore$ 存在自然数 N , 使得当 $n > N$ 时, $\log_{b_n} b_{n+1} > \log_{b_{n+1}} b_{n+2}$ 恒成立, 相应的 N 的最小值为 8.

$$(3) \therefore \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{(15-2k)(13-2k)} = \frac{1}{(2k-15)(2k-13)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-15} - \frac{1}{2k-13} \right),$$

$$\therefore T_n = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{13} + \frac{1}{11} - \frac{1}{11} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-17} - \frac{1}{2n-15} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{13} - \frac{1}{2n-15} \right).$$

$$\text{由 } \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{13} - \frac{1}{2n-15} \right) + \frac{2}{13}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{13} - \frac{1}{2n-15} \right)$$

$$= \frac{29-3n}{13(15-2n)} > 0 \text{ 得 } n < \frac{15}{2} \text{ 或 } n > \frac{29}{3},$$

$$\text{故在 } n \geq 2 \text{ 的前提下, 当 } n \neq 8 \text{ 或 } n \neq 9 \text{ 时 } T_n > -\frac{2}{13}, \text{ 当 } n = 8 \text{ 或}$$

$$n = 9 \text{ 时 } T_n < -\frac{2}{13}.$$

$$\text{(文)} (1) \text{ 由已知, 得 } \begin{cases} \log_3(2a+b) = 1 \\ \log_3(5a+b) = 2 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}, \therefore f(x) = \log_3(2x-1).$$

$$(2) a_n = 3^{\log_3(2n-1)} = 2n-1, n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\text{设存在正数 } k, \text{ 使得 } (1 + \frac{1}{a_1})(1 + \frac{1}{a_2}) \cdots (1 + \frac{1}{a_n}) \geq$$

$$k \sqrt{2n+1} \text{ 对一切 } n \in \mathbb{N}^* \text{ 均成立,}$$

$$\text{则 } k \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot (1 + \frac{1}{a_1})(1 + \frac{1}{a_2}) \cdots (1 + \frac{1}{a_n}).$$

$$\text{记 } F(n) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot (1 + \frac{1}{a_1})(1 + \frac{1}{a_2}) \cdots (1 + \frac{1}{a_n}),$$

则 $F(n+1) = \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \cdot (1 + \frac{1}{a_1}) (1 + \frac{1}{a_2}) \cdots (1 + \frac{1}{a_n}) (1 + \frac{1}{a_{n+1}})$.

$\therefore \frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{2n+2}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}} = \frac{2(n+1)}{\sqrt{4(n+1)^2 - 1}} > \frac{2(n+1)}{2(n+1)} = 1$.

$\therefore F(n+1) > F(n)$, $\therefore F(n)$ 随 n 的增大而增大,

$\therefore n \in \mathbb{N}^*$, $\therefore$ 当 $n=1$ 时, $F(n)_{\min} = F(1) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$k \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 即 k 的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

评析 本题是函数、数列、不等式有机结合的综合题,体现了在“知识网络交汇点处设计试题”的高考命题指导思想.解答这类问题要有“兵来将挡,水来土掩”的大将风范,也就是涉及哪部分知识时,就灵活地运用相关知识和方法来解决,切忌把思维禁锢在某部分知识点上.理科题极具开放性和探索性,有较好的区分度和选拔功能.解答探索开放型问题,常用方法是“假设法”或“直接法”.文科题采用求商比较法(穿插有放缩法)来证明“随 n 的增大而增大”,颇具匠心.除此之外,分离变量法的灵活应用也给人留下了深刻的印象.

2006 年北京—黄冈高考最后冲刺预测试卷参考答案(五)

测试报告

相关事项 测试学校	难度系数	平均分	最高分	140 分以上 人数百分比	130 ~ 140 分 人数百分比	120 ~ 130 分 人数百分比	110 ~ 120 分 人数百分比	100 ~ 110 分 人数百分比
黄冈高级中学	0.54	102	146	1.9%	8%	16%	11%	15.2%

【测试总评】(1) 本套试卷比 2005 年全国高考试卷 I 略难些,它覆盖了高中数学的主体知识,如函数、数列、解析几何、立体几何、三角函数、概率、导数等重点知识都得到了相应考查.本套试卷题型新颖,解法较为灵活,探索性较强,有一定的难度.

(2) 从测试的情况来看,主要存在以下的问题:①对于小题不能小解、巧解,而是“小题大做”;②对于较为新颖的试题、综合性较强的试题或有一定难度的试题,存在畏惧心理,没有认真审题,而是主动放弃,缺乏锲而不舍的精神;③对于不同类型的题型不能采用不同的对策来分析解决问题;④计算时常出错,计算能力较差.

(3) 解决方案:注意考试技巧,掌握不同类型题的解题策略,注意培养不畏艰难、锲而不舍的精神,强化综合性较强、题型新颖的试题的训练,通过训练,提高计算能力.

1. C $\because x = y^2 + 2y + 4 = (y+1)^2 + 3 \geq 3, y = x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4 \geq 4, \therefore A = \{x | x \geq 3\}, B = \{y | y \geq 4\}, \therefore B \subseteq A$, 即 $A \cap B = B$, 故选 C.

评析 本题考查了元素与集合、集合与集合的关系,要认清集合中元素所满足的条件.

2. (理) A $\frac{(1-i)^{10}}{1+i} + \frac{(-i+\sqrt{3})^3}{(1+i)^6} = [\frac{(1-i)^2}{(1+i)^2}]^5 + \frac{(-i+\sqrt{3})^3}{(2i)^3} = \frac{(-2i)^5}{2i} + \frac{(-1-\sqrt{3}i)^3}{2} = -1 + i = 0$, 故选 A.

评析 本题考查了复数的运算性质: $(1 \pm i)^2 = \pm 2i$, 而 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 时, $\omega^3 = 1$, 要注意在复数运算中 ω 的应用.

(文) B $y = 3x - 2a$ 的反函数为 $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}a = bx + \frac{2}{3}$, $\therefore b = \frac{1}{3}, a = 1$, 故选 B.

评析 本题考查了求反函数的方法和函数相等的条件.

3. B $\because \{a_n\}, \{b_n\}$ 均为等差数列, $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n+2}{n+3}$, 可设 $S_n = (2n^2 + 2n)k, T_n = (n^2 + 3n)k, \frac{a_{10}}{b_{10}} = \frac{S_{10} - S_9}{T_{10} - T_9} = 2$, 故选 B.

评析 本题考查了等差数列的前 n 项和 $S_n = pn^2 + qn$ ($p \neq 0$) 这个充要条件,从而巧妙地解题.

4. C $\because 3a + kb = -7c$ 平方得 $9 + k^2 + 6ka \cdot b = 49$, $\therefore k^2 + 6k \cos \frac{\pi}{3} - 40 = 0, \therefore k^2 + 3k - 40 = 0$, 故选 C.

评析 本题考查了向量的数量积的运算和单位向量的性质,要注意单位向量的模为 1,且 $a \cdot a = |a|^2$.

5. D 由切线 $y = -2x + 9$ 得 P 点坐标为 $(4, 1), f'(4) = -2, f(4) = 1, f(4) + f'(4) = -1$, 故选 D.

评析 本题考查了函数切线的斜率与函数导数之间的关系,本题中要抓住 P 点既在切线上,又在曲线上,而函数在切点处的导数值等于此处切线的斜率.

6. A 曲线 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$, 纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 得到 $(x+2)^2 + (2y-2)^2 = 4$ 即 $\frac{(x+2)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$, 而平移 a 得到 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 则 $a = (2, -1)$, 故选 A.

评析 本题考查了伸缩变换的定义和向量平移的方法.

7. A 在 $\triangle ABC$ 中 $\sin B = \frac{4}{13}, \tan A = \frac{5}{12}, \therefore \sin A = \frac{5}{13}$.

当 B 为钝角时, $\sin B = \frac{4}{13}, \sin A = \frac{5}{13}, \frac{5}{13} > \frac{4}{13}, \therefore A + B > \pi$, 故 B 不为钝角, 而又 $\because \sin B = \frac{4}{13} < \frac{1}{2}, \sin A = \frac{5}{13} < \frac{1}{2}$

$$= \sin \frac{\pi}{6}.$$

$\therefore B + A < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}, \therefore C > \frac{2\pi}{3}, \therefore C > A > B$. 故选 A.

评析 本题考查了三角形的三内角之间的关系和三角之和为 π 这一性质,本题没有直接求出角 C 的大小,而是利用 A, B 的关系来比较 A, B, C 的大小.

8. B $\because y = x + \frac{a}{x}$ 在 $(\sqrt{a}, +\infty)$ 上为增函数,

$\therefore \sqrt{a} \leq \frac{3}{4}$ 得 $0 < a \leq \frac{9}{16}$,

$\therefore f(x) = \log_a(3x^2 - 4x)$ 的递减区间为 $g(x) = 3x^2 - 4x$ 的递增区间,且 $g(x) > 0$, 所以 $x > \frac{4}{3}$, 故选 B.

评析 本题考查了 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ 这个重要函数的单调性,用其单调性求出 a 的范围,同时利用 a 的范围求出 $f(x)$ 的单调区间,要注意 $3x^2 - 4x > 0$ 这一条件.

9. D 由分层抽样的性质可知,男生抽取 $\frac{10}{50} \times 30 = 6$ 人,女生抽取 $\frac{10}{50} \times 20 = 4$ 人,故选 D.

评析 本题考查了分层抽样方法.

10. (理) C $\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \frac{x^3 - x^2 + x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \frac{x^2(x-1) + (x+3)(x-1)}{x-1} = x^2 + x + 3$.

依题意有 $x=1$ 时, $x^2 + x + 3 = ax + 1, a = 4$. 当 $x > 1$ 时, $f(x) > 5$,

$\therefore f(t) = 4t + 1 = 3, t = \frac{1}{2}$, 即 $f^{-1}(3) = \frac{1}{2}$, 故选 C.

评析 本题考查了用定义法求极限的方法,而且都是 0 比 0 型,对这种形式一定要约掉分母中 $x-1$ 这个因子,再求其极限.

(文) C $\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = x+3$, 依题意,当 $x > 1$ 时, $f(x) > 4$; 当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = 3x + 1 \leq 4$. 令 $f^{-1}(3) = t$, 则 $f(t) = 3 < 4$, $\therefore f(t) = 3t + 1 = 3, t = \frac{2}{3}$, 即 $f^{-1}(3) = \frac{2}{3}$, 故选 C.

11. (理) A $|MN| = 2$, 则 $|DP| = 1$, 则点 P 轨迹为以 D 为球心, 半径 $r = 1$ 的球, 则球体积 $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = \frac{4\pi}{3}, \therefore \angle BAD = 60^\circ, \therefore \angle ADC = 120^\circ$, 只需取半球的 $\frac{1}{3}$, 则 $V_1 = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{9} \pi$. 故选 A.

评析 本题利用动态的观点给出了一个球面,由题目条件得到

P 点到 D 点的距离恒为 1, 所以 P 点在以 D 点为圆心半径为 1 的一个球面上且在直平行六面体的内部.

(文) A 由题意可知此四面体可补全为一个正方体, 此正方体的对角线即为球的直径, 因此 $2R = \sqrt{6+6+6} = 3\sqrt{2}$, 所以球的半径 $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 得

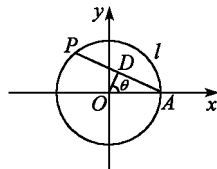
$S_{\text{球}} = 4\pi R^2 = 18\pi$, 故选 A.

评析 本题利用割补的方法补成了一个正方体, 再利用正方体与球的关系求解.

12. C 如图取 AP 的中点为 D , 设 $\angle DOA = \theta$, 则 $d = 2\sin \theta$, $l = 2\theta R = 2\theta$,

$\therefore d = 2\sin \frac{l}{2}$, 故选 C.

评析 本题的关键是找到 d 与 l 的关系, 利用弦心距与弧长的公式找到 $d = 2\sin \frac{l}{2}$, 再利于正弦函数图象得出答案.



13. (理) $\sqrt{3}$ 圆 $(x-3)^2 + y^2 = 1$ 的圆心 $O_1(3,0)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的右焦点, $|PO_1|_{\min} = a - c = 2$, $\therefore P$ 到切点的距离的最小值为 $\sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$.

