

数 学 (第五模拟)

【命题报告】 本套试卷严格依据最新《考试大纲》的各项要求编写,融入新课程改革的理念,注重双基和能力并举,强化对考生个性品质的要求,从数学知识、思想方法、学科能力出发,多层次、多角度、多视点地考查考生的数学素养和学习潜能.试题全面考查了考生的思维、运算、空间想象能力以及综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力,在知识“交汇点”处命题,如第 6、11、12、16、19、22 等题,涉及数列、函数、解析几何及分类讨论等多项知识和方法.多种解法的试题,如第 3、8、9、10、19、20 题等.开放性问题,如第 9、12、14、15 等题.重视数学应用,考查应用意识,第 3 题以化学键有机结构等跨学科问题为热点、第 9 题以矩阵运算为新课标热点、第 16 题以三视图应用为考查点,注重了新课标知识的渗透.

命题过程中也注重了高考和竞赛的交汇性的具体表现,第 16 题等实际应用性问题,涉及日常生活常见的数学模型,体现了命题的公平性原则.建构了立体几何的预测题,这类问题是高考的风向标.第 21 题参数的考查是新考纲的变化内容,属于高考新题的新热点.

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分.满分 150 分.考试时间 120 分钟.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题 本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq \sqrt{5}, x \in \mathbb{Z}\}$, 集合 $B = \{x | x = 2a, a \in A\}$, 则

- A. $A \cap B = A$ B. $A \cap B \subsetneq A$ C. $A \cup B = B$ D. $A \cap B \subsetneq B$

2. (理) 函数 $f(x) = \begin{cases} ax - 2x^2, & (x > 1) \\ 0, & (x \leq 1) \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续, 则常数 a 等于

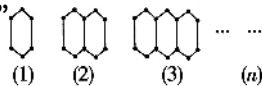
- A. 0 B. 2 C. -2 D. 1

(文) 关于 x 的方程 $2^x = \frac{a+1}{2-a}$ 只有正实数解, 则 a 的取值范围是

- A. $-1 < a < 2$ B. $\frac{1}{2} < a < 2$ C. $-2 < a < 1$ D. $a > 2$ 或 $a < \frac{1}{2}$

3. 右面是一系列有机物的结构简图, 图中的“小黑点”表示原子, 两黑点间的“短线”表示化学键, 按图中结构第 n 个图有化学键

- A. $6n$ 个 B. $4n + 2$ 个 C. $5n - 1$ 个 D. $5n + 1$ 个



4. (理) 复数 $\frac{(2+i)(1+i)^2}{1-2i}$ 的值是

- A. 2 B. -2 C. 2i D. -2i

(文) 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x + 3y - 3 \leq 0, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = \frac{y+2}{x-1}$ 的取值范围是

- A. $[-2, 1]$ B. $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$ C. $[-1, 2]$ D. $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

5. $(x - \frac{1}{x})^7$ 展开式的第四项等于 7, 则 x 等于

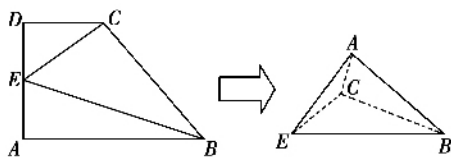
- A. -5 B. $-\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. 5

6. 设点 P 是曲线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x^3 - \sqrt{3}x + 1$ ($-1 < x < 1$) 上的任意一点, P 点处切线倾斜角为 α , 则角 α 的取值范围是

- A. $[0, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi)$ B. $[0, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{5\pi}{6}, \pi)$
C. $[\frac{2\pi}{3}, \pi)$ D. $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$

7. 如图, 一直角梯形 $ABCD$, $AB \perp AD$, $AD \perp DC$, $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$, $CD = 1$, E 为 AD 中点, 沿 CE 、 BE 把梯形折成四个面都是直角三角形的三棱锥, 使点 A 、 D 重合, 则这三棱锥的体积等于

- A. $\frac{\sqrt{3}}{12}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{12}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$



8. (理) 在 6 个电子产品中, 有两个次品, 4 个合格品, 每次任取一个测试, 测试完后不放回, 直到两个次品都找到为止, 如果两个次品找出为完成一次测试, 那么测试次数 ξ 的数学期望是

- A. $\frac{17}{15}$ B. $\frac{11}{15}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{14}{3}$

(文) 任取一个小于 2 000 的四位整数, 有且仅有两个数字相同的概率为

- A. 0.432 B. 0.216 C. 0.512 D. 0.288

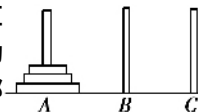
9. 对 2×2 数表定义平方运算如下:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}. \text{ 则 } \begin{pmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}^2 =$$

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & \cos 2\alpha \\ \cos 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & \sin 2\alpha \\ \cos 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & -\sin 2\alpha \\ \cos 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$

10. 图 A 、 B 、 C 是固定在桌面上的三根立柱, 其中 A 柱上有三个大小不同的圆片, 下面的直径总比上面的大. 现想将这三个圆片移动到 B 柱上, 要求是每次只能移动一片 (叫移动一次), 被移动的圆片只能放入 A 、 B 、 C 三个柱之一且大圆片不能叠在小圆片的上面, 那么完成这件事情至少要移动圆片的次数是

- A. 3 次 B. 5 次 C. 7 次 D. 9 次



11. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比 $q \neq 1$ 的等比数列, 则在① $\{a_n + a_{n+1}\}$, ② $\{a_{n+1} - a_n\}$, ③ $\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\}$, ④ $\{a_n\}$, 这四个数列中, 是等比数列的为

- A. ①②③ B. ②③④ C. ① D. ②③

12. 双曲线 $x^2 - y^2 = 2006$ 的左、右顶点分别为 A_1 、 A_2 , P 为其右支上一点, 且 $\angle A_1PA_2 = 4\angle PA_1A_2$, 则 $\angle PA_1A_2$ 等于

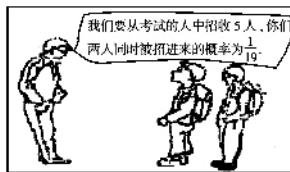
- A. $\frac{\pi}{36}$ B. $\frac{\pi}{18}$ C. $\frac{\pi}{12}$ D. 无法确定

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中的横线上.

