

数 学(第三模拟)

第 I 卷(选择题 共 60 分)

(文)若方程 $2a \cdot 9^{\sin x} + 4a \cdot 3^{\sin x} + a - 8 = 0$ 有实数解,则实数 a 的取值范围为

A. $(-\infty, -8] \cup [0, +\infty)$

B. $[0, +\infty)$

C. $(0, \frac{8}{31}]$

D. $[\frac{8}{31}, \frac{72}{23}]$

7. 若方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有不小于 2 的实根,则 $a^2 + b^2$ 的最小值为

A. 3

B. $\frac{16}{5}$

C. $\frac{17}{5}$

B. $\frac{18}{5}$

8. 方程 $\frac{x^2}{\sin \sqrt{2} - \sin \sqrt{3}} + \frac{y^2}{\cos \sqrt{2} - \cos \sqrt{3}} = 1$ 表示的曲线是

A. 焦点在 x 轴上的椭圆

B. 焦点在 x 轴上的双曲线

C. 焦点在 y 轴上的椭圆

D. 焦点在 y 轴上的双曲线

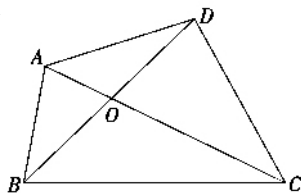
9. (理)如图,四边形 $ABCD$ 被其两条对角线分成四个小三角形,若每个小三角形用 4 种不同颜色中的任一种涂染,那么出现相邻三角形均不同色的四边形的概率是

A. $\frac{5}{16}$

B. $\frac{9}{32}$

C. $\frac{19}{64}$

D. $\frac{21}{64}$



(文)两条直角边长为整数,而且面积数和周长数相等的直角三角形有

A. 无数个

B. 0 个

C. 2 个

D. 超过 2 个的有限个

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 和椭圆 $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, m > b > 0$) 的离心率互为倒数. 那么以 a, b, m 为边的三角形是

A. 锐角三角形

B. 直角三角形

C. 钝角三角形

D. 等腰三角形

11. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在实数集 $\mathbb{R}$ 上的函数,且方程 $x - f[g(x)] = 0$ 有实数解,则 $g[f(x)]$ 不可能是

A. $x^2 + x - \frac{1}{5}$

B. $x^2 + x + \frac{1}{5}$

C. $x^2 - \frac{1}{5}$

D. $x^2 + \frac{1}{5}$

12. 等比数列 $\{u_n\}$ 的首项 $a_1 = -1$,前 n 项和为 S_n ,若 $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{31}{32}$,则 S_2 等于

A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. 2

D. -2

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题 本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13. (理)在 n 行 m 列的方格表中每个方格上都填上一个数,使得每行的 m 个数与每列的 n 个数分别都成等差数列,如果表的角上的四个数的和等于 s ,则这个表中所有数的和等于_____.

(文)已知方程 $(512x^2 + m_1x + 1)(512x^2 + m_2x + 1) \cdots (512x^2 + m_5x + 1) = 0$ 的 10 个根组成一个首项为 1 的等比数列,则 $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 =$ _____.

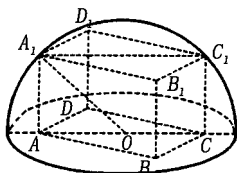
14. 如图,半球 O 的半径为 R ,它的内接长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的一个面 $ABCD$ 在半球 O 的底面上,则该长方体 AC_1 的所有棱长之和的最大值为_____.

15. 设曲线 C 的方程为 $\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = \frac{4}{5}x + 5$,则曲线所在的平面内绕着点 $P(6,0)$

旋转一周时所扫过的图形面积为_____.

16. 将关于 x 的多项式 $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{19} + x^{20}$ 表示为关于 y 的多项式

$g(y) = a_0 + a_1y + a_2y^2 + \cdots + a_{19}y^{19} + a_{20}y^{20}$,其中 $y = x - 4$,则 $a_0 + a_1 + \cdots + a_{20} =$ _____.