(文) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad \therefore \frac{a^2}{c} = 4, \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4 \cdot \frac{c}{a} = 2$,

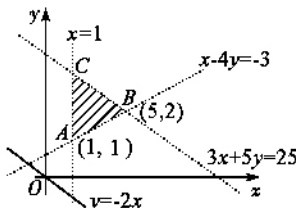
$\therefore c = 1, \therefore b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$,

$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

评析 本题考查了椭圆的定义, 其中理科的题目利用椭圆上点到焦点距离的最小值为 $a - c$ 这一结论求解.

14. (3, 12) 如图, 可行域为 $\triangle ABC$ 的内部, $A(1, 1), B(5, 2), \therefore z \in (3, 12)$.

评析 本题考查了可行域的求法和目标函数与可行域的关系, 本题的关键是画好图形找出可行域, 求出在 y 轴上截距的最大值和最小值, 得出 z 的范围.



15. $(30^\circ, 60^\circ) \quad \therefore$ 直线有且仅有 2 条, 所以 $2\theta \in (60^\circ, 120^\circ)$, 则 $\theta \in (30^\circ, 60^\circ)$.

评析 本题可以将 P 点放在平面 α 和平面 β 的交线上, 这样就容易解题, 因为直线与平面所成的角与 P 点无关.

16. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3} \quad C_n^{n-1} + C_n^n = 1 + n = 2$,

$\therefore n = 6$, 系数最大的项为 $T_{\frac{6}{2}+1} = T_4 = C_6^3 \cos^3 x = \frac{5}{2}, \cos^3 x = \frac{1}{8}, \therefore \cos x = \frac{1}{2}, \therefore x \in [0, 2\pi]$,

$\therefore x = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}$.

评析 本题考查了二项式的一个性质, 其二项式的系数中处于中间的项最大.

17. (1) $\therefore f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + 2\cos^2 x$

$= \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x + 1 = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) + 1$,

$\therefore f(x)$ 的递减区间为 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3}{2}\pi$,

得 $k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{2\pi}{3}$,

$\therefore f(x)$ 的递减区间为 $[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}] (k \in \mathbb{Z})$.

(2) $\therefore$ 对任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 都有 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$,

$\therefore f(x)_{\min} = f(x_1), f(x)_{\max} = f(x_2)$,

$\therefore |x_1 - x_2|$ 的最小值为半个周期,

又 $\therefore T = \frac{2\pi}{2} = \pi$,

$\therefore |x_1 - x_2|_{\min} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$.

评析 本题考查了三角函数的化简和三角函数的性质, 对第 (2) 问关键是理解 $f(x)_{\min} = f(x_1), f(x)_{\max} = f(x_2)$, 所以 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为半个周期. 对于前面较为简单的题目解答的原则是尽量不丢分, 也就是要注意叙述的条理性, 注意细微的地

方, 堵住一切丢分的漏洞.

18. 解法一 (1) 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $CD = 1, \angle ADC = 45^\circ$, $\therefore AC = 1$, 分别以 C 为原点, CB, CD, CA 为 x, y, z 的正半轴建立空间直角坐标系, 则 $B(1, 0, 0), D(0, 1, 0), A(0, 0, 1)$.

$\therefore E$ 为 AD 中点, $\therefore E(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,

$\therefore \vec{AD} \cdot \vec{BE} = (0, 1, -1) \cdot (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0, \therefore AD \perp BE$.

若面 $ABD \perp$ 面 BEF , 则 $AD \perp$ 面 BEF , 则 $AD \perp EF$,

即 $\vec{AD} \cdot \vec{EF} = 0$, 设 $F(0, 0, z)$, 则

$(0, 1, -1) \cdot (0, -\frac{1}{2}, z - \frac{1}{2}) = 0$,

$\therefore (-\frac{1}{2}) \cdot 1 + (-1) \cdot (z - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow z = 0$,

$\therefore F$ 点坐标为 $(0, 0, 0)$, 即 F 点与 C 点重合时, 平面 $ABD \perp$ 平面 BEF .

(2) 由 (1) 知 $\vec{EF} = (0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \vec{BD} = (-1, 1, 0)$;

$|\cos \langle \vec{BD}, \vec{EF} \rangle| = \frac{|\vec{BD} \cdot \vec{EF}|}{|\vec{BD}| \cdot |\vec{EF}|} = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ 直线 BD 与直线 EF 所成的角为 60° .

解法二 (1) 在折后图中, 由已知得 $AB = AD = BD = \sqrt{2}$, 又 $AE = ED$, 则 $BE \perp AD$, 由平面 $ABD \perp$ 平面 BEF , 得 $AD \perp$ 面 BEF , 故 $AD \perp EF$, 即 F 应为过 E 的 AD 边的垂线和 AC 的交点, 由 $AC = CD$ 知 F 点即为 C 点.

(2) 由 (1) 知, EF 与 BD 所成角为 CE 与 BD 所成角, 延长 AC 至 G , 使得 $AC = CG$, 连 DG , 则 $\angle BDG$ 即为 CE 与 BD 所成角 (或补角), 在 $\triangle BDG$ 中, $BD = DG = BG$,

$\therefore \angle BDG = 60^\circ$, 即直线 EF 与直线 BD 所成角为 60° .

评析 本题考查了学生的空间想象能力, 通过折叠空间关系的改变, 本题改过去知点求关系, 变为知关系反过来求点, 对学生的思维定式有一定的障碍. 对这类题目, 考生要大胆地引入一些参数, 再按知点求关系变成方程来求解.

19. 篮球从一个同学传到另外一个同学 (B, C, D 中任一) 手中的概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, 而不传出的概率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 分两种情况 ① 第一次不动, 第二次传到 B , 即 $A \rightarrow A \rightarrow B$;

② 两次都动, $A \rightarrow C \rightarrow B$ 或 $A \rightarrow D \rightarrow B$,

$\therefore$ 第二次才到达 B 的概率是 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + 2 \cdot (\frac{1}{6})^2 = \frac{5}{36}$.

(2) ① 两次停在同一个人手中: $A \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow B, A \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B, A \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow B$;

② 一次停在同一个人手中: $A \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B, A \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow B, A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow B, A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow B, A \rightarrow C \rightarrow C \rightarrow B, A \rightarrow D \rightarrow D \rightarrow B$;

③ 球没有停留: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B, A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow B, A \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B, A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B, A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B, A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B, A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B$.

$\therefore$ 掷 3 次硬币, 球在 B 手中的概率为 $(\frac{1}{2})^2 \cdot \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{2} \times (\frac{1}{6})^2 \times 6 + (\frac{1}{6})^3 \times 7 = \frac{13}{54}$.

评析 本题把排列组合和概率很好地结合在一起, 需要考生分多种情况去讨论, 考查了学生分类讨论思想和相互独立事件概率的计算方法, 有一定难度, 希望考生要注意这一考试趋势.

20. (理) (1) $\therefore f'(x) = 2x - \frac{a}{x}$, 依题意 $x \in [1, 2]$ 时 $f'(x) \geq 0$,

$\therefore a \leq 2x^2, \therefore a \leq 2$. ①

又 $\therefore g'(x) = 1 - \frac{a}{2\sqrt{x}}$, 依题意 在 $(0, 1)$ 上 $g'(x) \leq 0$,

$\therefore a \geq 2\sqrt{x}, \therefore a \geq 2$. ②

由 ①② 可知 $a = 2, \therefore f(x) = x^2 - 2\ln x, g(x) = x - 2\sqrt{x}$.

(2) C_2 方程为: $y = x - 2\sqrt{x} + 2$, 依题意就是讨论方程 $x^2 - \ln x = x - 2\sqrt{x} + 2$ 的根的个数.

原方程为 $x^2 - 2\ln x = x - 2\sqrt{x} + 2$ 即 $x^2 - 2\ln x - x + 2\sqrt{x} - 2 = 0$, 设 $u(x) = x^2 - 2\ln x - x + 2\sqrt{x} - 2, (x > 0)$, 下面判断 $u(x)$ 的曲线与 x 轴交点的个数, $u'(x) = 2x - \frac{2}{x} - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} =$

$$\frac{2x^2 - 2 - x + \sqrt{x}}{x} = \frac{2(x+1)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) - \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{x} = \frac{(\sqrt{x}-1)[2(x+1)(\sqrt{x}+1) - \sqrt{x}]}{x}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)[2x(\sqrt{x}+1)+\sqrt{x}+2]}{x}$$

∴ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $u'(x) < 0$, $x \in (1, +\infty)$ 时, $u'(x) > 0$,
∴ $u(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为减函数, 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数,
 $u(1) = 1 - 0 - 1 + 2 - 2 = 0$, ∴ $u(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为零.

∴ 交点的个数只有一个.

评析 本题通过导数来研究函数的单调性而求出 a 的值, 对于第(2)问, 这种求交点个数的问題, 由于方程不能直接求解, 就转换成其函数图像与 x 轴的交点, 再利用导数的方法研究函数单调性, 求出与 x 轴交点的个数, 即为解的个数.

(文) ∵ $16x + 21 < 6$, ∴ $(6x + 2)^2 < 36$, 即 $k^2x^2 + 4kx - 32 < 0$. 显然 $k \neq 0$, 由题设可得 $-\frac{4k}{k^2} = (-1) + 2$, $\frac{-32}{k^2} = (-1) \times 2$.

解得 $k = -4$, ∴ $f(x) = -4x + 2$.

由 $\log_a \frac{6}{f(x)} < \log_a (1-x)$ ($0 < a < 1$) 得

$$\log_a \frac{6}{-4x+2} < \log_a (1-x),$$

$$\begin{cases} -4x+2 > 0, & \text{①} \\ 1-x > 0, & \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{-4x+2} > 1-x, & \text{③} \end{cases}$$

由①解得 $x < \frac{1}{2}$, 由②解得 $x < 1$,

由③得 $\frac{(2x+1)(x-2)}{2x-1} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 2$,

∴ 原不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right\}$.

评析 本题考查了函数与不等式的关系, 以及对数函数的单调性, 解答本题时一定要注意其真数大于零这一条件, 同时最后结果一定要写成集合.

21. (1) 由题意可设切线 AB 的方程为 $y = kx - 1$ 代入 $y = x^2$, 得 $x^2 - kx + 1 = 0$, ∴ 点 B 在第一象限, ∴ $k = 2$, ∴ 切线 AB 的方程为: $y = 2x - 1$.

∵ $y = x^2$, $y' = 2x$, ∴ $y' = 2$, ∴ $x = 1$, ∴ $y = x^2 = 1$,
∴ 切点 B 的坐标为 $(1, 1)$.

(2) 由(1)得线段 AB 的中点 $M\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 设直线 l 的方程为 $y =$

$m\left(x - \frac{1}{2}\right)$, 点 $E(x_1, x_1^2)$, $F(x_2, x_2^2)$, $P(x_3, x_3^2)$, $Q(x_4, x_4^2)$.

由 $\begin{cases} y = m\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ y = x^2 \end{cases}$, 得 $x^2 - mx + \frac{m}{2} = 0$.

∴ $\Delta = m^2 - 2m > 0$, 解得 $m > 2$ 或 $m < 0$,

$$\therefore x_1 + x_2 = m, x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}m.$$

∴ A, P, F 共线, ∴ $k_{AP} = k_{AF}$,

$$\therefore \frac{x_3^2 + 1}{x_3} = \frac{x_2^2 + 1}{x_2} \Rightarrow (x_3 - x_2)(x_2x_3 - 1) = 0,$$

∴ $x_2 \neq x_3$, ∴ $x_2x_3 = 1$, $x_3 = \frac{1}{x_2}$, 同理由 Q, E, A 三点共线可得 x_4

$$= \frac{1}{x_1}, \text{而 } k_{PQ} = \frac{x_3^2 - x_4^2}{x_3 - x_4} = x_3 + x_4 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{m}{\frac{1}{2}m} = 2.$$

∴ 通过 P, Q 两点直线的斜率为定值.

