

数 学 (第四模拟)

【命题报告】 本套试卷在命题过程中主要考虑了以下三点：一是详细地研究了《考试大纲》中对考试的性质、考试的要求、考试的内容、考试形式及试卷结构各方面的要求和近几年的高考试题。二是既尽量涵盖高中数学整体知识又突出重点，突现复习效果。三是过去几年高考中对各章知识的考查进行了详细的统计，在此基础上确定了命题的范围与知识点的分布情况，突出了对新增内容的考查和对学生的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力、综合运用数学知识的能力的考查。试题中对 2006 年高考可能出现的主干知识点和重点知识进行了命题设计与大胆预测，特别注重在知识交汇点处命题，既兼顾了基础和能力的考查，又有诸多创新之处。比如第 2 题融合集合中常见的三种题型与集合的运算，重点考查集合的元素，第 5 题则巧妙地把平行六面体“削掉一个角”，这样既考查了学生的空间想象能力，又注重了对双基的考查，这实际是根据立体几何中复习参考题的改编，第 7 题则巧妙地将“敏感数据”与数列结合在一起，重点考查等差数列的通项公式和其前 n 项和，第 10 题将二次函数与线性规划融为一体既考查了学生的运算能力又考查了学生综合运用知识的能力，第 12 题(理)则是 2005 年全国 I(理) 12 题的延伸，第 14 题与第 19 题以向量为背景进一步考查三角函数、数列等，第 17 题与第 22 题则在三角函数、数列中进一步考查导数。而第 21 题则根据高考试题改编而来。总之本套试题注重了通性通法的考查，对基本知识、基本方法进行全面覆盖，解答题设计多个小问，逐层推进，充分体现了以“能力立意”的命题原则。

本试卷分为第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。满分 150 分。考试时间 120 分钟。

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题 本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (理) 若复数 $z = (a - \sqrt{2}) + 3i$ 为纯虚数，则 $\frac{a + i^{2007}}{1 + ai}$ 的值为

- A. i B. 1 C. -1 D. $-i$

(文) 过 $(0, 2)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切的直线的斜率是

- A. ± 1 B. ± 2 C. $\pm \sqrt{3}$ D. $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

2. 设 $S_1 = \{x | x^2 - 4x - 5 > 0\}$, $S_2 = \{x | |x - a| < 4\}$, $S_3 = \{x | S_2 \subseteq S_1\} \neq \emptyset$, 则下列判断正确的是

- A. $S_2 \cap S_3 = \emptyset$ B. $(\complement_{\mathbb{R}} S_1) \cap S_2 = \emptyset$ C. $\complement_{\mathbb{R}} S_2 = \emptyset$ D. $(\complement_{\mathbb{R}} S_2) \cup S_3 = \mathbb{R}$

3. 平面 α 与球 O 相交于周长为 2π 的 $\odot O'$, A, B 为 $\odot O'$ 上两点, 若 $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$, 且 A, B 的球面距为 $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$, 则 OO' 的长度为

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. π D. 2

4. (理) 过 $(1, 2)$ 的直线与曲线 $x^2 + y^2 = 2x$ 相交时其斜率 k 的取值范围是

- A. $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0]$ B. $(-\infty, 0) \cup [\sqrt{3}, +\infty)$ C. $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$ D. $(0, \sqrt{3}]$

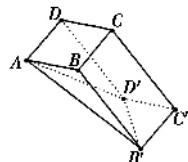
(文) 关于 x 的函数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - a$ 的极值点的个数是

- A. 2 个 B. 1 个 C. 0 个 D. 由 a 确定

5. 如图, 多面体 $ABCDD'C'B'$ 中, $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 平面 $ABCD \parallel$ 平面 $D'C'B'$, $BB' \parallel$

$CC' \parallel DD'$, 若 $CC' = 2$, $\angle CC'D' = \angle CC'B' = \frac{\pi}{3}$, 则该多面体的体积为

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$



6. (理) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 的焦点到相应准线的距离与抛物线 $y^2 = -x$ 的焦点到其准线的距离相等, 则该

双曲线的离心率是

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(文) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 的焦点到相应准线的距离为 $\frac{1}{2}$, 则该双曲线的离心率是

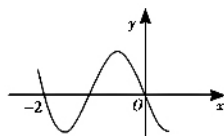
- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

7. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 是其前 n 项和, $a_1 = -2\ 008$, $\frac{S_{2\ 007}}{2\ 007} - \frac{S_{2\ 005}}{2\ 005} = 2$, 则 $S_{2\ 008} =$

- A. $-2\ 006$ B. $2\ 006$ C. $-2\ 008$ D. $2\ 008$

8. (理) 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的图象如图所示. 则

- A. $a > 0, b > 0$ B. $a < 0, b < 0$
C. $a > 0, b < 0$ D. $a < 0, b > 0$



(文) 关于 x 的函数 $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ ($2 \leq x \leq 3$) 的反函数是

- A. $y = 2 + \sqrt{1 - x^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$) B. $y = 2 + \sqrt{1 - x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$)
C. $y = 2 - \sqrt{1 - x^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$) D. $y = 2 - \sqrt{1 - x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$)

9. 设 $0 < a < 1$, 函数 $f(x) = \log_a x + \log_{\frac{1}{a}}(2 - x)$, 则函数 $f^{-1}(x) < 1$ 的 x 的取值范围是

- A. $(0, 2)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(\log_a(2 - a), +\infty)$

10. 若关于 x 的二次函数 $y = ax^2 + bx + a$ ($a \neq 0$) 的图象与 x 轴有交点, 则 $\begin{cases} |a| \leq 1 \\ |b| \leq 2 \end{cases}$ 所表示的区域 (包括边界) 的

整点 (即横、纵坐标都是整数) 的个数为

- A. 15 个 B. 8 个 C. 9 个 D. 5 个

11. 锐角 $\triangle ABC$ 中, 若 $A = 2B$, 则下列叙述正确的是

- ① $\sin 3B = \sin 2C$ ② $\tan \frac{3B}{2} \tan \frac{C}{2} = 1$ ③ $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{a}{b} \in (\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

- A. ①② B. ②③ C. ③④ D. ④①

12. (理) 过正方体任意两个顶点的直线共 28 条, 其中异面直线有

- A. 32 对 B. 72 对 C. 174 对 D. 189 对

(文) 若 O 是平面上的定点, A, B, C 是平面上不共线的三点, 且满足 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \lambda(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), 则 P 点的轨迹一定过 $\triangle ABC$ 的

- A. 外心 B. 内心 C. 重心 D. 垂心

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中的横线上.

13. (理) 设 $(3\sqrt[3]{x} + 1)^n$ 的展开式中各项系数之和为 A , 各项的二项式系数之和为 B , 如果 $A + B = 272$, 则展开式中 x 的系数为_____.

(文) $(x + 2)^{10}(\frac{1}{x} - 1)$ 展开式中 x^8 的系数是_____.

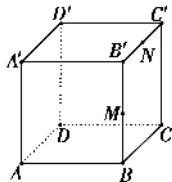
14. (理) 在直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(-1, -2)$ 、点 $B(2\cos x, 2\cos 2x)$ 、点 $C(\cos x, -1)$, 其中 $x \in [0, \pi]$. 若 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OC}$. 则 x 的值为_____.

(文) 在党中央的号召下, 某县农机站欲从 6 台打谷机和 4 台播种机中选三台去支援三个贫困山村, 要求至少包含一台播种机. 则不同的选送方案有_____种.

15. (理) 方程 $\log_3(1 - 2 \times 3^x) = 2x + 1$ 的解 $x =$ _____.

(文) 方程 $1 - 2 \cdot 3^x = 3^{2x+1}$ 的解 $x =$ _____.

16. 如图,已知 M 是正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱 BB' 的中点, N 是 $B'C'$ 上任意一点,则



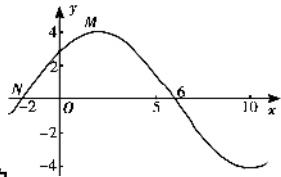
- ① $DM \perp$ 平面 ACD' ;
- ② 平面 $AB'C'D \perp$ 平面 ACD' ;
- ③ 异面直线 MN 与 DD' 的距离总等于该正方体的棱长 ;
- ④ 过 M 点的平面截该正方体所得的多边形可以是等腰梯形 ;
- ⑤ 过 N 点的平面截该正方体所得的多边形不可能是正六边形.

以上结论正确的是_____.

