



即使通向成功的道路上没有灯光,我们也要摸索着辨认那紧闭的命运之门,然后举起手来咚咚咚地把它敲响。

2006 年北京—黄冈高考最后冲刺预测试卷

数 学 (第四模拟)

【命题报告】 本套试卷在命题时详细地研究了近年的高考试题,对过去几年高考中对各章知识点的考查进行了详细统计,在此基础上确定了命题范围与题目的分布情况.因此本试卷注重了对基础知识的考查,既全面又突出重点,试卷在创新方面较为突出,整卷基本上按照由易到难的顺序编排,每种题型也按照由易到难的顺序进行编排,充分发挥了各种题型的考查功能.

试卷模式与 2005 年全国卷完全相符,在试题的具体设计上,也有诸多创新之处,展示了命题人对高考命题的一些最新研究成果,如第 6 题(文)是信息迁移题,着重考查学生阅读理解能力和分析问题、解决问题的能力.第 1 题、第 3 题、第 5 题、第 10 题、第 16 题、第 17 题、第 21 题、第 22 题等是交汇综合题,着重考查学生综合运用数学知识的能力.第 2 题(文)、第 8 题、第 12 题、第 18 题用现实生活中身边的事例命题,富有时代和生活气息.第 16 题、第 20 题、第 21 题、第 22 题是探索开放题,立意新颖,构思精巧,极富思考性和挑战性.本试卷对新教材新增内容平面向量、导数、概率与统计、线性规划等内容考查的力度相当大,如第 2 题(文)、第 7 题、第 17 题、第 18 题、第 19 题、第 21 题等.对常用的数学思想方法,如函数和方程、数形结合、分类讨论、转化与化归等考查的也相当充分,同时兼顾了对学生数学思维品质和个性品质的考查.总之这套试卷较好地代表了高考命题的趋势及方向.

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分.满分 150 分.考试时间 120 分钟.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题 本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集 $U = \mathbf{R}$, $M = \{x \mid |x^2 - 3| \leq 1\}$, $N = \{y \mid y = 2^x + \sqrt{x-1}\}$, 那么 $M \cap (\mathbf{C}_U N)$ 等于
A. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ B. $[-2, 2]$
C. $[-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]$ D. $[-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]$
2. (理) 设复数 z 满足 $(2+i)z = 1+2i$, 则复数 z 对应的点位于复平面内的
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
(文) 某地招生办为了解 2005 年高考文科数学主观题的阅卷质量, 将 3 050 份试卷中封面保密号的尾数是 11 的全部抽出来, 再次复查, 这种抽样方法采用的是
A. 抽签法 B. 简单随机抽样 C. 系统抽样 D. 分层抽样
3. 已知 $x_1 > x_2 > x_3 > 0$, 则 $a = \frac{\log_2(2x_1+2)}{x_1}$, $b = \frac{\log_2(2x_2+2)}{x_2}$, $c = \frac{\log_2(2x_3+2)}{x_3}$ 的大小关系为
A. $a < b < c$ B. $a > b > c$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$
4. 已知数列 $\{u_n\}$ 满足 $u_{n+1} = a_1 - a_{n-1} (n \geq 2)$, $a_1 = a$, $a_2 = b$, 设 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则下列结论正确的是
A. $a_{100} = a - b$, $S_{100} = 50a$ B. $a_{100} = a - b$, $S_{100} = 50(a - b)$
C. $a_{100} = -b$, $S_{100} = 50a$ D. $a_{100} = -a$, $S_{100} = b - a$
5. 球面上有三个点, 其中任意两点的球面距离都等于大圆周长的 $\frac{1}{6}$, 经过这三个点的小圆的周长为 4π , 那么这个球的表面积是
A. 192π B. 48π C. 16π D. 64π
6. (理) 设 $f(x)$ 是一元三次函数, 且 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 6$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = -\frac{3}{2}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3}$ 的值是

A. $\frac{4}{3}$

B. 2

C. $\frac{8}{3}$

D. 4

(文) 定义运算 $x * y = \begin{cases} x (x \leq y) \\ y (x > y) \end{cases}$, 若 $|m-1| * m = |m-1|$, 则 m 的取值范围是