评析 本题主要考查了直线与抛物线的位置关系、韦达定理和直线斜率的求法, 对数形结合和建模能力也有考查, 同时也考查了设而不求这一解析几何的重要思想. 在解题过程中计算与化简占了很大的比重, 但是计算和化简要结合题目中给出的曲线特点和它们的相互关系进行.

22. (1) $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$, 当 $x \geq 0$ 时 $f'(x) \leq 0$.

∴ 函数 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是减函数.

(2) 即解不等式 $f\left(\sqrt{x - \frac{1}{x}}\right) \leq f(2)$, 由(1)知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是减函数,

$$\therefore \sqrt{x - \frac{1}{x}} \geq 2,$$

$$\therefore \begin{cases} x - \frac{1}{x} \geq 0 \\ x - \frac{1}{x} \geq 4 \end{cases}, \text{解得 } 2 - \sqrt{5} \leq x < 0 \text{ 或 } x \geq 2 + \sqrt{5}.$$

(3) ∵ 函数 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是减函数,

∴ 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \ln(1+x) - x \leq f(0) = 0$.

即当 $x \geq 0$ 时, $\ln(1+x) \leq x$.

① 当 $n = 1$ 时, $u_1 = \ln a = \ln[1 + (a-1)] \leq a-1$, 命题成立.

② 假设 $n = k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) 时, 命题成立, 即 $u_k \leq a-1$.

∴ $(a-1) - u_k \geq 0$.

当 $n = k+1$ 时, $u_{k+1} = u_k + \ln(a - u_k) = u_k + \ln[1 + (a-1) - u_k] \leq a-1 + [(a-1) - u_k] \leq a-1$,
这就是说 $n = k+1$ 时命题也成立.

由①②可知 $n \in \mathbb{N}^*$ 有 $u_n \leq a-1$.

评析 本题主要考查函数、函数的导数、不等式、数列、数学归纳法等, 体现在知识的交汇处命题的原则, 具有一定的高等数学知识背景, 试题的情况较新颖, 着力考查新教材中的新知识(导数)及应用, 对于不等式的证明方法有较高的要求, 第(3)问也可直接证明.

2006 年北京—黄冈高考最后冲刺预测试卷(六) 测试报告

相关事项 测试学校	难度系数	平均分	最高分	140 分以上 人数百分比	130 ~ 140 分 人数百分比	120 ~ 130 分 人数百分比	110 ~ 120 分 人数百分比	100 ~ 110 分 人数百分比
北师大附中	0.56	107.4	146	2.3%	9.6%	15.4%	28.8%	19.2%

【测试总评】 本套试卷的难度与 2005 年全国高考卷 I 的难度相当, 本份试卷的知识覆盖面较广, 创新性较好. 通过测试情况来看, 试题的难度适中, 学生们的答题情况较好, 说明通过一轮复习的强化与巩固, 同学们对基础知识的掌握情况还是不错的, 但是也存在着一些共性的问题, 在今后的复习中要加以改进和适当的强化:

(1) 学生们对新颖的试题如何选择题的第 3 和第 11 小题, 不知道如何下手, 找不到合适的突破口, 思维不能及时地进行转化, 对数学模型的构造欠缺, 在平时的训练中应当加强这方面的练习, 要有意识地记忆、理解一些常见的数学模型的构建及其应用, 以此来提高自己的分析问题和解决问题的能力.

(2) 通过测试还反映出一个问题就是学生普遍地化简运算和计算能力较低, 这突出地表现在第 21 题和第 22 题上, 由于化简运算能力不过关, 好多同学不能灵活、及时对方程、解析式进行必要的化简和变形, 使得题目的解题过程臃肿, 甚至出现中途就做不到不下去的现象.

(3) 在以后的复习中应当注重基础知识、基本方法的训练, 练就良好的个性品质, 遇到难题要泰然处之, 把心态放平和.

1. (理) B $\frac{(2+2i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5} = \frac{2^4(2i)^2}{2^5\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5} = \frac{-2}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} = -1+\sqrt{3}i$.

故而选 B.

评析 本题考查了复数的运算和虚数单位 i 的幂的运算的周期性以及 1 的立方虚根的应用. 在计算的过程中及时、灵活地提取公因式并利用 ω 的性质进行化简, 能取得事半功倍的效果.

(文) A $\because f'(x) = 3x^2 - 2ax = 3\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{3}$, 要使函数 $f(x)$

在 $(0, 2)$ 上单调递减, 只要使 $x \in (0, 2)$ 时 $f'(x) < 0$ 即可. 从而问题转化为 $\begin{cases} f'(0) \leq 0 \\ f'(2) \leq 0 \end{cases}$, 解得 $a \geq 3$. 故而选 A.

2. B 对集合 M , 由元素的互异性可知 $a^2 \neq a$, ∴ 解得 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 对集合 N , 由元素的互异性可知 $-a \neq 2a-1$, 即 $a \neq \frac{1}{3}$.

又由 $\text{card}(M \cup P) = 3$ 可知, M 和 P 中有一个元素相同.

若 $a = -a$, 则 $a = 0$, 与互异性矛盾;

若 $a = 2a-1$, 则 $a = 1$ 矛盾;

若 $a^2 = -a$, 则 $a = 0$ 矛盾或 $a = -1$;

若 $a^2 = 2a-1$, 则 $a^2 - 2a + 1 = 0$, ∴ $a = 1$, 矛盾.

综上所述, $a = -1$, 此时 $M = \{-1, 1\}$, $P = \{1, -3\}$, ∴ $M \cap P = \{1\}$. 选 B.

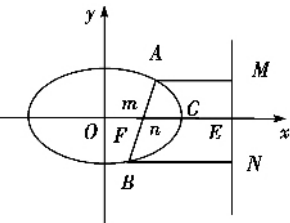
评析 此题主要考查集合中元素的特征以及集合的交、并运算,首先由集合元素的互异性将 a 的取值范围进行界定,对后面的讨论有很大的帮助.

3. D 如图,把 $\triangle BCD$ 当作三棱锥的底面, $AO \perp$ 面 BCD 于 O , $\therefore l_2 \parallel l_3$, $\therefore$ 无论 B 点在 l_2 上什么位置, $\triangle BCD$ 的面积总不变.
- 又 $\therefore l_2 \parallel l_3$, $\therefore l_2, l_3$ 确定一个平面 α , $\therefore l_1 \parallel l_2$, 且 A 不在 l_2, l_3 确定的平面 α 上, $\therefore l_1$ 平行于 l_2, l_3 确定的平面 α , 从而不论 A 在 l_1 的什么位置,高 AO 的长总不变.

又 $V = \frac{1}{3} \times \text{高} \times \text{底面积}$,故无论 A, B 在什么位置时,其体积不变.

评析 此题是一道关于棱锥体积计算的开放题,通过三条不共面的直线将三棱锥的各顶点以动态的方式给出,但由于线段 CD 的定值性和 $l_2 \parallel l_3$,确定了 $\triangle BCD$ 的面积也是一个定值,又根据 A 点在与面 BCD 平行的直线 l_1 上,故不论 A 点处于何位置,点 A 到平面 BCD 的距离保持不变,故三棱锥的体积是一个不变量. 此题很好地考查了直线与直线平行、平面与平面平行的性质以及空间想象能力.

4. B 如图所示,分别过 A, B 作右准线 $x = 4$ 的垂线,垂足为 M, N . 设右准线和 x 轴的交点为 E , 则 $|EF| = x_E - x_F = 3$, 由椭圆的第二定义可知 $\frac{|AF|}{|AM|} = \frac{|BF|}{|BN|} = \frac{1}{2}$, $\therefore |AM| = 2m, |BN| = 2n$.



由平面几何知识可得: $|FE| = \frac{|BN| + \frac{n}{m}|AM|}{1 + \frac{n}{m}}$, $\therefore 3 =$

$$\frac{2n + 2m \cdot \frac{n}{m}}{1 + \frac{n}{m}}, \text{整理得 } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{4}{3}.$$

评析 本题主要考查椭圆的几何性质及第二定义的应用,解题时要准确地画出图形来帮助寻找思路.

5. C $\therefore a_n$ 是等差数列, $\therefore$ 有 $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 5a_9$, 而 $a_3 + a_{15} = 2a_9$, 且 $a_3 + a_{15} = 6$, $\therefore a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 15$.
- 评析 此题考查了等差数列的“等距离性”,即在等差数列中,与首、末两项距离相等的两项的和都等于首、末两项的和.
6. D 由题意知椭圆的焦点 F_1, F_2 恰为两圆的圆心,则 $|PQ| + |PR|$ 的最小值就转化为 P 到 F_1, F_2 的距离之和达到最小,因 $|PF_1| + |PF_2| = 10$, 故 $|PQ| + |PR|$ 的最小值为 9, 所以选 D.

评析 此题主要考查了椭圆的定义及圆的特征,将所求的 $|PQ| + |PR|$ 的最小值问题转化为椭圆上的点到其两个焦点的距离之和最小的问题,使得问题便于求解,是一种很不错的转化策略.

7. A $\therefore f(x) = \frac{\cos^2 x}{\cos x \sin x - \sin^2 x} = \frac{1}{\tan x - \tan^2 x}$
- $$= \frac{1}{-(\tan x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}},$$
- $\therefore 0 < x < \frac{\pi}{4}$, $\therefore 0 < \tan x < 1$, $\therefore$ 当 $\tan x = \frac{1}{2}$ 时 $-(\tan x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$ 取得最大值 $\frac{1}{4}$, 从而 $f(x)$ 取得最小值 4, 故而选 A.

评析 此题对三角函数化简的灵活性及预见性要求较高,主要考查了三角公式的运用和换元思想,特别注重了对二次函数在开区间上的最值的求解问题的考查.

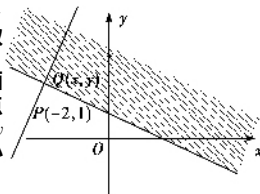
8. A $\therefore$ 函数 $y = a^x$ 与 $y = \frac{1}{a^x}$ 的图象关于直线 $x = 0$ 对称, 且互为

反函数的图象关于直线 $y = x$ 对称, $\therefore$ 它们的反函数的图象必关于直线 $y = 0$ 对称.

评析 本题考查了反函数的定义以及函数图象的对称问题,在求解时可以画出草图来帮助判断.

9. B $f^{-1}(x) = 2^x - 1$, $\therefore [1 + f^{-1}(a)] [1 + f^{-1}(b)] = 2^a \cdot 2^b = 2^{a+b} = 8$, $\therefore a + b = 3$, $\therefore f(a+b) = \log_2(3+1) = 2$.
- 评析 本题考查了反函数解析式的求法,解题时要注意反函数的定义域应该是原函数的值域. 因为题目中已经给出的条件 $[1 + f^{-1}(a)] [1 + f^{-1}(b)] = 8$ 不便于做其他的变形与转化,故而应当直接把反函数 $f^{-1}(x)$ 的解析式求出来,再进行化简将 $a + b$ 的值求出来,最后再求 $f(a+b)$ 的值.

10. (理) D 因为 $x, y \in \mathbb{R}$ 且 $x + 2y \geq 1$, 所以表示的平面区域如图所示. 函数式 $u = x^2 + y^2 + 4x - 2y = (x+2)^2 - 5$, 当 $x = -2, y = 1$ 时, 即取 P, u 的值最小, 但是点 $P(-2, 1)$ 不在区域 $x + 2y \geq 1$ 内, 所以函数 $u = x^2 + y^2 + 4x - 2y$ 不在点 P 处取得最小值. 但是, 当整体 $v = (x+2)^2 + (y-1)^2$ 取得最小值时, u 就取得最小值, 即 $\sqrt{v} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}$ 取得最小值. 可以理解为在区域 $x + 2y \geq 1$ 上任取一点 $Q(x, y)$ 到点 $P(-2, 1)$ 的距离的最小值, 故作直线 PQ 垂直于直线 $x + 2y = 1$, 垂足为 Q 就是要求的符合条件的点.



又 $l_{PQ} 2x - y + 5 = 0$, 由 $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$ 得点 Q 的坐标为 $(-\frac{9}{5}, \frac{7}{5})$.

