



汗水是勤劳,汗水是甘甜.知识在于积累,学习在于勤奋.当生活舒服了,学习就被生活所累了.高三是一种经历,是人生奋斗的战场.没有参加高考的人生是不完美的人生.不要只看到别人成功时的喜悦,而要看到别人耕耘时的艰辛.

2006 年北京—黄冈高考最后冲刺预测试卷

数 学 (第一模拟)

【命题报告】 本套试题的命制,吸收了全国各地 2004 年和 2005 年高考数学试题的有关信息,依据全国卷的模式排布了知识、能力的基本要求.注重了知识的挖掘,题型创新,数学潜能和数学视野的渗透,应当说,我们既考虑模拟训练的有效性,又考虑了高考预测的准确性.其中,不乏设计新颖、构思巧妙的好试题,下面展示几个精彩的样例.

1. 依据课本知识与问题改编的试题,如第 1 题是由数列的前 n 项和与通项之间的关系改编的基础题.第 3 题当中隐藏了三角函数中的半角公式.第 5 题当中直接呈现了椭圆与抛物线定义的数学表达式.
2. 有些数学竞赛味道的改编试题,如第 15 题中隐含了数学里的同余概念.文科第 22 题设计了函数解析式的迭代方法,这在一些数学竞赛里是比较常见的.
3. 为了突出试题的选拔功能,激发以后学习的潜能,设计了一些具有高等数学背景的能力型的好题.如理科第 22 题当中出现的定理,它是高等数学的微积分里的一个基本定理.

本试卷分为第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分.满分 150 分.考试时间 120 分钟.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

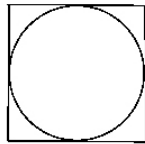
一、选择题 本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且 $\frac{1}{5}S_n = a_n - 1$,则 a_2 等于

A. $-\frac{5}{4}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{5}{16}$ D. $\frac{25}{16}$

2. 如图是一个边长为 4 的正方形及其内切圆,若随机向正方形内丢一粒豆子,则豆子落入圆内的概率是

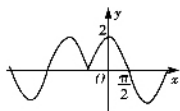
A. $\frac{\pi}{8}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. π



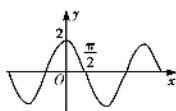
3. 已知 $\tan \alpha - \frac{1}{\cos \alpha} = -\sqrt{3}$,则 $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + 1} =$

A. $\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $-\sqrt{2}$

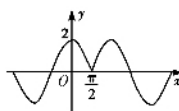
4. 函数 $f(x) = 2\sin|x - \frac{\pi}{2}|$ 的部分图象是



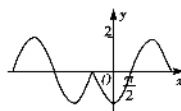
A



B



C



D

5. (理) 已知 $\vec{AP} = (x + \sqrt{5}, y)$, $\vec{BP} = (x - \sqrt{5}, y)$, 且 $|\vec{AP}| + |\vec{BP}| = 6$, 则 $|2x - 3y - 12|$ 的最大值为

- A. $12 + 6\sqrt{2}$ B. $12 - 6\sqrt{2}$ C. 6 D. 12

(文) 已知实数 x, y 满足条件 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}}$, 则点 $P(x, y)$ 的运动轨迹是

- A. 抛物线 B. 双曲线 C. 椭圆 D. 圆

6. 已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in [2, 4]$, 则函数

- A. 最大值为 3, 最小值为 $\frac{5}{3}$ B. 最大值为 3, 没有最小值
C. 没有最大值, 最小值为 $\frac{5}{3}$ D. 最大值为 4, 最小值为 2

7. 在直二面角 $\alpha - l - \beta$ 中, 直线 $a \subset \alpha$, 直线 $b \subset \beta$, a, b 与 l 斜交, 则

- A. a 不和 b 垂直, 但可能 $a \parallel b$ B. a 可能和 b 垂直, 也可能 $a \parallel b$
C. a 不和 b 垂直, a 也不和 b 平行 D. a 不和 b 平行, 但可能 $a \perp b$

8. 设 a 是实数, $M = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq 1\}$, $N = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leq a^2\}$, 若 M 不是 N 的真子集, 则 a 的取值范围是

- A. $-1 \leq a \leq 1$ B. $a \leq -2$ 或 $a > 1$
C. $-2 < a \leq 1$ D. $-2 \leq a \leq 0$

9. 已知 $f(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}$, 它的反函数为 $f^{-1}(x)$, 如果 $f^{-1}(x+a)$ 与 $f(x+a)$ 互为反函数, 且 $f(a) = a$ (a 为非零常数), 则 $f(2a)$ 的值为

