

数 学 (第七模拟)

【命题报告】 本试卷严格依据最新高考《考试大纲》编写而成,融合了高中新课改理念以及全国各地各方面的最新权威高考信息,同时,试题也透漏了命题者对于 2006 年高考中可能出现的重点知识命题方向所进行的一些大胆预测. 整套试卷的模式与去年的全国高考卷完全相符,难度界于 2003 年与 2005 年全国卷之间. 整套试题在突出重点知识常考常新的前提之下,注重在知识网络的交汇点处命题,许多试题都同时考查了多个知识点,另外按照近几年高考的趋势,该套试题仍然加大了对新教材新增内容的考查力度,试题注重数学思想方法的考查,特别是函数的思想、分类讨论的思想.

本套试题在新中求活、活中显难. 具体来讲它具有如下几个显著的特点: 1. 加大了文科与理科试题间的差距,整套试卷有不少试题文理有别,这种区别既基于知识要求的差异,又基于能力要求的差异; 2. 重视高等数学知识与方法的渗透,以便于考查学生继续学习的能力,其中一些试题有着高等数学的背景,如第 17 题、第 22 题等; 3. 注重对考生数学应用能力的考查. 此卷中考查学生应用数学知识解决实际问题的题目比重较大,如第 9 题,理科第 13 题,第 18 题等; 4. 创新题型比例较大. 如第 1 题、第 4 题,第 5 题,第 7 题,第 10 题,第 13 题,第 16 题,第 17 题,第 18 题,第 20 题、第 22 题等,这些题目或者属于信息迁移型,或者具有一定的探究性、开放性、非常规性. 本套试卷在突出对学生基础知识、基本方法以及运算能力、思维能力与空间想象能力考查的基础上,加大了对分析问题、解决问题能力的测试. 特别是其中的第 13 题,第 17 题,第 20 题、第 22 题,知识综合性比较强,要求学生综合运用分类讨论、函数和方程、数形结合、等价转化等数学思想和方法去解决问题,也兼顾了对学生数学思维品质和个性品质的考查. 总之这套试卷较好地代表了高考命题的趋势及方向,值得广大高三师生研讨.

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 满分 150 分. 考试时间 120 分钟.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题 本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. (理) 设全集 $U = \mathbf{R}$, 若 $A = \{x | x = \frac{k}{3} + \frac{1}{6}, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x = \frac{k}{6} + \frac{1}{3}, k \in \mathbf{Z}\}$ 则

- A. $\complement_U B \supseteq \complement_U A$ B. $A \cap B = A$ C. $A \cup B = A$ D. $\complement_U A \subseteq B$

(文) 设全集 $U = \mathbf{Z}$, 若 $A = \{x | x = 4k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x = 2k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$ 则

- A. $\complement_U B$ B. $A \cap B = A$ C. $A \cup B = A$ D. $\complement_U A \subseteq B$

2. 命题甲: $\sin \alpha \neq \frac{1}{2}$, 命题乙: $\alpha \neq 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$, 则甲是乙的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. (理) 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\cos \alpha = a$, 则关于 x 的不等式 $\sin x \leq a$ 的解集可以用区间表示为

- A. $[2k\pi - \alpha + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \alpha + \frac{\pi}{2}], k \in \mathbf{Z}$ B. $[2k\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha, 2k\pi + \frac{3\pi}{2} + \alpha], k \in \mathbf{Z}$
C. $[2k\pi - \alpha, 2k\pi + \alpha], k \in \mathbf{Z}$ D. $[2k\pi + \alpha + \frac{\pi}{2}, 2k\pi - \alpha + \frac{5\pi}{2}], k \in \mathbf{Z}$

(文) 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\sin \alpha = a$, 则关于 x 的方程 $\cos x = a$ 的解集为

- A. $\{x | x = 2kx + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}$ B. $\{x | x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha, k \in \mathbf{Z}\}$
C. $\{x | x = k\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha, k \in \mathbf{Z}\}$ D. 以上答案均不对

4. 若函数 $f(x) = \frac{x+1}{2x-a}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 则 $f(1) =$