把 $Q(-\frac{9}{5}, \frac{7}{5})$ 代入 $u = x^2 + y^2 + 4x - 2y = (x+2)^2 + (y-1)^2 - 5 = (-\frac{9}{5} + 2)^2 + (\frac{7}{5} - 1)^2 - 5 = -\frac{24}{5}$.

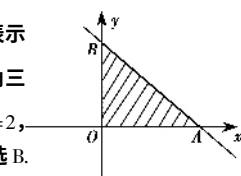
即 $-\frac{24}{5}$ 为所求的最小值. 故选 D.

评析 本题要求函数式 $u = x^2 + y^2 + 4x - 2y = (x+2)^2 + (y-1)^2 - 5$ 的最小值, 可以转化为在区域 $x + 2y \geq 1$ 上任取一点 $Q(x, y)$ 到点 $P(-2, 1)$ 的距离的最小值, 故作直线 PQ 垂直于直线 $x + 2y = 1$, 垂足 Q 就是要求的符合条件的点.

(文) B 不等式组 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$ 所表示

的平面区域如图所示, 是一个直角三角形.

由题意可知 $|OA| = |OB| = 2$, $\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |OA| |OB| = 2$, 故而在 B.



评析 本题主要考查了简单线性规划的应用, 准确地作出不等式组所表示的平面区域是解决此类问题的关键.

11. (理) B 令 $x = -\alpha$ 得 $\cos(\gamma - \alpha) = -1 - \cos(\beta - \alpha)$, 令 $x = -\beta$ 得 $\cos(\gamma - \beta) = -1 - \cos(\beta - \alpha)$, $\therefore \cos(\gamma - \alpha) = \cos(\gamma - \beta)$. 令 $x = -\gamma$ 得 $\cos(\gamma - \beta) + \cos(\gamma - \alpha) = -1$, $\therefore \cos(\gamma - \alpha) = -\frac{1}{2}$, 又 $\therefore 0 < \alpha < \beta < \gamma < 2\pi$, $\therefore \gamma - \alpha = \frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}$, $\gamma - \beta = \frac{4\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$, $\therefore \gamma - \alpha = \frac{4\pi}{3}$, $\gamma - \beta = \frac{2\pi}{3}$. 故而在 B.

评析 此题把三角函数的求值问题巧妙地隐藏起来, 通过一个恒成立的等式把条件进行了隐蔽, 但是在 x 取值的任意性中蕴含了重要的结论, 我们通过对 x 的合理赋值使得问题获解, 最后还要注意求得值的取舍.

(文) D 由最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$, 得 $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$, $\therefore \omega = 4$,

令 $\omega x + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$, 即 $4x + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$,

将 $x = \frac{\pi}{3}$ 代入, 得 $\varphi = k\pi - \frac{5}{6}\pi$, 当 $k = 1$ 时, $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

$\therefore y = A \sin(4x + \frac{\pi}{6}) + m$, 可排除 B、C.

函数最大值是 4, 最小值是 0, 而 A 中最大值为 4, 最小值是 -4, 可排除 A.

评析 本题主要考查了三角函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + m$ 的图象及性质, 根据题目中给出的条件确定函数解析式, 此题采用的是排除法, 另外还可以根据以上的分析利用直接法求解.

12. C 易知 AB, AC, AD 两两互相垂直, 进而 $AB^2 + AC^2 + AD^2 = (2r)^2 = 64$.

$$S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \times AB \times AC + \frac{1}{2} \times AC \times AD + \frac{1}{2} \times AD \times AB \leq \frac{AB^2 + AC^2}{4} + \frac{AC^2 + AD^2}{4} + \frac{AD^2 + AB^2}{4} = \frac{AB^2 + AC^2 + AD^2}{2} = 32.$$

当 $AB = AC = AD$ 时, 取得等号. 故而选 C.
 评析 此题是一道立体几何与不等式相结合的试题, 角度新颖, 对考生分析问题和解决问题的能力要求较高, 在求解的过程中应当注意 AB, AC, AD 是两两垂直的, 然后构造出三个三角形的面积之和的表达式, 再联系均值不等式来求最大值.

13. ①② 当 $a > 0 > b$ 时 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 故而命题①是错误的. 不等式的乘方法则是在 $a > b > 0$ 的前提下才成立, 而命题②忽略了这一条件, 故而也是错误的. 命题③由 $ac^2 > bc^2$ 可得 $(a - b)c^2 > 0$, 且 $c \neq 0, c^2 > 0$, 故而一定有 $a > b$, 此命题是正确的. 对于命题④, $\because c > a, \therefore c - a > 0$, 从而 $\frac{1}{c-a} > 0$, 又 $a > b > 0, \therefore a \cdot \frac{1}{c-a} > b \cdot \frac{1}{c-a} > 0$, 即 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-a}$, 故而命题④是正确的. 此题应当填写①②.

评析 本题主要考查了不等式的性质及其应用, 在判断各命题的真假时要特别注意各不等式成立的前提条件, 不等式的性质是解不等式和进行不等式的变形、化简及证明的理论基础和依据.

14. (理) $\frac{1}{7}$ 设展开式中第 $r+1$ 项为常数项, 则 $T_{r+1} = (-1)^r C_8^r (\frac{x}{2})^{8-r} (x^{-\frac{1}{3}})^r = (-1)^r C_8^r x^{8-\frac{4r}{3}} (\frac{1}{2})^{8-r}$,
 令 $8 - \frac{4r}{3} = 0, r = 6$ 从而 $q = C_8^6 \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{1}{4} = 7$,
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n + 1}{q^{n+1} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n + 1}{7^{n+1} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (\frac{1}{7})^n}{7 - (\frac{1}{7})^n} = \frac{1}{7}$.

评析 此题将二项展开式通项公式的应用和极限的求法有机地融合在一起, 先利用通项公式确定出二项式 $(\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^8$ 展

开式中的常数项 q , 再代入 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n + 1}{q^{n+1} - 1}$ 中求极限.

(文) $(-2)^n (1 - 3x + 2y)^n$ 中不含 y 的项为 $(1 - 3x)^n$, 令 $x = 1$ 则系数和为 $(-2)^n$.

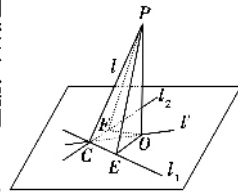
评析 本题主要考查二项展开式中特定项的系数的确定问题. 由于 $(1 - 3x + 2y)^n$ 中不含 y 的项也就是当 $y = 0$ 时的项, 故而令 $y = 0$ 即得不含 y 的项为 $(1 - 3x)^n$, 再令这个二项式中的 $x = 1$ 即得其系数和. 根据题意进行合理地赋值是解决此类问题的妙法.

15. $\frac{2}{3}$ 甲比乙命中 10 环次数多的事件为 A , 事件 A 包括三个互斥事件: 甲命中 10 环 1 次乙命中 10 环 0 次为 A_1 , 甲命中 10 环 2 次乙命中 10 环 0 次为 A_2 , 甲命中 10 环 2 次乙命中 10 环 1 次为 A_3 .
 且 A_1, A_2, A_3 为互斥事件,
 $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = C_2^1 \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) \times C_2^0 (1 - p)^2 + C_2^2 (\frac{1}{2})^2 \times C_2^0 (1 - p)^2 + C_2^2 (\frac{1}{2})^2 \times C_2^1 p \times (1 - p) = \frac{1}{4} (p^2 - 4p + 3)$, 由题意得 $\frac{1}{4} (p^2 - 4p + 3) = \frac{7}{36}$, 解得 $p = \frac{2}{3}$ 或 $p = \frac{10}{3}$, 又因为 $0 \leq p \leq 1$, 所以 $p = \frac{2}{3}$.

评析 本题主要考查了互斥事件和独立重复事件的概率应用问题的解法, 首先要将甲比乙命中次数多这个事件的具体情况分析清楚, 然后利用独立重复事件的概率计算公式将各种情况的概率计算出来, 结合已知条件列出概率等式, 最后通过解方程来求 p 的值求出来.

16. (1) (3) (4) $\Rightarrow$ (2) 或 (2) (3) (4) $\Rightarrow$ (1)
 如图所示, 平移直线 l_2 使 l 过 l_1, l_2 的交点 C , 在 l 上取一点 P , 由 P 作 α 的垂线, 垂足为 O , 连结 CO , 过 O 点作 $OE \perp l_1, OF \perp l_2, E, F$ 分别为垂足. 连结 PE, PF , 则 $PE \perp l_1, PF \perp l_2$.
 评析 本题是一道关于异面直线、线线垂直的开放型问题, 本题的内涵相当丰富, 这是新课标下高考考查的一个热点问题,

应当引起足够的重视, 此题对空间想象能力和逻辑思维能力的要求较高, 首先根据题意画出合理的示意图, 将题中涉及到的直线 l, l_1, l_2 以及 l 在 α 上的射影画出来, 再根据图形结合组成的命题逐一进行判断.



17. (1) 由题意易得 $c = (1, -1)$.
 (2) (i) $x(1, 1) + y(1, -1) = (1, -\frac{3}{2})$, 解得 $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}$, $\therefore$ 在 f 下 $(1, 2)$ 的原像是 $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.

(ii) 假设 l 存在, 若斜率不存在时, 不满足题意, 若斜率存在可设其方程为 $y = kx + b (k \neq 0)$, 直线上任一点在 f 的作用下的象是 $(x+y, x-y)$,
 $\therefore x-y = k(x+y) + b$, 即 $(1+k)y = (1-k)x - b$, 此方程即 $y = \frac{1-k}{1+k}x - \frac{b}{1+k}$. ($k = -1$ 时, l 不存在)

$$\therefore \frac{1-k}{1+k} = k, -\frac{b}{1+k} = b,$$

$$\therefore b = 0, k = -1 \pm \sqrt{2}.$$

$\therefore$ 这样的直线存在, 其方程是 $y = (-1 \pm \sqrt{2})x$.

评析 本题用向量作为依托, 将平面向量的运算与映射的知识紧密联系起来, 通过向量这个载体考查了对映射概念的理解及应用, 对分析问题和解决问题的能力要求较高.

18. (1) $\because PB \perp$ 底面 $ABCD, CD \perp PD, \therefore CD \perp BD$.
 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB = AD = 3, \therefore BC = 6$.
 取 BC 的中点 F , 连结 PF , 则 $AF \parallel CD$.
 $\therefore$ 异面直线 PA 和 CD 所成的角就是 PA 和 AF 所成的角 $\angle PAF$.

在 $\triangle PAF$ 中, $AF = PA = PF = 3\sqrt{2}, \therefore \angle PAF = 60^\circ$,
 即异面直线 PA 和 CD 所成的角是 60° .

$$(2) \text{ 连结 } AC \text{ 交 } BD \text{ 于 } G, \text{ 连结 } EG, \therefore \frac{AG}{GC} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}, \text{ 又 } \frac{AE}{EP} = \frac{1}{2}, \therefore \frac{AG}{GC} = \frac{AE}{EP},$$

$$\therefore PC \parallel EG.$$

又 $EG \subset$ 平面 $EBD, PC \not\subset$ 平面 EBD ,
 $\therefore PC \parallel$ 平面 EBD .

(3) $\because PB \perp$ 平面 $ABCD, \therefore AD \perp PB$.

又 $\because AD \perp AB, \therefore AD \perp$ 平面 EAB . 作 $AH \perp BE$ 的延长线, 垂足为 H , 连结 DH , 则 $DH \perp BE$,
 $\therefore \angle AHD$ 是二面角 $A-BE-D$ 的平面角.

$$\text{在 } \triangle ABE \text{ 中, } BE = \sqrt{5}, AH = \frac{AB \cdot AE \cdot \sin 45^\circ}{BE} = \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \tan \angle AHD = \frac{AD}{AH} = \sqrt{5}. \text{ 所以, 二面角 } A-BE-D \text{ 的大小为 } \arctan \sqrt{5}.$$

19. (1) $n = 1$ 时, $2^0 \cdot a_1 = S_1 = 3, \therefore a_1 = 3$;
 当 $n \geq 2$ 时, $2^{n-1} \cdot a_n = S_n - S_{n-1} = -6, \therefore a_n = \frac{-3}{2^{n-2}}.$

$$\therefore \text{通项公式 } a_n = \begin{cases} 3 & (n=1) \\ -\frac{3}{2^{n-2}} & (n \geq 2) \end{cases}.$$

(2) 设 $\{\frac{1}{b_n}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 当 $n = 1$ 时, $b_1 = 3 - \log_2 1 = 3$,

$$\therefore T_1 = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{3};$$

$$n \geq 2 \text{ 时, } b_n = n \cdot (3 - \log_2 \frac{3}{2^{n-2}}) = n \cdot (n+1),$$

$$\therefore \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\therefore T_n = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{5}{6} - \frac{1}{n+1}, \therefore T_n = \frac{5}{6} - \frac{1}{n+1}.$$

评析 本题主要考查数列通项公式的求法以及数列的求和方法, 在近两年高考试题中, 文、理对数列试题的考查渐渐地趋于相同, 综合性和难度也在逐渐地降低, 一般涉及到等差数列和等比数列的基本问题, 同时还要注意数列求和方法的强化练习.