A. $m \geq \frac{1}{2}$

B. $m \geq 1$

C. $m < \frac{1}{2}$

D. $m > 0$

7. 已知三点 $A(x_0, y_0)$, $B(1, 1)$, $C(5, 2)$, 如果一个线性规划问题的可行域是 $\triangle ABC$ 的边界及其内部, 线性目标函数 $z = ax + by$ 在点 B 处取得最小值 3, 在点 C 处取得最大值 12, 则下列关系式成立的是

A. $3 \leq x_0 + 2y_0 \leq 12$

B. $x_0 + 2y_0 \leq 3$ 或 $x_0 + 2y_0 \geq 12$

C. $3 \leq 2x_0 + y_0 \leq 12$

D. $2x_0 + y_0 \leq 3$ 或 $2x_0 + y_0 \geq 12$

8. 两个三口之家, 共 4 个大人, 2 个小孩, 约定星期日乘“富康”、“桑塔纳”两车结伴郊游, 每辆车最多只能坐 4 人, 其中两个小孩不能独坐一辆车, 则不同的乘车方法种数是

A. 40

B. 48

C. 60

D. 68

9. 设 a, b 是方程 $x^2 + x \cot \theta - \cos \theta = 0$ 的两个不相等的实数根, 那么过点 $A(a, a^2)$ 和 $B(b, b^2)$ 的直线与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的位置关系是

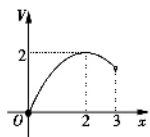
A. 相离

B. 相切

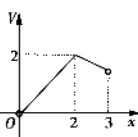
C. 相交

D. 随 θ 值变化而变化

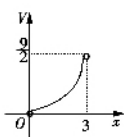
10. 三棱锥 $P-ABC$ 的高 $PO = 8$, $AC = BC = 3$, $\angle ACB = 30^\circ$, M, N 分别在 BC 和 PO 上, 且 $CM = x$, $PN = 2CM$, 下面的四个图象中能表示三棱锥 $N-AMC$ 的体积 V 与 x ($x \in (0, 3)$) 的关系的是



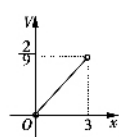
A



B



C



D

11. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的一条通径 (过焦点且垂直于对称轴的弦) 与抛物线 $C_2: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的通径重合, 则椭圆的离心率为

A. $\sqrt{2} - 1$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{3} - 1$

D. $\frac{1}{2}$

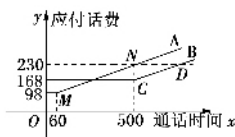
12. 电信局为了配合客户的不同需要, 设有 A、B 两种优惠方案, 这两种方案应付电话费 (元) 与通话时间 (分钟) 之间的关系如图所示 (实线部分) (图中 $MN \parallel CD$), 则通话时间为 2 小时, 客户应选择最佳的方案是

A. 方案 A

B. 方案 B

C. 方案 A 和方案 B 一样

D. 不一定

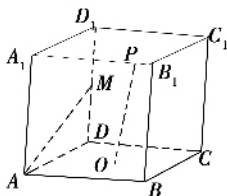


第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13. 设 $(3x^{\frac{1}{3}} + 1)^n$ 展开式中的各项的系数之和为 A , 各项的二项式系数之和为 B , 若 $A + B = 272$, 则展开式中的 x 项的系数是_____.

14. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 是 DD_1 的中点, O 是底面正方形 $ABCD$ 的中心, P 为棱 A_1B_1 上任意一点, 则直线 OP 与直线 AM 所成的角的大小等于_____.



15. 已知 $p: |1 - \frac{x-1}{3}| \leq 2$; $q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0$ ($m > 0$), $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件, 则实数 m 的取值范围为_____.

16. 若函数 $y = f(x)$ 同时满足条件:

① 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内是增函数; ② $f(x) = f(-x)$;

③ 是最小正周期为 π 的周期函数.

则这样的函数的解析式是_____. (注 填上你认为正确的一个解析式即可, 不必考虑所有可能情形)

三、解答题 本大题共 6 小题,共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $m = (\cos \frac{C}{2}, \sin \frac{C}{2})$, $n = (\cos \frac{C}{2}, -\sin \frac{C}{2})$, 且 m 与 n 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

(1) 求 C ;

(2) 已知 $c = \frac{7}{2}$, $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 $a + b$ (a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边).

