

数 学 (第八模拟)

【命题报告】 本试卷严格按照 2006 年《考试大纲》要求编写,并根据最新的权威信息,对高中数学的各个知识点做了认真筛选,对函数、三角、数列、不等式、圆锥曲线、立体几何、概率、导数等重点内容做了认真研究,对命题趋势进行了预测. 本试卷重点知识突出,覆盖面广,背景新颖,知识交汇点过渡自然、流畅. 如第 1 题(文)是理解四种命题及其相互关系的问题;第 2 题考查了反函数这个重要概念;第 3 题强调了向量的运算;第 4 题注意了函数、二项式定理、等比数列、极限等知识的联系;第 12 题考查学生的空间想象能力和规律意识的形成;第 16 题以实际问题为背景考查了阅读理解能力和利用方程、不等式知识来分析问题、解决问题的能力;第 19 题以数列为载体,突出了常规方法的应用;第 21 题是向量与椭圆问题以及相关知识的综合性问题. 本试卷还突出了对新增知识的考查,且题目新颖、别致,如第 20 题的概率问题,来源于生活,考查了重点知识,还有 22 题导数的应用,对导数的考查更加深入. 本套试题体现了高考的最新研究成果,是一份含金量较高,代表 2006 年高考数学命题趋势的好试卷.

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 满分 150 分. 考试时间 120 分钟.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题 本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. (理) 复数 $z_1 = 1 + bi$, $z_2 = -2 + i$, 且 $\frac{z_1}{z_2}$ 的实部和虚部互为相反数, 则实数 b 等于

- A. 7 B. $\frac{1}{7}$ C. $-\frac{1}{7}$ D. -7

(文) 与命题“若 $a \in M$, 则 $b \notin M$ ”等价的命题是

- A. 若 $a \notin M$, 则 $b \notin M$ B. 若 $b \notin M$, 则 $a \in M$
C. 若 $a \notin M$, 则 $b \in M$ D. 若 $b \in M$, 则 $a \notin M$

2. 已知 $g(x) = 1 - 2x$, $f[g(x)] = \frac{1-x}{x}$, 则 $f^{-1}(2006)$ 等于

- A. $\frac{1}{2006}$ B. $-\frac{2005}{2}$ C. $\frac{2005}{2007}$ D. $\frac{2005}{2006}$

3. 设 a, b 为不共线的非零向量, $\overrightarrow{AB} = 2a + 3b$, $\overrightarrow{BC} = -8a - 2b$, $\overrightarrow{CD} = -6a - 4b$, 那么

- A. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 同向, 且 $|\overrightarrow{AD}| > |\overrightarrow{BC}|$ B. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 同向, 且 $|\overrightarrow{AD}| < |\overrightarrow{BC}|$
C. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 反向, 且 $|\overrightarrow{AD}| > |\overrightarrow{BC}|$ D. $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$

4. 设 $f(x-1) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$ ($x \neq 0, 1$), 且 $f(x)$ 中所有项的系数和为 A_n , 则

(理) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{2^n}$ 的值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2

(文) A_n 等于

- A. n B. 2^n C. $2^{n+1} - 2$ D. $n - 1$

5. 已知集合 M 和集合 N 中含有的元素个数相等, 且 $M \cup N = \{a, b, c, d\}$, 则 M 的不同构成方式有

- A. 3 种 B. 6 种 C. 10 种 D. 11 种

6. 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的渐近线上一点 A 到双曲线的右焦点 F 的距离等于 2, 抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 通过点 A , 则

该抛物线的方程为

- A. $y^2 = 9x$ B. $y^2 = 4x$ C. $y^2 = \frac{4\sqrt{13}}{13}x$ D. $y^2 = \frac{2\sqrt{13}}{13}x$

7. 设函数 $f(x) = \frac{\cos 2(\frac{\pi}{4} + x)}{2\sin x} + \sqrt{3}\sin x$, 当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域是

- A. $(1, \sqrt{3})$ B. $(\frac{1}{2}, 1]$ C. $(\sqrt{3}, 2]$ D. $(1, 2]$

8. “ $m > 5$ ”是“方程 $x^2 - mx + m + 3 = 0$ 的两根都大于 1”的

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分条件又非必要条件

9. 若 $a > 1$, 且 $a^{-m} + \log_a n < a^{-n} + \log_a m$, 则 m, n 的关系是

- A. $m > n > 0$ B. $m = n > 0$ C. $n > m > 0$ D. 不确定

10. 由约束条件 $\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq x \\ y \leq 2 - x \\ t \leq x \leq t + 1 \end{cases}$, 所确定的区域面积为 S , 记 $S = f(t)$ ($0 \leq t \leq 1$), 则 $f(t) =$

- A. $-t^2 + t + \frac{1}{2}$ B. $-2t^2 + 2t$
C. $1 - \frac{1}{2}t^2$ D. $\frac{1}{2}(t - 2)^2$

11. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $A > B$, 则有下列不等式

- ① $\sin A > \sin B$ ② $\cos A < \cos B$ ③ $\sin 2A > \sin 2B$ ④ $\cos 2A < \cos 2B$