20. 设构成三角形的事件为 A , 线段 a 被分成三段, 长度分别为 $x, y, a - (x + y)$, 则有 $0 < x < a, 0 < y < a, 0 < a - (x + y) < a$.
 由一个三角形的两边之和大于第三边得,

$x+y>a-(x+y)$, 即 $2(x+y)>a$, 则 $x+y>\frac{a}{2}$,

$$\therefore \frac{a}{2} < x+y < a.$$

又由一个三角形的两边之差小于第三边得

$$x-[a-(x+y)]<y, \text{ 即 } 2x-a<0, \text{ 则 } x<\frac{a}{2},$$

$$\therefore 0 < x < \frac{a}{2}.$$

同理 $0 < y < \frac{a}{2}$. 而由 $\begin{cases} 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0 < y < \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} < x+y < a \end{cases}$ 可知, 满足条件的点

$P(x,y)$ 组成的图形是下图中的阴影部分 (不包括区域边界).

$$\text{而 } S_{\triangle \text{阴影}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{a^2}{8},$$

$$\therefore P(A) = \frac{S_{\triangle \text{阴影}}}{S_{\triangle \text{大三角形}}} = \frac{\frac{a^2}{8}}{\frac{a^2}{2}} =$$

$$\frac{1}{4}.$$

评析 本题将概率与线性规划以及面积的计算结合起来, 是一道考查分析问题和解决问题能力的新颖试题, 这也是新课标的基本要求, 考查学生的化归、转化思想及能力.

$$21. (1) |\vec{FG}| = \sqrt{(n-c)^2 + n^2} = \sqrt{2(n-\frac{c}{2})^2 + \frac{c^2}{2}}, \text{ 当 } n = \frac{c}{2}$$

$$\text{时, } |\vec{FG}|_{\min} = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = 1, \text{ 所以 } c = \sqrt{2}.$$

$$(2) \because \vec{PE} = \lambda \vec{OF} (\lambda \neq 0), \therefore \vec{PE} \text{ 垂直于直线 } x = \frac{a^2}{c}. \text{ 又 } |\vec{PF}| = \frac{c}{a} |\vec{PE}| (a > c > 0),$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 在以 } F \text{ 为焦点, } x = \frac{a^2}{c} \text{ 为准线的椭圆上, 设 } P(x,y), \text{ 则有 } \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + y^2} = \frac{\sqrt{2}}{a} \left| \frac{a^2}{2} - x \right|,$$

$$\text{把点 } B(0,-1) \text{ 代入, 解得 } a = \sqrt{3}. \therefore \text{曲线 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1.$$

(3) 假设存在方向向量为 $a_0 = (1,k) (k \neq 0)$ 的直线 l 满足条件. 则可设 $l: y = kx + m (k \neq 0)$, 与椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 联立, 消去 y

$$\text{得 } (1+3k^2)x^2 + 6kmx + 3m^2 - 3 = 0,$$

$$\text{由判别式 } \Delta > 0, \text{ 可得 } m^2 < 3k^2 + 1, \quad \textcircled{1}$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), MN \text{ 的中点为 } Q(x_0, y_0), \text{ 由 } |\vec{BM}| = |\vec{BN}|, \text{ 则有 } BQ \perp MN.$$

$$\text{由韦达定理代入 } k_{BQ} = -\frac{1}{k}, \text{ 可得到 } m = \frac{1+3k^2}{2}, \quad \textcircled{2}$$

$$\text{联立 } \textcircled{1} \textcircled{2}, \text{ 可得到 } k^2 - 1 < 0, \therefore k \neq 0, \therefore -1 < k < 0 \text{ 或 } 0 < k < 1, \text{ 即存在 } k \in (-1, 0) \cup (0, 1), \text{ 使 } l \text{ 与曲线 } C \text{ 交于两个不同的点 } M, N, \text{ 且 } |\vec{BM}| = |\vec{BN}|.$$

评析 本题通过向量运算和直线的方向向量与椭圆方程相结合, 考查了直线与椭圆的位置关系等基础知识, 对逻辑思维能力和计算、化简能力有较高的要求, 处理此类问题首先把心态放平, 找准突破口, 采取分步得分的原则来各个击破.

$$22. (\text{理}) (1) \text{ 当 } x \in [-1, 0] \text{ 时, } 2-x \in [2, 3], f(x) = g(2-x) = -2ax + 4x^3; \text{ 当 } x \in (0, 1] \text{ 时, } f(x) = f(-x) = 2ax - 4x^3,$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -2ax + 4x^3, & -1 \leq x \leq 0, \\ 2ax - 4x^3, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

(2) 由题设知, $f'(x) > 0$ 对 $x \in (0, 1]$ 恒成立, 即 $2a - 12x^2 > 0$ 对 $x \in (0, 1]$ 恒成立, 于是, $a > 6x^2$, 从而 $a > (6x^2)_{\max} = 6$.

(3) 因 $f(x)$ 为偶函数, 故只需研究函数 $f(x) = 2ax - 4x^3$ 在 $x \in (0, 1]$ 的最大值.

$$\text{令 } f'(x) = 2a - 12x^2 = 0, \text{ 得 } x = \sqrt{\frac{a}{6}}.$$

若 $\sqrt{\frac{a}{6}} \in (0, 1]$, 即 $0 < a \leq 6$, 则 $[f(x)]_{\max} = f(\sqrt{\frac{a}{6}}) = 2a \times \sqrt{\frac{a}{6}} - 4(\sqrt{\frac{a}{6}})^3 < 2a \times \sqrt{\frac{a}{6}} \leq 12$, 故此时不存在符合题意的 a ;

若 $\sqrt{\frac{a}{6}} > 1$, 即 $a > 6$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上为增函数, 于是 $[f(x)]_{\max} = f(1) = 2a - 4$.

令 $2a - 4 = 12$, 故 $a = 8$. 同理可得 $f(x)$ 在 $x \in [-1, 0]$ 时, $a = 8$ ($a = 0$ 时不合题意).

综上, 存在 $a = 8$ 时满足题设条件.

$$(\text{文}) (1) \text{ 由题设, } g(x) = f(x-2) = 2^{x-2} - \frac{a}{2^{x-2}}.$$

(2) 设 (x,y) 在 $y = h(x)$ 的图象上, (x_1, y_1) 在 $y = g(x)$ 的图象上, 则 $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = 2 - y \end{cases}$,

$$\therefore 2 - y = g(x), y = 2 - g(x), \text{ 即 } h(x) = 2 - 2^{x-2} + \frac{a}{2^{x-2}}.$$

$$(3) \text{ 由题设, } F(x) = \frac{2^x}{a} - \frac{1}{2^x} + 2 - 2^{x-2} + \frac{a}{2^{x-2}} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{4}\right)2^x + \frac{1}{2^x}(4a - 1) + 2,$$

$\therefore a \neq 0$, ① 当 $a < 0$ 时, 有 $\frac{1}{a} - \frac{1}{4} < 0, 4a - 1 < 0$, 而 $2^x > 0$, $\frac{1}{2^x} > 0$, $\therefore F(x) < 2$, 这与 $F(x)$ 的最小值 $m > 2 + \sqrt{7}$ 矛盾;

② 当 $0 < a \leq \frac{4}{3}$ 时, 有 $\frac{1}{a} - \frac{1}{4} > 0, 4a - 1 \leq 0$, 此时 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 故不存在最小值;

③ 当 $a \geq 4$ 时, 有 $\frac{1}{a} - \frac{1}{4} \leq 0, 4a - 1 > 0$, 此时 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数, 故不存在最小值;

$$\text{④ 当 } \frac{4}{3} < a < 4 \text{ 时, 有 } \frac{1}{a} - \frac{1}{4} > 0, 4a - 1 > 0, F(x) \geq 2\sqrt{\frac{(4-a)(4a-1)}{4a}} + 2,$$

$$\text{当且仅当 } 2^x = \sqrt{\frac{4a(4a-1)}{4-a}} \text{ 时取得等号, } F(x) \text{ 取最小值 } m =$$

$$2\sqrt{\frac{(4-a)(4a-1)}{4a}} + 2.$$

$$\text{又 } m > 2 + \sqrt{7} \text{ 及 } \frac{4}{3} < a < 4, \text{ 得 } \begin{cases} \frac{(4-a)(4a-1)}{4a} > \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} < a < 4 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{2} < a < 2 \\ \frac{1}{4} < a < 4 \end{cases}, \therefore \frac{1}{2} < a < 2.$$

评析 本题是函数的综合性题目, 它涵盖了函数解析式的求法、图象的对称及函数最值的求法、参数范围的求解等基本问题. 这也是高考压轴题的基本构成, 越是综合性强的题目, 所涉及到的知识越浅显, 由浅显的小题目逐渐渗透成一个复杂的难度较大的综合题. 在解答这类压轴题时, 应当把解题的策略找准, 不求面面俱到, 但求一点突破, 应用“分步得分”的得分策略把步骤分尽可能多得, 以此来获得最大“利润”, 提高总成绩.

2006年北京—黄冈高考最后冲刺预测试卷(七) 测试报告

相关事项 测试学校	难度系数	平均分	最高分	140分以上 人数百分比	130~140分 人数百分比	120~130分 人数百分比	110~120分 人数百分比	100~110分 人数百分比
北大附中	0.55	106	147	4%	7%	11%	15%	19%

【测试总评】 本套试卷难度与 2005 年全国卷相比略有偏高, 由上表测试情况可反映出以下问题: ①面对新颖的试题不知道如何入手, 如第 1 题一时找不到解题的突破口, 思维不能快速进入解题状态. ②构造模型、利用模型的能力不够强, 如第 18 题部分同学不会解. 需要在平时的解题训练中, 不断提升构造模型, 利用模型的能力. ③画图、读图、识图、用图的技能不是很强, 具体表现在: 画图不准

确,读图时信息翻译常有差错,抓不住问题的关键点。由于对一些基本概念不清楚,基本的运算不正确及基本的方法不熟练而失分的现象比较严重。在复习中还应对应以下方面进行加强:①复习和训练要立足基础、突出重点,要注重学习中,展示解题过程。在解题训练中要注意能力的培养;②注重加强个性品质的培养,遇易题不轻视、不粗心,遇难题不放弃。建议平时学习中要注重基础,注重总结、归类,提高分析问题和解决问题的能力。

1. (理) A 由 $a^2 - 2a + 4 = (a-1)^2 + 3 \geq 3$, 设 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), 则 $\begin{cases} x = a^2 - 2a + 4 \\ y = -(a^2 - 2a + 2) \end{cases}$, 消去 $a^2 - 2a$, 得 $y = -x + 2$ ($x \geq 3$).
 $\therefore$ 复数 z 对应的点的轨迹是一条射线, 方程为 $y = -x + 2$ ($x \geq 3$).
 评析 首先把 z 表示成 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) 的形式, 然后寻求 x, y 之间的关系, 但要注意参数的限定条件。

- (文) C 两圆 $(x - \frac{a}{2})^2 + (y-1)^2 = \frac{a^2}{4}$, $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 的圆心分别为 $O_1(\frac{a}{2}, 1)$, $O_2(2, 0)$, 则 O_1O_2 的中点 $(\frac{a}{4} + 1, \frac{1}{2})$ 在对称轴 $x - y - 1 = 0$ 上, 代入即得 $a = 2$, 故选 C.
 评析 本题的解法很多, 标准方程法, 图解法, 平移法, 两圆方程相减法 (所得方程即为对称轴方程) 等等, 自我选择最优方法。

2. A 因为 A 构造的图形是以 $(1, 0)$ 为圆心, 5 为半径的圆, B 构造的图形是以 $(-1, 0)$ 为圆心, 5 为半径的圆, C 是以 $E(t, t)$, $F(t, -t)$, $G(-t, -t)$, $H(-t, t)$ 为顶点的正方形, 如图所示, 要使 t 最大, 只需正方形内接于 $A \cap B$ 图形, 这时, 由 $E(t, t)$ 在 $(x+1)^2 + y^2 = 25$ 上得 $t = 3$. 所以满足条件的 t 的最大值为 3. 故选 A.
 评析 本题侧重于利用集合元素性质构造图形, 考查数形结合的数学方法。

3. D 设正三棱锥侧棱长为 a , 则底面边长为 $\sqrt{2}a$, 把正三棱锥补成正方体, 它们的外接球相同, 其半径为 $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, 由体积法求得内切球半径为 $r = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}a$, $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3} - 1}{3}$.