18. (本小题满分 12 分)

(理) 把圆周分成四等份, A 是其中一个分点, 动点 P 在四个分点上按逆时针方向前进. 现在投掷一个质地均匀的正四面体, 它的四个面上分别写有 1、2、3、4 四个数字. P 从 A 点出发, 按照正四面体底面上数字前进几个分点, 转一周之前连续投掷.

(1) 求点 P 恰好返回 A 点的概率;

(2) 在点 P 转一周恰能返回 A 点的所有结果中, 用随机变量 ξ 表示点 P 能返回 A 点的投掷次数, 求 ξ 的分布列和期望.

(文) 在教室内有 10 个学生, 分别佩戴着从 1 号到 10 号的校徽, 任意选 3 人记录其校徽的号码.

(1) 求最小号码为 5 的概率;

(2) 求 3 个号码中至多有一个偶数的概率;

(3) 求 3 个号码之和不超过 9 的概率.

19. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2ax^2 - 3a^2x + b$, $0 < a < 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 若当 $x \in [a+1, a+2]$ 时, 恒有 $|f'(x)| \leq a$, 试确定 a 的取值范围;

(3) 当 $a = \frac{2}{3}$ 时, 关于 x 的方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[1, 3]$ 上恰有两个相异的实根, 求实数 b 的取值范围.

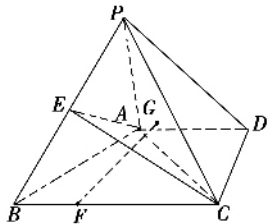
20. (本小题满分 12 分)

如图,已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是直角梯形, $\angle ADC$ 为直角, $AD \parallel BC$, $AB \perp AC$, $AB = AC = 2$, G 为 $\triangle PAC$ 的重心, E 为 PB 的中点, F 在线段 BC 上, 且 $CF = 2FB$.

(1) 求证 $FG \parallel$ 平面 PAB ;

(2) 求证 $FG \perp AC$;

(3) 求当二面角 $P-CD-A$ 多大时, $FG \perp$ 平面 AEC .

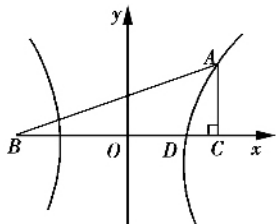


21. (本小题满分 12 分)

如图,直角坐标 xOy 系中,一直角三角形 ABC , $\angle C = 90^\circ$, B, C 在 x 轴上且关于原点 O 对称, D 在边 BC 上, $BD = 3DC$, $\triangle ABC$ 的周长为 12. 若一双曲线 E 以 B, C 为焦点, 且经过 A, D 两点.

(1) 求双曲线 E 的方程;

(2) 若一过点 $P(m, 0)$ (m 为非零常数) 的直线 l 与双曲线 E 相交于不同于双曲线顶点的两点 M, N , 且 $\vec{MP} = \lambda \vec{PN}$, 问在 x 轴上是否存在定点 G , 使 $\vec{BC} \perp (\vec{GM} - \lambda \vec{GN})$? 若存在, 求出所有这样定点 G 的坐标 若不存在, 请说明理由.



22. (本小题满分 14 分)

(理) 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = 15 - f(n)$, $f(n)$ 是函数 $y = x^2 - x + \frac{1}{2}$ ($n \leq x \leq n+1$) 的值域中整数的个数, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n = \log_a b_n$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$).

(1) 试判断是否存在自然数 M , 使得 $S_n \leq M$ 恒成立, 若存在, 求出相应的 M 的最小值; 若不存在, 请说明理由;

(2) 是否存在自然数 N , 使得当 $n > N$ 时, $\log_{b_n} b_{n+1} > \log_{b_{n+1}} b_{n+2}$ 恒成立, 若存在, 求出相应的 N 的最小值; 若不存在, 请说明理由;

(3) 若 $T_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$ ($n \geq 2$), 试比较 T_n 与 $-\frac{2}{13}$ 的大小, 并说明理由.

(文) 已知函数 $f(x) = \log_3(ax + b)$ 图象过点 $A(2, 1)$ 和 $B(5, 2)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 记 $a_n = 3^{f(n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, 是否存在正数 k , 使得 $(1 + \frac{1}{a_1})(1 + \frac{1}{a_2}) \cdots (1 + \frac{1}{a_n}) \geq k \sqrt{2n+1}$ 对一切 $n \in \mathbb{N}^*$ 均成立, 若存在, 求出 k 的最大值; 若不存在, 请说明理由.