- A. 2 B. 4 C. 5 D. 不确定

5. (理) 若 a 和 b 都为单位向量, 而且它们的夹角 $\alpha = \arctan 2\sqrt{2}$, 那么 $|a+2b|$ 等于

- A. $\frac{\sqrt{57}}{3}$ B. 3 C. $\sqrt{13}$ D. $2\sqrt{3}$

(文) 若 a 和 b 都为单位向量, 而且它们的夹角为 60° , 那么 $|a-2b|$ 等于

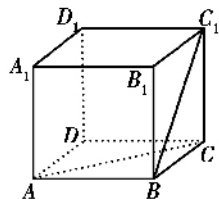
- A. $\sqrt{7}$ B. 3 C. $\sqrt{13}$ D. $2\sqrt{3}$

6. (理) 如图, $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为一正方体, 在空间过点 A_1 作直线 l , 使得 l 与直线 AC 和 BC_1 所成的角都等于 60° , 则这样的直线 l 可以作

- A. 1 条 B. 3 条 C. 2 条 D. 4 条

(文) 如图, $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为一正方体, 则直线 AC 和 BC_1 所成角的大小为

- A. 90° B. 60° C. 30° D. 45°



7. (理) $\{u_n\}$ 是首项 $a_1 = 2i$, 公比 $q = \frac{1-i}{1+i}$ 的等比数列, 则 S_{2008} 的值为

- A. 0 B. $-i$ C. 1 D. i

(文) 数列 $\{u_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 且对于任意的正整数 n 有 $4a_{n+1} + a_n = 0$. 则 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ 的值为

- A. 2^{10} B. 2^{20} C. 2^{-10} D. 2^{-20}

8. (理) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{6\cos x - 3\sqrt{3}}{12x - 4\pi}$ 的值为

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. 以上均不对

(文) 不等式 $x + \frac{3}{x+1} \geq 2$ 的解集可以用区间表示为

- A. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

9. (理) 若 $\xi \sim N(3, \sigma^2)$, 且 $P(3 < \xi < 6) = 0.3$, 则 $P(\xi < 0)$ 的值为

- A. 0.3 B. 0.2 C. 0.4 D. 以上均不对

(文) 在 200 个产品中, 一等品 40 个, 二等品 60 个, 三等品 100 个, 用分层抽样的方法抽取一个容量为 40 的样本, 则二等品中产品 A 被抽取到的概率

- A. 等于 $\frac{3}{10}$ B. 等于 $\frac{1}{5}$ C. 等于 $\frac{2}{3}$ D. 不确定

10. (理) 函数 $y = \frac{x}{x-1}$ 的图象为双曲线, 则该双曲线的焦距为

- A. $4\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. 8

(文) 函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象为双曲线, 则该双曲线的焦距为

- A. $4\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. 8

11. 若不等式 $-x^2 + 2x > a$ 对于 $x \in [-2, 3]$ 恒成立, 则 a 的取值范围为

- A. $(-\infty, -8)$ B. $(-3, +\infty)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(-8, +\infty)$

12. (理) 直线 $l: \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 相交于 A、B 两点, 在直线 l 上方而且在椭圆上的点 P 可以使得 $\triangle PAB$ 面积等于 3, 这样的点 P 共有

- A. 0 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

(文) 直线 $l: \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 相交于 A、B 两点, 在直线 l 下方而且在椭圆上的点 P, 使得 $\triangle PAB$ 面积等于 3, 这样的点 P 共有

- A. 2 个 B. 1 个 C. 4 个 D. 3 个

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题 本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13. (理) 用 4 块钢板焊接成一正四面体模型, 现记此模型能容纳得下的最大球体半径为 R_1 , 能容纳得下此模型的最小球体半径为 R_2 . 则 $\frac{R_1}{R_2}$ 等于_____.

(文) 用 6 块钢板焊接成一正方体模型, 现记此模型能容纳得下的最大球体半径为 R_1 , 能容纳得下此模型的最小球体半径为 R_2 . 则 $\frac{R_1}{R_2}$ 等于_____.

14. 已知 $\begin{cases} x - y + 2 \geq 0, \\ x + y - 4 \geq 0, \\ 2x - y - 5 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = |x + 2y - 4|$ 的最大值为_____.