评析 为了考查与组合体有关的立体几何计算问题求解方法以及利用补形的思想方法解决问题的基本技能而设计本题. 充分利用侧棱两两垂直这一条件, 使用“割补法”来解答问题。

4. (理) C 圆 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$, 圆心 $(1, -2)$ 到直线 $2x + y + c = 0$ 的距离为 $d = \frac{|c|}{\sqrt{5}}$, $\therefore 1 < \frac{|c|}{\sqrt{5}} < 3$, $\therefore \sqrt{5} < |c| < 3\sqrt{5}$. 故选 C.

评析 本题主要考查直线与圆的位置关系. 解决此类问题要注重数形结合思想的应用. 关于直线与圆的位置关系的题目在高考中出现多次。

- (文) A 如图, 设断面的宽为 x , 高为 y , 则当 xy^2 取极大值时横梁的强度为最大.
 $\text{又 } y^2 = d^2 - x^2$,
 $\therefore f(x) = xy^2 = x(d^2 - x^2)$ ($0 < x < d$).
 $f'(x) = d^2 - 3x^2$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$.
 根据实际, 当 x 偏小 (接近 0) 或偏大 (接近 d) 时, 强度很小, 因此 $f(\frac{d}{\sqrt{3}})$ 为极大值, 横梁强度最大.

$\therefore$ 横梁锯成宽为 $\frac{\sqrt{3}}{3}d$, 高为 $\frac{\sqrt{6}}{3}d$ 时, 横梁的强度最大. 故选 A.
 评析 解有关函数最大值、最小值的实际问题, 在分析问题中的各个变量之间的关系的的基础上, 列出合乎题意的函数关系式, 并确定函数的定义域. 注意求得的结果一定要符合问题的实际意义。

5. A 在图(2)中, 连结 DM , 并延长交 BC 于 E , 连结 AE , 则有 $DE \perp BC$. 因为 $AD \perp$ 面 ABC , 所以 $AD \perp AE$, 又 $AM \perp DE$, 所以 $AE^2 = EM \cdot ED$, 于是 $S_{\triangle ABC}^2 = (\frac{1}{2}BC \cdot AE)^2 = (\frac{1}{2}BC \cdot EM) \cdot (\frac{1}{2}BC \cdot ED) = S_{\triangle BCM} \cdot S_{\triangle BCD}$. 故应选 A.

评析 本题主要考查类比的思维方法. 随着近几年高考数学命题对思维能力和创新意识考查的不断加强, 类比问题也成为高考命题的新亮点, 类比体现在多个方面, 本题是一个从平面几何到立体几何的类比. 本题中将平面几何中的射影定理类比到空间图形中, 应注意平面类比到空间的一般规律是“点”类比为“线段”, “线段长”类比为“面积”,

“面积”类比为“体积”等。

6. B 由题意可知满足 $|PM| - |PN| = 6$ 的 P 的轨迹是双曲线的右支, 根据“单曲型直线”的定义可知, 就是求哪条直线与双曲线的右支有交点. 故选择 B.
 评析 定义型试题可以和已学过的很多知识联系起来, 利用这类题型, 让学生进行观察、对比、分析、归纳、推理并理解数学概念和规律, 对开拓学生创新意识, 培养学生能力是大有裨益的。

7. D 因为 $B = 2A$, 所以 $\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{4}$, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\sin 2A}$, 所以 $\frac{b}{a} = \frac{\sin 2A}{\sin A} = 2 \cos A \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

评析 本题是三角函数知识的应用问题, 考生应强化变换角的训练, 经常注意角间关系的观察分析, 另外如何把一个含有不同名或不同角的三角函数式化为只含有一个三角函数关系式的训练也要加强, 这也是高考的重点. 在复习中, 应立足基本公式, 注意在条件与结论之间建立联系, 在变形过程中不断寻找差异, 讲究算理, 才能立足基础, 发展能力, 适应高考。

8. (理) C $(x + \frac{1}{y})^2 + (y + \frac{1}{2x})^2 = (x^2 + \frac{1}{4x^2}) + (\frac{2x}{y} + \frac{y}{x}) + (y^2 + \frac{1}{y^2})$, 由 $x > 0, y > 0$ 得 $(x^2 + \frac{1}{4x^2}) + (\frac{2x}{y} + \frac{y}{x}) + (y^2 + \frac{1}{y^2}) \geq 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $x^2 = \frac{1}{4x^2}$, $\frac{2x}{y} = \frac{y}{x}$, $y^2 = \frac{1}{y^2}$ 时, 即当且仅当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = 1$ 时, 不等式取等号, 所以本题正确答案为 C.

评析 本题是根据 2005 重庆高考题改编的, 容易发现, 对于改造以后的试题, 如果考生简单地套用基本不等式, 而并未验证不等式的等号是否能取得的, 就容易得到错误的答案 A 或 B, 因此只有先化简再求解才是这类问题的通法. 利用基本不等式取最值的要点之一就是每个等号必须能同时取得。

(文) D 易知 $a_3 = 4 = 3 \times 2^1 - 2$, $a_4 = 10 = 3 \times 2^2 - 2$, $a_6 = 22 = 3 \times 2^3 - 2$, ... 猜想 $a_n = 3 \times 2^n - 2$.

评析 数列递推公式是高考考查的重点和热点, 归纳和演绎 (构造等差、等比数列) 是两种不同的解题思路。

9. C 由 $f(-4) = f(0) = (-4)^2 + b \times (-4) + c = c$, ①
 $f(-2) = -2 \Rightarrow (-2)^2 + b \times (-2) + c = -2$, ②
 解之得, $b = 4, c = 2$. 则 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2, & x \leq 0, \\ 2, & x > 0, \end{cases}$ 由 $f(x) = x$ 得 $x^2 + 4x + 2 = x \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ 或 $x = -1$, 即 $x \leq 0$ 时有两个交点, 当 $x > 0$ 时有一个交点 $x = 2$.

综上 $f(x) = x$ 有三个解. 故选 C.
 评析 分段函数的计算是近年高考命题的一个热点问题. 本题就是考查函数方程的计算以及周密地分析问题和解决问题的能力. 由给出的两个函数方程联立解方程组并确定分段函数中的待定参数, 然后解方程 $f(x) = x$ 即可. 待定系数法是求函数解析式的通法. 本题就是通过计算求得方程的具体根后作出准确判断, 注意别忽视了 $x = 2$ 这个解, 否则易错选 B. 这类题的求解有时也不需要求出方程的具体根, 只要画出函数图象, 通过确定函数图象的交点个数来求得方程根的个数。

10. D $f(x) = |\overrightarrow{OM}|^2 - 2$
 $= [(\cos \frac{\pi}{3}x + \cos \frac{\pi}{4}x)^2 + (\sin \frac{\pi}{3}x + \sin \frac{\pi}{4}x)^2] - 2$
 $= 2 \cos \frac{\pi}{12}x$, 令 $f(x) = 2 \cos \frac{\pi}{12}x = 0$,
 $\therefore \frac{\pi}{12}x = k\pi + \frac{\pi}{2}, x = 12k + 6$.

$\therefore a_n = 12n + 6, (n \in \mathbb{N}^+)$
 $\therefore |a_{n+3} - a_n| = |12(n+3) + 6 - (12n + 6)| = 36$.
 评析 本题是知识交汇题, 考查了三角函数、数列、向量等知识点. 严谨的思维、细致的计算是解知识交汇题的关键。

11. B 由正弦定理得 $\sin A + \sin B = \lambda \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$, 又因 $A + B = 120^\circ$, 所以 $\sin A + \sin(120^\circ - A) = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$, 化简得 $\frac{3}{2}\sin A + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$,

即 $\sin(A+30^\circ) = \frac{1}{2}\lambda$, 由于 $1 < \lambda < \sqrt{3}$,

所以 $\frac{1}{2} < \sin(A+30^\circ) < \frac{\sqrt{3}}{2}$, 由于 $A+B=120^\circ$, 且 $B>0$, 有 $30^\circ < A+30^\circ < 150^\circ$, 所以 $30^\circ < A+30^\circ < 60^\circ$, 或 $120^\circ < A+30^\circ < 150^\circ$, 故 $0 < A < 30^\circ$ 或 $90^\circ < A < 120^\circ$. 故选 B.

评析 利用正弦定理可将三角形边的关系转化为角的关系, 再利用三角函数知识便可求出含 A 角的某个三角函数值的取值范围, 进而可求出角 A 的范围.

12. (理) A 由题意有 $\overrightarrow{BD} = \frac{m}{n} \overrightarrow{DC}$, 即点 D 分有向线段 $\overrightarrow{BC}$ 所成的

比为 $\lambda = \frac{m}{n}$,

设点 D 的坐标为 (x, y) , 则由定比分点坐标公式有

$$\begin{cases} x = \frac{b_1 + \frac{m}{n}c_1}{1 + \frac{m}{n}} = \frac{mc_1 + nb_1}{m+n} \\ y = \frac{b_2 + \frac{m}{n}c_2}{1 + \frac{m}{n}} = \frac{mc_2 + nb_2}{m+n} \end{cases} \therefore D\left(\frac{mc_1 + nb_1}{m+n}, \frac{mc_2 + nb_2}{m+n}\right).$$

同理可求 $E\left(\frac{ma_1 + nc_1}{m+n}, \frac{ma_2 + nc_2}{m+n}\right)$, $F\left(\frac{mb_1 + na_1}{m+n}, \frac{mb_2 + na_2}{m+n}\right)$.

设 $\triangle DEF$ 的重心坐标为 (x', y') , 则由重心坐标公式有:

$$x' = \frac{1}{3} \left(\frac{mc_1 + nb_1}{m+n} + \frac{ma_1 + nc_1}{m+n} + \frac{mb_1 + na_1}{m+n} \right) = \frac{1}{3} (a_1 + b_1 + c_1),$$

同理可求 $y' = \frac{1}{3} (a_2 + b_2 + c_2)$, 这也是 $\triangle ABC$ 的重心坐标.

故 $\triangle DEF$ 的重心与 $\triangle ABC$ 的重心重合.

评析 由重心坐标公式, 只要求出 $\triangle DEF$ 的各个顶点坐标即可. 三角形的五心中, 有四个心在高考中经常出现, 需要特别加以关注. 一是重心, 即各边的中线交点, 其重心坐标公式为 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$ (其中 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) 是三角形三个顶点坐标) 重心分对应的中线所成的比为 1:2 的关系. 二是外心, 即外接圆圆心, 也就是中垂线的交点, 外心到三个顶点的距离相等. 三是内心, 即内切圆圆心, 也就是角平分线的交点, 内心到三边的距离相等. 四是垂心, 即三角形的三条高的交点.

(文) C 解法一 由 $A(3, 7)$, $B(5, 2)$, 按 $a = (1, 2)$ 平移后分别为 $A'(4, 9)$ 和 $B'(6, 4)$,

所以向量 $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} = (6-4, 4-9) = (2, -5)$, 故选 C.