- A. $-a$ B. 0 C. a D. $2a$

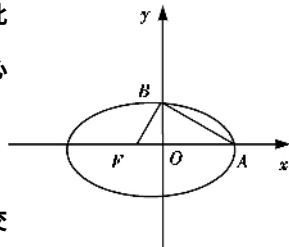
10. 已知正实数 x_1, x_2 及函数 $f(x)$, 满足 $4^x = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$, 且 $f(x_1) + f(x_2) = 1$, 则 $f(x_1 + x_2)$ 的最小值为

- A. 4 B. 2 C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{1}{4}$

11. 如图, 椭圆中心在坐标原点, F 为左焦点, 当 $\vec{FB} \perp \vec{AB}$ 时, 其离心率为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 此

类椭圆被称为“黄金椭圆”. 类比“黄金椭圆”, 可推算出“黄金双曲线”的离心率 e 等于

- A. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $\sqrt{5}-1$ D. $\sqrt{5}+1$



12. 一个人以 6 米 / 秒的速度去追停在交通灯前的汽车, 当他离汽车 25 米时, 交通灯由红变绿, 汽车以 1 米 / 秒² 的加速度匀加速开走, 那么

- A. 人可在 7 秒内追上汽车 B. 人可在 10 秒内追上汽车
C. 人追不上汽车, 其间距离最近为 5 米 D. 人追不上汽车, 其间距离最近为 7 米

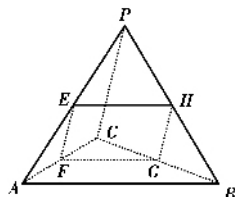
第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 将答案填在题中的横线上.

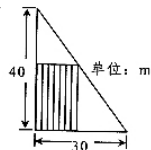
13. 已知圆 $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ 与抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的准线相切, 则 $p =$ _____.

14. 正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为 1, E, F, G, H 分别是 PA, AC, BC, PB 的中点, 四边形 $EFGH$ 的面积为 S , 则 S 的取值范围是 _____.

15. 从集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ 中任取三个数, 使其和能被 3 整除, 则共有取法的种数为 _____ (用数字作答).



16. 有一块直角三角形的土地,现在这块土地上划出一块矩形地基建造游泳池(如图中阴影部分所示),请问 这块地基能达到的最大面积是_____.



三、解答题 本大题共 6 小题,共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = \tan^2 x + |\tan x - 2| + 1$.

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的最小值.

18. (本小题满分 12 分)

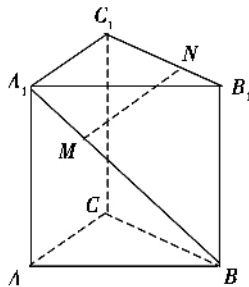
一项‘过关游戏’规则规定 在第 n 关要抛掷一颗骰子 n 次,如果这 n 次抛掷所出现的点数之和大于 n^2 就算过关. 问:

- (1) 某人在这项游戏中最多能连过几关?
- (2) 他连过前 3 关的概率是多少?

19. (本小题满分 12 分)

直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 1$, M, N 分别是棱 A_1B, B_1C_1 上的点,且 $BM = 2A_1M, C_1N = 2B_1N, MN \perp A_1B$.

- (1) 求直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中的高 a 及 MN 的长;
- (2) 动点 P 在 B_1C_1 上移动,问 P 在何位置时, $\triangle PA_1B$ 的面积才能取得最小值.



20. (本小题满分 12 分)

在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 前 n 项和为 S_n , 若 S_m, S_{m+2}, S_{m+1} 成等差数列, 则 a_m, a_{m+2}, a_{m+1} 成等差数列.

(1) 写出这个命题的逆命题;

(2) 判断逆命题的真假, 并给出证明.

21. (本小题满分 12 分)

过抛物线 $y = ax^2 (a > 0)$ 外一点 $P(x_0, y_0)$, 向抛物线作两条切线, 切点分别为 A, B .

(1) 求直线 AB 的方程;

(2) 设抛物线的焦点为 F . 求证: $|PF|^2 = |AF| \cdot |BF|$.

22. (本小题满分 14 分)

(理) 已知函数 $f(x) = x - \ln(x + m)$ 在定义域内连续.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 当 m 为何值时, 不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立?

(3) 给出定理: 若函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 并具有单调性, 且满足 $g(a)$ 与 $g(b)$ 异号, 则方程 $g(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 内有惟一实根. 试用上述定理证明: 当 $m \in \mathbb{N}$ 且 $m > 1$ 时, 方程 $f(x) = 0$ 在 $[1 - m, e^m - m]$ 内有惟一实根.

(文) 设 n 为正整数, 规定:

$$f_n(x) = \underbrace{f[\cdots f(x) \cdots]}_{n \text{ 次 } f}, \text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & (0 \leq x \leq 1) \\ x-1, & (1 < x \leq 2) \end{cases}.$$

(1) 设集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 对任意 $x \in A$, 证明 $f_3(x) = x$;

(2) 探求 $f_{2006}(\frac{8}{9})$ 的值.