其中正确的有

- A. ①③ B. ②③ C. ①②③ D. ①②④

12. 一个体积为 8 的正方体的各个顶点都在球面上, 则球的体积是

- A. $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$ B. $4\sqrt{3}\pi$ C. $\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$ D. $4(\sqrt{3} + 1)\pi$

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题 本大题共 4 个小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

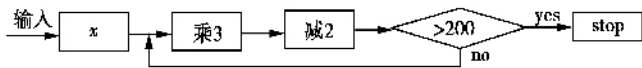
13. 向量 $a = (2\cos x, 1)$, $b = (\cos x, \sqrt{3}\sin 2x)$, $x \in \mathbf{R}$. 若函数 $y = 2\sin 2x$ 的图象按向量 $c = (m, n)$ ($|m| < \frac{\pi}{2}$) 平移后得到函数 $y = f(x) = a \cdot b$ 的图象, 则实数 $m =$ _____, $n =$ _____.

14. (理) 设事件 A 发生的概率为 p , 则事件 A 在一次试验中发生的次数 ε 的方差与 $\frac{1}{4}$ 的大小关系是 _____.

(文) $(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x^n})(1+x)^n$ 展开式中常数项(不含 x 的项)的和为 _____.

15. 从原点向圆 $x^2 + y^2 - 12y + 27 = 0$ 作两条切线, 则该圆夹在两条切线间的劣弧长为 _____.

16. 按下列程序框图来计算



如果 $x = 5$, 应该运算 _____ 次才停止.

三、解答题 本大题共 6 小题,共 74 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知 $A(3,0), B(0,3), C(\cos \alpha, \sin \alpha)$.

(1) 若 $\alpha \in (-\pi, 0)$, $|\vec{AC}| = |\vec{BC}|$, 求 α 的值.

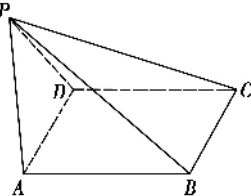
(2) 若 $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$, 求 $\frac{\sqrt{2}\sin(2\alpha - \frac{\pi}{4}) + 1}{1 + \tan \alpha}$ 的值.

18. (本小题满分 12 分)

如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$, $PB \perp AD$, 侧面 PAD 为边长等于 2 的正三角形, 底面 $ABCD$ 为菱形, 侧面 PAD 与底面 $ABCD$ 所成的二面角为 120° .

(1) 求点 P 到平面 $ABCD$ 的距离;

(2) 求面 PAB 与面 CPB 所成二面角的大小.



19. (本小题满分 12 分)

设正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = a_n + \frac{1}{a_n} (n = 1, 2, 3, \cdots)$.

(1) 求证: $\{a_n^2 + \frac{1}{a_n^2}\}$ 成等差数列;

(2) 设 $c_n = a_n^2 + \frac{1}{a_n^2}$, $b_n = \frac{c_n^2 + c_{n+1}^2}{2c_n c_{n+1}}$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

20. (本小题满分 12 分)

四个纪念币 A, B, C, D , 投掷时正面向上的概率如下表所示 ($0 < a < 1$).

纪念币	A	B	C	D
概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	a	a

这四个纪念币同时投掷一次, 设 ξ 表示出现正面向上的个数.

- (1) 求概率 $p(\xi)$.
- (2) 求在概率 $p(\xi)$ 中, $p(\xi = 2)$ 为最大时, a 的取值范围.
- (3) (只理科做) 求 ξ 的数学期望.

21. (本小题满分 12 分)

已知平面上点 A, C, D, O 的坐标分别为 $(-2, 0), (-1, 0), (-1, \frac{3}{2}), (0, 0)$, 直线 l 的方程为 $x = -4$, P 为该平面上一点, 作 $PQ \perp l$, 垂足为 Q , $(\overrightarrow{PQ} + 2\overrightarrow{PC}) \cdot (\overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{PC}) = 0$.

- (1) 求点 P 的轨迹 E 的方程.
- (2) 延长 DO 交 E 于 B , 在 E 上有两点 M, N 使 $\angle MDN$ 的平分线垂直于 AO , 问是否存在实数 λ , 使 $\overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{AB}$ 成立? 请说明理由.

22. (本小题满分 14 分)

(理) 已知 $g(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$ 对一切 x 均有 $g(x) + g(2-x) = 4$ 成立, 设 $f(x) = \log_a [g(x)]$, 若 $f(x)$ 对一切 $m \in (0, 3), n \in (0, 3)$ 且 $m \neq n$ 都有 $\frac{f(m) - f(n)}{m - n} > 0$ 成立, 求 b 的范围.

(文) 设 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的偶函数, 当 $x \in [-1, 0]$ 时, $f(x) = g(2-x)$, 且当 $x \in [2, 3]$ 时, $g(x) = 2a(x-2) - 4(x-2)^3$.

- (1) 求 $f(x)$ 的表达式;
- (2) 是否存在正实数 $a (a > 6)$, 使函数 $f(x)$ 的图象的最高点在直线 $y = 12$ 上, 若存在, 求出正实数 a 的值 若不存在, 请说明理由.