解法二 由于点或图形按某个向量平移, 其本质只是改变了点或图形的位置, 对于点或图形的大小, 方向均不会改变, 又由于向量的坐标与其起点和终点位置无关, 所以向量平移后仍与原向量坐标是相同的, 故 $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} = (5-3, 2-7) = (2, -5)$, 故选 C.

评析 利用平移公式分别求出点 A , B 经平移后所得的点的坐标, 再由向量坐标等于终点坐标减去起点坐标, 而得解. 或由平移的本质来解.

13. (理) $\frac{1}{8}$ $\because S_{2n} = (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) = (\frac{1}{5} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^5} + \dots + \frac{1}{5^{2n-1}}) + (-\frac{2}{5^2} - \frac{2}{5^4} - \frac{2}{5^6} - \dots - \frac{2}{5^{2n}})$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5^2}} + \frac{-\frac{2}{5^2}}{1 - \frac{1}{5^2}} = \frac{1}{8}. \text{ 故应填 } \frac{1}{8}.$$

评析 分析注意到数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和实际上是首项分别为 $\frac{1}{5}$ 和 $-\frac{2}{5^2}$, 公比都为 $\frac{1}{5^2}$ 的两个等比数列的前 n 项和的和,

则 S_{2n} 的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 即为这两个无穷等比数列的各项和的和, 从而可以由无穷等比数列求和公式快速求解. 挖掘出“每一类情况下的数列都是 $|q| < 1$ 的等比数列, 以及 S_{2n} 是首项分别为 $\frac{1}{5}$ 和 $-\frac{2}{5^2}$, 公比都为 $\frac{1}{5^2}$ 的两个等比数列的前 n 项和的和”这一特征, 立即可将 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 的问题化为求两个无穷等比数列各项和的问题. 深入的分析使得题目的求解过程既干练又简洁.

(文) -10 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 是方程 $ax^2 + bx + 2 = 0$ 的根, 所以由韦

达定理有 $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{b}{a}$, 且 $-\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{a}$, 由此解得

$a = -12, b = -2$, 故 $a - b = -10$.

评析 二次函数图象与 x 轴的交点的横坐标为一元二次方程的两根, 而一元二次不等式的解集可能在方程的两根之外, 也可能在两根之间.

14. (理) 第 4 项和第 5 项 因为第 6 项的二项式系数最大, 所以 $n = 10$. 展开式的通项是 $T_{r+1} = C_{10}^r \cdot (-1)^r \cdot 2^{-r} \cdot x^{\frac{30-r}{2}}$, 系数的绝对值是 $C_{10}^r \cdot 2^{-r}$, 若它最大则

$$\begin{cases} C_{10}^r \cdot 2^{-r} \geq C_{10}^{r+1} \cdot 2^{-(r+1)} \\ C_{10}^r \cdot 2^{-r} \geq C_{10}^{r-1} \cdot 2^{-(r-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{r+1}{10-r} \geq \frac{1}{2} \\ \frac{11-r}{r} \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{8}{3} \leq r \leq \frac{11}{3},$$

$\therefore r \in \mathbb{N}, \therefore r = 3, \therefore$ 系数绝对值最大的项是第 4 项, 即 $-C_{10}^3 \cdot 2^{-3} \cdot x^{\frac{9}{2}} = -15x^{\frac{9}{2}}$.

系数最大的项在项数为奇数的项之中, r 取偶数 0, 2, 4, 6, 8, 10 时, 各项系数分别为

$$C_{10}^0 = 1, C_{10}^2 \cdot 2^{-2} = \frac{45}{4}, C_{10}^4 \cdot 2^{-4} = \frac{105}{8}, C_{10}^6 \cdot 2^{-6} = \frac{105}{32}, C_{10}^8 \cdot 2^{-8} = \frac{45}{256}, C_{10}^{10} \cdot 2^{-10} = \frac{1}{1024}.$$

因此系数最大的项是第 5 项, 即 $\frac{105}{8} x^{\frac{13}{2}}$.

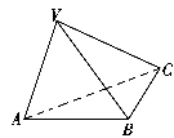
(文) 10 因为展开式中只有第 6 项的二项式系数最大, 所以 n 是偶数, 第 6 项即为中间项, $\frac{n}{2} + 1 = 6$, 得 $n = 10$.

评析 对于 (理) 在所有项的系数绝对值中, 最大的一个必须满足“比它相邻的项的系数绝对值都不小”这一必要条件, 据此列不等式组, 而在讨论系数最大的项时, 只须讨论奇数项即可. 对于 (文) 由于只有第 6 项的二项式系数最大, 所以展开式共有奇数项, n 为偶数, 由 $\frac{n}{2} + 1 = 6$ 即得.

15. 相离 相交 可利用圆锥曲线的统一定义, 当 $e = 1$ 时是相切; 当 $0 < e < 1$ 时, 曲线显得更“扁”, 从而圆变小, 则相离; 反之, 当 $e > 1$ 时, 曲线显得更“开阔”, 从而圆变大, 则相交. 也可用特殊值法解此题.

评析 直接运算, 本题的运算量是相当大的, 故可运用这种“相关联想”, 体现了数学的和谐美、统一美.

16. ①④ ①正确 ②反例如图, 令 $AB = VB = VC = BC = AC$, 则 $\triangle VBC$ 为等边三角形而 $\triangle VAB$ 和 $\triangle VCA$ 均为等腰三角形, 但不能判定为正三棱锥; ③侧面面积相等只不过是斜高相等并不能表示侧面为全等的三角形, 故不能判定; ④正确.



评析 本题主要考查正三棱锥的定义以及性质, 应将每一个命题中的条件与正三棱锥的定义进行对比、分析、判断. 要注意正三棱锥的定义, 性质与判定方法的关系与区别.

17. (理) (1) 由图易知函数 $y = f(t)$ 的周期 $T = 12$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6}$;

振幅 $A = \frac{1}{2} (13 - 7) = 3$, $\therefore 10$,

所以函数 $y = f(t)$ 的解析式为 $y = 3 \sin \frac{\pi}{6} t + 10$.

(2) 由题意, 该船进出港时, 水深应不小于 $5.0 + 6.5 = 11.5$ (米), 所以 $3 \sin \frac{\pi}{6} t + 10 \geq 11.5$, 即 $\sin \frac{\pi}{6} t \geq \frac{1}{2}$,

解得 $2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6} t \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$,

所以 $12k + 1 \leq t \leq 12k + 5 (k \in \mathbb{Z})$.

在同一天内, 取 $k = 0$ 或 $k = 1$, 则有 $1 \leq t \leq 5$ 或 $13 \leq t \leq 17$, 故该船可以当日凌晨 1 时进港, 17 时离港, 它在港内至多停留 16 小时.

评析 因为此题已知函数解析式的形式, 故只需由条件确定出其中的参数 A, ω, b , 一种方法是作图分析法, 即把上述 9 个点的位置在坐标系中画出, 然后根据 A, ω, b 的意义由图确定出各自的数值. 另一种方法是数据分析法, 即分析数据之间的变化规律, 再结合函数 $y = A \sin \omega t + b$ 图象的一般形状, 由所给数据直接确定参数 A, ω, b . 这是一道以轮船进出港口为背景的三角函数应用题, 问题涉及三角函数的图象、性质以及求值等各方面.

(文) $\therefore y = \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 2 \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$,

利用五点作图法, 首先将函数解析式化简为 $y = 2 \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$, 然后用换元法令 $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, 描出坐标系中的相关点, 再用平滑的曲线连结这五个点, 最后向两边伸展. 令 $x' = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}$, 列表如下:

$\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{3}$
$y = 2 \sin x'$	0	2	0	-2	0

在坐标系中描出相应的五点:

$(-\frac{\pi}{3}, 0), (\frac{2\pi}{3}, 2), (\frac{5\pi}{3}, 0),$
 $(\frac{8\pi}{3}, -2), (\frac{11\pi}{3}, 0).$

再用平滑的曲线将这五个点连接起来, 最后将其向两端伸展一下, 如图.

将 $y = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个

单位得到 $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ 的图象,

再将 $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ 的图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变), 得到 $y = \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$ 的图象;

再将 $y = \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$ 的图象上各点的纵坐标伸长到原来的 2 倍(横坐标不变), 即得 $y = 2 \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$ 的图象.

评析 作三角函数图象的方法有五点作图法和图象变换法以及三角函数线画法, 其中以五点作图法和图象变换法为主.

(1) 五点作图法是最基本的作图方法, 一般步骤是: 先将函数整理成 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的形式, 再作代换, 令 $z = \omega x + \varphi$, 分别令 $z = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, 求出相应的 x 值: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 及相应的 y 的值 $0, A, 0, -A, 0$; 在坐标系中作出五个点 $(x_1, 0), (x_2, A), (x_3, 0), (x_4, -A), (x_5, 0)$, 即函数图象上一个周期内的五个点, 用平滑曲线连结起五个点, 再向两端延伸即可得到函数在整个定义域上的图象.

(2) 用图象变换法作三角函数图象首先要明确哪个是平移前的图象(函数), 哪个是平移后的图象(函数), 将函数解析式整理成 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的形式. 一般三角函数图象变换包括相位变换、周期变换、振幅变换, 还可能涉及到上下平移变换. 这些变换在顺序上是不确定的, 一般我们常采用先相位(左右平移)变换, 再周期变换, 后振幅变换的顺序. 如果有特殊要求则按要求进行变换.

18. (理) (1) $P(x=1) = \frac{1+3+1}{50} = \frac{1}{10}, P(x \geq 3, y=3) = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}.$

(2) $P(x=2) = 1 - P(x=1) - P(x \geq 3) = 1 - \frac{5}{50} - \frac{35}{50} = \frac{10}{50} =$

$\frac{a+b+7}{50} \Rightarrow a+b=3. \quad \textcircled{1}$

又 $5 \times \frac{5}{50} + 4 \times \frac{b+4}{50} + 3 \times \frac{15}{50} + 2 \times \frac{15}{50} + 1 \times \frac{8+a}{50} = \frac{133}{50} \Rightarrow a+4b=9. \quad \textcircled{2}$

结合①②可得 $a=1, b=2$.

评析 该题与课本紧密联系, 恰当公式的选择需要思考, 需要反复深思. 概率试题的计算一般是比较复杂的, 需要细心, 认真才不会出错, 这点要千万当心! 请记住 细节决定成败.

(文) 设在这段时间内 3 个开关分别能够闭合为事件 A, B, C , 则它们的对立事件为 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 且 $P(A) = P(B) = P(C) = 0.7$, $P(\bar{A}) = P(\bar{B}) = P(\bar{C}) = 1 - 0.7 = 0.3$.

根据题意在这段时间内 3 个开关是否能够闭合相互之间没有影响, 即事件 A, B, C 相互独立.

(1) 在这段时间内“开关 J_A, J_B 恰有一个闭合”包括两种情况: 一种是开关 J_A 闭合但开关 J_B 不闭合(事件 $A \cdot \bar{B}$ 发生); 一种是开关 J_B 不闭合但开关 J_A 闭合(事件 $\bar{A} \cdot B$ 发生), 根据题意这两种情况不可能同时发生. 即事件 $A \cdot \bar{B}$ 与事件 $\bar{A} \cdot B$ 互斥. 根据互斥事件的概率加法公式和相互独立事件的概率乘法公式, 所求的概率是

$P(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) = P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B)$
 $= P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) = 0.7 \times 0.3 + 0.3 \times 0.7 = 0.42.$

(2) 在这段时间内, 线路正常工作, 意味着 3 个开关至少有一个能够闭合, 即事件 A, B, C 至少有一个发生, 其对立事件为事件 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 同时发生, 于是所求的概率为 $1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})$
 $= 1 - 0.3 \times 0.3 \times 0.3 = 1 - 0.027 = 0.973.$

故开关 J_A, J_B 恰有一个闭合的概率为 0.42 线路正常工作的概率是 0.973.

评析 电路中的连通问题与数学的概率综合, 是比较有意思的. 引入字母, 考虑事件与它的对立事件. 本题考查互斥事件有一个发生的概率和相互独立事件同时发生的概率, 并考查分析问题解决问题的能力.

19. (理) (1) 由已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则有 $2a_{r+1} = a_r + a_{r+2}$ ($r \in \mathbb{N}^*$).