三、解答题 本大题共 6 小题,共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

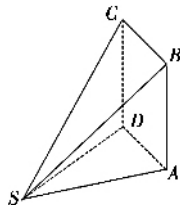
设函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示 :



- (1) 求 A, ω, φ 的值 ;
- (2) 求函数 $y = f(x)$ 的单调增区间 ;
- (3) (理) 试在 $y = f(x)$ 的图象上求一点 P , 使与 $y = f(x)$ 的图象相切于点 P 的直线的斜率等于直线 MN 的斜率.
- (文) 由函数 $y = f(x)$ 的图象如何得到 $g(x) = 2\sin x$ 的图象.

18. (本小题满分 12 分)

如图,多面体 $ABCDS$ 中面 $ABCD$ 为矩形, $SD \perp AD, SD \perp AB$, 且 $AD = a$ ($a > 0$), $AB = 2AD$, $SD = \sqrt{3}AD$.



- (1) 求证 面 $SDB \perp$ 面 $ABCD$;
- (2) 求 AD 与 SB 所成的角 ;
- (3) 求面 SBD 与面 SAB 所成的角.

19. (本小题满分 12 分)

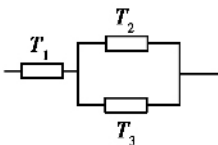
数列 $\{a_n\}$ 中 S_n 为其前 n 项和, $a_1 = 1$, 设 $a = (3S_n - 2S_{n-1} - 3, 3)$, $b = (S_{n-1}, t)$, 若 $a \parallel b$ (其中 $0 < t \leq \frac{3}{25}$, $n = 2, 3, 4, \dots$).

- (1) 求证 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列 ;
- (2) (理) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $f(t)$, 作数列 $\{b_n\}$, 使 $b_1 = 1, b_n = f(\frac{1}{3b_{n-1}})$ ($n = 2, 3, 4, \dots$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ 的值.

(文) 设数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $f(t)$, 作数列 $\{b_n\}$, 使 $b_1 = 1, b_n = f(\frac{1}{3b_{n-1}})$ ($n = 2, 3, 4, \dots$), 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

20. (本小题满分 12 分)

三个元件 T_1, T_2, T_3 正常工作的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}$, 将它们中某两个元件并联后



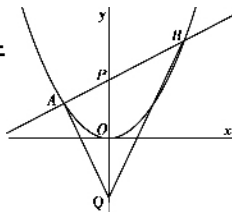
再和第三元件串联接入电路.

(1) 在如图的电路中, 电路不发生故障的概率是多少?

(2) 三个元件连成怎样的电路, 才能使电路中不发生故障的概率最大? 请画出此时电路图, 并说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

如图过抛物线 $C_1: x^2 = 4y$ 的对称轴上一点 $P(0, m)$ ($m > 0$) 作直线 l 与抛物线交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 点 Q 是 P 关于原点的对称点. 以 P, Q 为焦点的椭圆为 C_2 .



(1) 求证: $x_1 x_2$ 为定值;

(2) 若 l 的方程为 $x - 2y + 4 = 0$, 且 C_1, C_2 以及直线 l 有公共点, 求 C_2 的方程;

(3) 设 P 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比为 λ , 若 $\overrightarrow{QP} \perp (\overrightarrow{QA} - \mu \overrightarrow{QB})$, 求证: $\lambda = \mu$.

22. (本小题满分 14 分)

(理) 已知函数 $f(x) = \ln(2 - x) + ax$ 在 $(0, 1)$ 上是增函数.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = c \in (0, 1)$ 且 $a_{n+1} = \ln(2 - a_n) + a_n$, 证明: $a_n < a_{n+1}$;

(3) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = d \in (0, 1)$ 且 $b_{n+1} = 2\ln(2 - b_n) + b_n$, 试判断数列 $\{b_n\}$ 是否单调, 并证明你的结论.

(文) 已知函数 $f(x) = x^3 - ax^2$.

(1) 若 $a = 3$, 求函数 $f(x) = x^3 - ax^2$ 的极大值与极小值;

(2) 在 (1) 的条件下, 当 k 满足什么条件时, 方程 $f(x) + k = 0$ 只有两个解;

(3) 若函数 $f(x)$ 的图象的切线过点 $(0, 1)$, 且过该点的切线有两条, 求实数 a 的值.