15. 给四棱锥 $S-ABCD$ 的每一个顶点染上一种颜色, 并使得同一条直线(棱所在直线)上的两个端点异色, 如果有 5 种颜色可供选择, 则不同的染色方法总数为_____.

16. 与直线 l 垂直的向量叫做直线 l 的法向量. 现设直线 l 的方程为 $2y - 3x + \cos 8 = 0$, 则直线 l 的一个法向量的坐标为_____.

三、解答题 本大题共 6 小题,共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) + \sin(x - \frac{\pi}{6}) + a \cos x + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$, 且均为常数), 若 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}]$ 上单调递增, 且恰好能够取到 $f(x)$ 的最小值 2.

(1) 试求 a, b 的值;

(2) 若将函数 $y = f(x)$ 的图象按照向量 $a = (\frac{\pi}{6}, -1)$ 平移后得函数 $y = g(x)$ 的图象, 求函数 $y = g(x)$ 的最大值以及所对应的 x 的值.

18. (本小题满分 12 分)

某学校一共有编号分别为 1, 2, 3, ..., 20 的 20 个水龙头, 调查表明在课间休息的某时刻每个水龙头被打开的概率为 $\frac{1}{3}$.

(1) 若在该时刻打开的水龙头个数不超过 18 的概率为 P , 试比较 P 和 99.999 999% 的大小;

(2) (理) 设随机变量表示该时刻同时被打开的水龙头个数. 记 $P(\xi = k) = a_k$, 试求数列 $\{a_n\}$ 的最大项.

(文) 设包括编号为 10 的水龙头在内的 5 个水龙头同时被打开, 而其他水龙头未被打开的概率为 P , 求 $\frac{3^{19}}{2^{17}}P$ 的值.

19. (本小题满分 12 分)

设 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的偶函数, $g(x)$ 与 $f(x)$ 的图象关于直线 $x - 1 = 0$ 对称. 且当 $x \in [2, 3]$ 时, $g(x)$

$$= 2a \cdot (x-2) - 4(x-2)^3 \quad (a \text{ 为实数}).$$

(1) 求函数 $f(x)$ 的表达式；

(2) (理) 若 $a > 0$, 试求函数 $f(x)$ 的最大值.

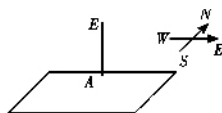
(文) 若 $0 < a < 6$, 试求函数 $f(x)$ 的最大值.

20. (本小题满分 12 分)

某人在一座塔 AE 的正东 B 处沿着南偏西 60° 的方向前进 400 米之后到达了 C 处, 发现该塔在 C 的正东北方向, 若该人在沿途测得该塔的最大仰角为 30° .

(1) 试求 B 点和塔之间的距离；

(2) 试求该塔的高度 (精确到 1 米 提示: $\sqrt{2} = 1.414, \sqrt{3} = 1.732$).



21. (本小题满分 12 分)

(理) 设函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, 若对于给定的负数 t , 有一个最大的正数 $M(t)$, 使不等式 $f(x+t) \leq x$ 在区间 $[1, M(t)]$ 上恒成立. 求当负数 t 为何值时, $M(t)$ 最大? 求出这个最大的 $M(t)$, 并证明你的结论.

(文) 设 $\{a_n\}$ 为一实数数列, 若令 $b_n = \lg a_n$, 则数列 $\{b_n\}$ 是公差为 1 的等差数列. 现记集合 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{0a^2 + 81a + 207, a + 2, 26 - 2a\}$, 若 $A = B$, 试求实数 a 的值.

22. (本小题满分 14 分)

在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左准线 l 上任取一横坐标不为 0 的点 A_1 , 经过 A_1 作 C 的切线, 设切点为 B_1 和 C_1 , 直线 B_1C_1 与 l 交于 A_2 点. 又过 A_2 作 C 的切线, 设切点为 B_2 和 C_2 , 直线 B_2C_2 交 l 于 A_3 . 如此继续, 得点列 $A_1, A_2, A_3, \dots$

(1) 设直线 B_1C_1 与 x 轴交于点 D , 求证: $A_1D \perp B_1C_1$.

(2) 若记点 A_n 的纵坐标为 y_n , 并令 $y_1 = m (m \neq 0)$. 试求数列 $\{y_n\}$ 的通项公式.