则方程 $a_r x^2 + 2a_{r+1}x + a_{r+2} = 0$ 变形为 $a_r x^2 + (a_r + a_{r+2})x + a_{r+2} = 0$, 整理得 $(x+1)(a_r x + a_{r+2}) = 0$.

就是说 $x = -1$ 是所有方程的公共根.

(2) 由已知 $a_n \neq 0$ 得方程的另一个根为 $x = -\frac{a_{r+2}}{a_r}$, 即 $m_r = -\frac{a_{r+2}}{a_r}$, $\therefore d \neq 0$, 则有 $\frac{1}{m_r + 1} = \frac{1}{1 - \frac{a_{r+2}}{a_r}} = \frac{a_r}{a_r - a_{r+2}} = \frac{a_r}{-2d}$, 即为

数列 $\{\frac{1}{m_n + 1}\}$ 的通项公式,

$\therefore \frac{1}{m_{r+1} + 1} - \frac{1}{m_r + 1} = \frac{a_{r+1}}{-2d} - \frac{a_r}{-2d} = -\frac{1}{2},$

$\therefore$ 数列 $\{\frac{1}{m_n + 1}\}$ 是公差为 $-\frac{1}{2}$ 的等差数列.

评析 由 $\{a_n\}$ 是等差数列, 故 a_r, a_{r+1}, a_{r+2} 三项成等差数列, 由此可用于证明第一个问题, 并求方程的根, 进一步求出另外一根, 从而求出数列 $\{\frac{1}{m_n + 1}\}$ 的通项公式, 按定义证明即可. 这是一道数列与方程相结合的综合性问题, 解决此题的关键是把数列 $\{a_n\}$ 的性质与方程的根之间的关系准确地把握, 此题的解题途径新颖, 能较好地考查学生的创新思维能力.

(文) 设数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公比为 q ,

由条件 ① ②, 可得 $\begin{cases} a_1(1+q^5) = 11 \\ a_1^2 q^5 = \frac{32}{9} \end{cases}$, 解得

$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ q = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = \frac{32}{3} \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$,

$\therefore a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}$ 或 $a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{6-n}.$

若 $a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}$, $\therefore \frac{2}{3}a_2 + a_4 + \frac{4}{9} = \frac{32}{9}, 2a_3^2 = \frac{32}{9},$

$\therefore \frac{2}{3}a_2, a_3^2, a_4 + \frac{4}{9}$ 成等差数列.

若 $a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{6-n}$, $\frac{2}{3}a_2 + a_4 + \frac{4}{9} \neq 2a_3^2$, 舍去.

$\therefore$ 通项公式为 $a_n = \frac{2^{n-1}}{3} (n \in \mathbb{N}^*).$

评析 由题意直接设出数列通项公式, 然后由条件 ① ② 列方程组解出基本量, 再由 ③ 验证. 等比数列问题的一般处理思路是设首项 a_1 与公比 q , 然后由通项公式或前 n 项和公式转化条件列方程(组)求解. 另外凡与等比数列前 n 项和 S_n 有关的问题, 如果公比 q 不确定时, 必须讨论公比 q 是否等于 1.

20. (1) 建立如图所示的空间直角坐标系, 则

$A(0, 0, 0), F(1, 0, \sqrt{2}), D(0, 2, 0),$

建立如图所示的空间直角坐标系, 则

$A(0, 0, 0), F(1, 0, \sqrt{2}), D(0, 2, 0),$

$E(0, 0, \sqrt{2}), \overrightarrow{AF} = (1, 0, \sqrt{2}), \overrightarrow{DE} = (0,$

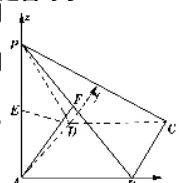
$-2, \sqrt{2}),$ 设 $\overrightarrow{AF}$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 的夹角为 θ ,

则 $\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{AF}| |\overrightarrow{DE}|}$

$= \frac{1 \times 0 + 0 \times (-2) + \sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (\sqrt{2})^2} \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$

$\therefore DE$ 与 AF 所成的角为 $\arccos \frac{\sqrt{2}}{3}.$

(2) $\because PA \perp$ 平面 $ABCD, \therefore PA \perp BD$, 又 $ABCD$ 是正方形, $\therefore BD \perp$



$AC, BD \perp \text{平面 } PAC$,

$\therefore BD \perp AM$,由题意可设 M 点坐标为 $(t, t, \sqrt{2}(2-t))$,

$\therefore \overrightarrow{AM} = (t, t, \sqrt{2}(2-t))$,又 $P(0,0,2\sqrt{2}), B(2,0,0)$,

$\overrightarrow{PB} = (2,0,-2\sqrt{2})$.

设 $AM \perp PB$,则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$,即 $2t - 2\sqrt{2} \times \sqrt{2}(2-t) = 0$,

$\therefore t = \frac{4}{3}$,此时 $M(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}), \overrightarrow{MC} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3})$,

$\therefore |\overrightarrow{MC}| = \frac{4}{3}$,又 $|\overrightarrow{PC}| = 4$,

$\therefore M$ 是 PC 边上靠近点 C 的一个三等分点.

评析 本题以四棱锥为载体考查了立体几何的综合问题,这是当前高考命题的一个重点内容,尤其是(2)问,其实质是一个探索性问题.

21. (理) (1) $\therefore$ 抛物线的离心率为 1.

$\therefore$ 方程 $f(x) = 0$ 有一个根为 1,即有 $f(1) = 1 + a + b + c = 0$,

$\therefore c = -1 - a - b$.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1 - a - b$

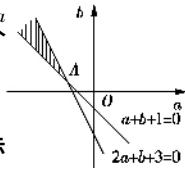
$= (x-1)[x^2 + (1+a)x + 1 + a + b]$.

依题意知方程 $g(x) = x^2 + (1+a)x + 1 + a + b = 0$ 有一个大于 0 小于 1 的根与一个大于 1 的根.

借助二次函数的图象特征知:

$\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \end{cases}$,即 $\begin{cases} a+b+1 > 0 \\ 2a+b+3 < 0 \end{cases}$

在平面直角坐标系 aOb 内, (a, b) 所表示的平面区域为图中的阴影部分.



其中 A 点坐标为 $(-2, 1)$, $k_{OA} = -\frac{1}{2}$.

求 $\frac{b}{a}$ 的范围可转化为求区域内的点与原点的连线所在直线的斜率的取值范围.

由图可知: $-2 < \frac{b}{a} < -\frac{1}{2}$.

(2) 依据椭圆的图形特征及所给的条件,椭圆的焦点不可能在 y 轴上. 故可设 C 的方程为 $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{4} = 1 (m > 2)$.

因区域内有点 $P(a, b)$ 在 C 上,即椭圆 C 与点 (a, b) 表示的区域有公共点.

故只要 A 点在椭圆 C 的内部即可.

$\therefore \frac{(-2)^2}{m^2} + \frac{1}{4} < 1$, 即 $m > \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

故椭圆的长轴长应大于 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

评析 本题由课本习题衍变而来,体现出“源于课本,高于课本”的要求,考查我们知识的运用能力. 要求熟练掌握二次方程根的范围的判定,掌握圆锥曲线、线性规划的基础知识,善于运用数形结合解题. 要求学生具有一定的化归、转化及综合运用知识的能力.

(文) (1) 解法一 由题意知 $x = (\frac{t^2 + 2\sqrt{3} - 3}{2}, \frac{\sqrt{3}t^2 - 3\sqrt{3} - 2}{2})$,

$y = (\frac{1}{2}t - \sqrt{3}k, \frac{\sqrt{3}}{2}t + k)$.

又 $x \perp y$, 故 $x \cdot y = \frac{t^2 + 2\sqrt{3} - 3}{2} \times (\frac{1}{2}t - \sqrt{3}k) + \frac{\sqrt{3}t^2 - 3\sqrt{3} - 2}{2}$

$\times (\frac{\sqrt{3}}{2}t + k) = 0$,

整理得 $t^3 - 3t - 4k = 0$, 即 $k = \frac{1}{4}t^3 - \frac{3}{4}t$.

解法二 $\therefore a = (\sqrt{3}, -1), b = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\therefore \sqrt{3} \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, $\therefore a \perp b$,

$\therefore x \perp y, \therefore x \cdot y = 0$, 即 $-k|a|^2 + t(t^2 - 3)|b|^2 = 0$, $\therefore t^3 - 3t - 4k = 0$, 即 $k = \frac{1}{4}t^3 - \frac{3}{4}t$.

(2) 由(1)知 $k = f(t) = \frac{1}{4}t^3 - \frac{3}{4}t, k' = f'(t) = \frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{4}$,

令 $k' < 0$ 得 $-1 < t < 1$, 令 $k' > 0$ 得 $t < -1$ 或 $t > 1$, 故 $k = f(t)$ 的单调递减区间是 $(-1, 1)$, 单调递增区间是 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$.

评析 本题充分利用向量垂直的充要条件,将向量的几何“位置关系”转化为代数中的“数量关系”,从而,建立 k 与 t 的函数关系式.

22. (理) (1) $\therefore 4x^2 - 9y^2 = 36, \therefore 9y^2 = 4x^2 - 36$. 又 $y \neq 0, \therefore 9y^2 > 0, \therefore 4x^2 - 36 > 0$. 解不等式得 $x > 3$ 或 $x < -3$.

又由 $9y^2 = 4x^2 - 36$ 解得 $y = \pm \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$.

由于 $x \cdot y < 0$, 故当 $x > 3$ 时, $y < 0$; 当 $x < -3$ 时, $y > 0$.

所以函数 $y = f(x)$ 的解析式为 $y = \begin{cases} -\frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9} (x > 3) \\ \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9} (x < -3) \end{cases}$, 定义域为 $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

(2) 原函数的定义域为 $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. 当 $x > 3$ 时, $y < 0$, 这时由 $y = -\frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$ 解得 $x = \frac{3}{2}\sqrt{y^2 + 4}$; 当 $x < -3$ 时, $y > 0$, 这时由 $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$ 解得 $x = -\frac{3}{2}\sqrt{y^2 + 4}$,

故所求的反函数为 $y = f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + 4} (x < 0) \\ -\frac{3}{2}\sqrt{x^2 + 4} (x > 0) \end{cases}$.

两边平方整理得到反函数 $y = f^{-1}(x)$ 中的实数 x, y 同时满足: $4y^2 - 9x^2 = 36$ 且 $x \cdot y < 0$.

(3) 设 (x_0, y_0) 为反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象上任意一点, 当 $x_0 < 0$ 时, 有 $k = [f^{-1}(x)]'|_{x=x_0} = \frac{3x_0}{2\sqrt{x_0^2 + 4}}$,

$\therefore x_0 < 0, \therefore \frac{3x_0}{2\sqrt{x_0^2 + 4}} < 0$,

另一方面, $-\frac{3x_0}{2\sqrt{x_0^2 + 4}} > \frac{3x_0}{2|x_0|} = -\frac{3}{2}$, 故得: $-\frac{3}{2} < k < 0$.

当 $x_0 > 0$ 时, $k = [f^{-1}(x)]'|_{x=x_0} = -\frac{3x_0}{2\sqrt{x_0^2 + 4}}$,

$\therefore x_0 > 0, \therefore -\frac{3x_0}{2\sqrt{x_0^2 + 4}} < 0$.

另一方面, $-\frac{3x_0}{2\sqrt{x_0^2 + 4}} > \frac{-3x_0}{2|x_0|} = -\frac{3}{2}$, 故得: $-\frac{3}{2} < k < 0$.

综合以上讨论知斜率 k 的取值范围是 $(-\frac{3}{2}, 0)$.

评析 本题是通过研究函数图象与方程的曲线之间的区别和联系而编制的. 由于函数是单值对应, 而满足双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实数 x, y 所确定的对应不是单值对应, 因此对满足双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的实数 x, y 要增加约束条件(如 $x \cdot y < 0$), 满足双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 和 $xy < 0$ 的实数 x, y 确定的对应就是函数. 本题作出方程的曲线问题就十分简明, 第三小问观察双曲线和它的渐近线就能得出结果.

(文) 同理科 21 题.