三、解答题 本大题共 6 小题,共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

设坐标平面上全部向量的集合为 A , 已知由 A 到 A 的映射 f 由 $f(x) = x - 2(x \cdot a)a$ 确定, 其中 $x \in A, a = (\cos \theta, \sin \theta), (\theta \in \mathbf{R})$.

(1) 若 θ 的取值发生变化时, $f[f(x)]$ 的结果是否会发生变化? 请证明你的结论;

(2) 若 $|m| = \sqrt{5}, |n| = \frac{\sqrt{5}}{2}, f[f(m+2n)]$ 与 $f[f(2m-n)]$ 垂直, 求 m 与 n 的夹角.

18. (本小题满分 12 分)

已知集合 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 4x - 14y + 45 < 0\}, B = \{(x, y) \mid y \geq |x - m| + 7\}$.

(1) 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求 m 的取值范围;

(2) 若点 Q 的坐标为 $(m, 7)$ 且 $Q \in A$, 集合 A, B 所表示的两个平面区域的边界交于点 M, N , 求 $\triangle QMN$ 的面积的最大值.

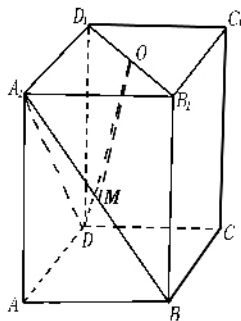
19. (本小题满分 12 分)

已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 2, AA_1 = 4, O$ 是 B_1D_1 的中点, M 是 A_1B 的中点.

(1) 求证 $OM \parallel$ 平面 BB_1C_1C ;

(2) 求 OM 与 A_1D 所成的角;

(3) 在侧面 ABB_1A_1 内是否存在点 P 使得它到直线 BC 的距离为它到直线 A_1B_1 的距离的两倍? 若存在, 满足此条件的点在什么二次曲线上?



20. (本小题满分 12 分)

P, Q, M, N 四点都在中点为坐标原点, 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 左焦点为 $F(-1, 0)$ 的椭圆上, 已知 $\overrightarrow{PF}$ 与 $\overrightarrow{FQ}$ 共线, $\overrightarrow{MF}$ 与 $\overrightarrow{FN}$ 共线, 且 $\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$, 求四边形 $PMQN$ 的面积的最大值与最小值.

21. (本小题满分 12 分)

某工厂的一位产品检验员在检验产品时, 可能把正品错误地检验为次品, 同样也会把次品错误地检验为正品. 已知他把正品检验为次品的概率是 0.2, 把次品检验为正面的概率为 0.1. 现有 4 件正品和 2 件次品.

- (1) 求该检验员将这 6 件产品全部检验正确的概率是多少;
- (2) 求该检验员将这 6 件产品检验为 2 件正品 4 件次品的概率是多少?

22. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x+1-a}{a-x} (a \in \mathbb{R})$.

(1) 证明函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(a, -1)$ 成中心对称图形;

(2) 当 $x \in [a+1, a+2]$ 时, 求证 $f(x) \in [-2, -\frac{3}{2}]$;

(3) 我们利用函数 $y=f(x)$ 构造一个数列 $\{x_n\}$, 方法如下: 对于给定的定义域中的 x_1 , 令 $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $\dots$, $x_n = f(x_{n-1})$, $\dots$, 在上述构造数列的过程中, 如果 $x_i (i=1, 2, 3, \dots)$ 在定义域中, 构造数列的过程将继续下去; 如果 x_i 不在定义域中, 构造数列的过程将停止.

- ① 如果可以用上述方法构造出一个常数列 $\{x_n\}$, 求实数 a 的取值范围;
- ② 如果取定义域内任一值作为 x_1 , 都可以用上述方法构造出一个无穷数列 $\{x_n\}$, 求实数 a 的值.