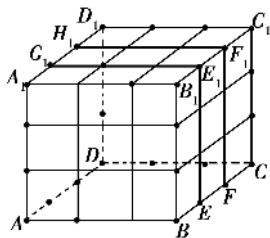
13. 若 $m = (\cos \alpha + \sin \alpha, 2006)$, $n = (\cos \alpha - \sin \alpha, 1)$, 且 $m \parallel n$, 则 $\frac{1}{\cos 2\alpha} + \tan 2\alpha =$ _____.

14. 两位同学去某大学参加自主招生考试, 右图是学校负责人与两位同学的对话, 由此可推断出此次参加考试的人数为 _____.



15. 把曲线 $C_1: \frac{|x|}{2} - \frac{|y-3|}{3} = 1$, 按向量 a 平移得到曲线 $C_2: \frac{|x+1|}{2} - \frac{|y|}{3} = 1$, 并且 $a \perp b$, 又 $c = (1, -1)$, 且 $b \cdot c = 4$, 则 $b =$ _____.

16. 如图是电视广告中出现的一个魔方,魔方由 27 个单位小立方体组成,把魔方的中间一层 $EE_1G_1 - FF_1H_1$ 转动 α 后,则魔方的表面积最大值是_____.



三、解答题 本大题共 6 小题,共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 分别是三个内角, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 若 $2\sqrt{2}(\sin^2 A - \sin^2 C) = (a - b)\sin B$, 且 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 $\sqrt{2}$.

(1) 求角 C ;

(2) 求 $\triangle ABC$ 面积 S 的最大值.

18. (本小题满分 12 分)

在盒子里有大小相同, 仅颜色不同的乒乓球共 10 个, 其中红球 5 个, 白球 3 个, 蓝球 2 个. 现从中任取出一球确定颜色后再放回盒子里, 最多取 3 次, 取出蓝球则不再取球. 求:

(1) 最多取两次就结束的概率;

(2) 取三次球正好取到 2 个白球的概率;

(3) (只理科做) 取球次数的分布列和数学期望.

19. (本小题满分 12 分)

(理) 已知 $f(x)$ 为二次函数, 且 $f(-5) = f(7)$, $f'(5) > 0$, 若对任意实数 t , $f(t^2 - 2t\sin \alpha + 2) \geq f(2 - \cos \alpha)$ 恒成立, 求 α 的取值范围.

(文) 已知 $f(x)$ 为二次函数, 且 $f(-5) = f(7)$, $f'(5) > 0$, 若对任意实数 t , $f(t^2 - 2mt + 2m^2 + 2) \geq f(-1)$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

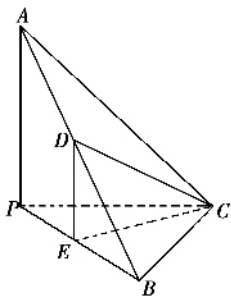
20. (本小题满分 12 分)

在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA = a, AB = AC = \sqrt{2}a, \angle PAB = \angle PAC = 45^\circ, \cos \angle BPC = \frac{2}{3}$.

(1) D 是 AB 上任意一点 (D 与 A, B 不重合), $DE \perp PB$ 于 E , 求证 $AP \parallel$ 平面 DEC ;

(2) (理) 在 (1) 中, 若 D 是 AB 的中点, 求 $\cos \langle \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BE} \rangle$ 的值.

(文) 在 (1) 中, 若 D 是 AB 的中点, 求平面 PAC 与平面 DEC 所成二面角的余弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ax + b$, 当 $x \in [a_1, b_1]$ 时, 值域为 $[a_2, b_2]$, 当 $x \in [a_2, b_2]$ 时, 值域为 $[a_3, b_3]$, $\dots$, 当 $x \in [a_{n-1}, b_{n-1}]$ 时, 值域为 $[a_n, b_n]$, $\dots$. 其中 a, b 为常数, $a_1 = 0, b_1 = 1$.

(1) 若 $a = 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 与数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a > 0, a \neq 1$, 要使数列 $\{b_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列, 求 b 的值;

(3) 若 $a > 0$, 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n , 求 $(T_1 + T_2 + \dots + T_{2006}) - (S_1 + S_2 + \dots + S_{2006})$ 的值.

22. (本小题满分 14 分)

已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率 $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 过点 $A(0, -b)$ 和 $B(a, 0)$ 的直线与原点间的距离为

$\frac{\sqrt{3}}{2}$, 直线 $y = kx + m$ ($k \neq 0, m \neq 0$) 与双曲线交于不同的两点 C, D , 且 C, D 两点同在以 A 为圆心的一个圆上.

(1) 求此双曲线方程;

(2) 求 k, m 的关系;

(3) 求 m 的取值范围.