

数 学 (第二模拟)

【命题报告】 命制本套试卷之前,笔者翻阅了很多高考真题和高考信息,并且认真分析了 2006 年考试大纲的变化情况,力争每道题都是一个全新的题型,体现了对能力考查的要求. 其中有些题是针对 2006 年考试大纲的调整而命制的新型题目,例如第 17 题主要体现对三角函数图象的应用的考查. 另外,知识交叉点的考查都在试卷中得到了充分体现. 第 7 题和第 18 题主要是对数学知识应用的考查,不等式知识也主要嵌入到一些综合知识中进行考查,体现了数学知识的应用价值,也是对考生阅读与转化能力的考查. 对新教材中出现的导数问题在试卷中也主要是以导数的应用进行命题的,这也是高考命题的一般规律. 为了体现高考对选拔人才方面的要求,命制了 21 与 22 两道稍有难度的题目,一个是数列问题,一个是解析几何问题,也可以说是高考中的压轴题,使考生能拉开距离,也是高考对考生成绩区分度方面必然的要求. 在难度上,充分考虑了文科与理科的不同要求,分别选择了不同的命题方式,在知识点的区别上进行了很严格的区分. 总而言之,本试卷紧扣 2006 年考试大纲,基本覆盖了高中教材内容,难度适中,是进行考前练兵不可多得的好试卷.

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 满分 150 分. 考试时间 120 分钟.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题 本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x \mid |x-3| < a, a > 0\}$, 集合 $B = \{x \mid x^2 - 2x - 8 \geq 0\}$, 且 $A \cup B \in \mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是

- A. $a \geq 1$ B. $a \geq 5$ C. $a > 5$ D. $1 \leq a \leq 5$

2. 已知 $\tan(243^\circ - \alpha) = \frac{1}{3}$, 那么 $\cot(-927^\circ - \alpha)$ 的值为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. 3 D. ± 3

3. 已知函数 $f(x) = \frac{x-6}{2x+m}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 那么方程 $f(x) = 8$ 的解为

- A. 8 B. -8 C. $\frac{2}{15}$ D. $-\frac{2}{15}$

4. (理) 已知 $\log_3 m + (m^2 + m - 2)i - m + 1$ ($m \in \mathbf{R}$) 表示纯虚数, 则满足条件的实数 m 的个数是

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 无数个

(文) 方程 $\log_3 x + 1 - x = 0$ 的解的个数为

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 无数个

5. 已知非零实数 a, b 满足 $a, \sqrt{a^2 + b^2}, b$ 成等比数列, 则 ab 的取值范围是

- A. $(-\infty, 2]$ B. $(-2, 2]$ C. $[2, +\infty)$ D. $(0, 2]$

6. (理) $P(x, y)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上任意一点, 且方程 $x + y + m = 0$ 有解, 则直线 $mx - y - 2006 = 0$ 的倾斜角的最大值为

- A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\arctan(-\sqrt{5})$ C. $\pi - \arctan \sqrt{5}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

(文) $P(x, y)$ 是圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上任意一点, 且方程 $x + y + \sqrt{2}m = 0$ 有解, 则直线 $mx - y - 2006 = 0$ 的倾斜角的最大值为

- A. 45° B. 135° C. 60° D. 90°

7. 某旅游团为了找到合适的车辆, 对该团的 48 人中的 6 人及所带物品进行了称量, 人的重量(单位 kg) 分别为 60, 66, 70, 72, 58, 50, 所带物品重量(单位 kg) 分别为 5, 7, 4, 8, 6, 11, 若需要两辆客车, 每辆车各载一半

的游客(包括他们的物品),试估计下列车辆的载重量最为合适的是

- A. 1 吨 B. 2 吨 C. 4 吨 D. 6 吨

8. 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点坐标分别为 $A(-5, -1)$, $B(1, -10)$, $C(1, 6)$, 且 $AD \perp BC$ 于 D , E 为线段 BC 中点, 那么 $\angle DAE$ 的余弦值为

- A. $\frac{6\sqrt{37}}{37}$ B. $\frac{3\sqrt{37}}{37}$ C. $\frac{\sqrt{37}}{37}$ D. $\frac{2\sqrt{37}}{37}$

9. 已知实数 m, n 满足不等式组 $\begin{cases} 2m+n \leq 4, \\ m-n \leq 2, \\ m+n \leq 3, \\ m \geq 0, \end{cases}$ 那么关于 x 的方程 $x^2 - (3m+2n)x + 6mn = 0$ 的两根之和的最大值

和最小值分别是

- A. 7, -4 B. 8, -8 C. 4, -7 D. 6, -6

10. 已知 F_1 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点, P 是椭圆上一点, 那么, 以 PF_1 为直径的圆与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的位置关系是

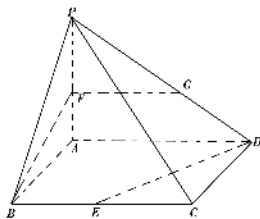
- A. 相交 B. 内含 C. 外切 D. 内切

11. 关于 $x_i (i = 1, 2, \dots, 10)$ 的方程 $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{10} = 3$ 的非负整数解的组数为

- A. 174 B. 172 C. 165 D. 156

12. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AB = 2$, E 为 BC 中点, F 为 PA 上一点, $FG \parallel AD$. 若异面直线 DE 与 BF 所成角的余弦值为 $\frac{4}{5}$, 则 PG 的长为

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$



第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13. $(2\sqrt{x} - 2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{x}})^4$ 展开式中, 常数项为 _____ (用数字作答).

14. 已知直线 l 与直线 m 在平面 α 内, 且都不在平面 β 内, 则下列 p 是 q 的充分必要条件的条件是 _____ (请把符合条件的序号填写在横线上).

- ①若 α 与 β 相交时, $p: l \not\parallel \beta$ 且 $m \parallel \beta$; $q: l \not\parallel m$. ②若 l 与 m 相交, $p: \alpha \parallel \beta$; $q: l \parallel \beta$ 且 $m \parallel \beta$.
③若 l 与 m 相交, $p: l, m$ 中至少有一条与 β 相交; $q: \alpha$ 与 β 相交 ④若 $l \parallel m$, $p: l$ 与 β 相交; $q: m$ 与 β 相交.

15. (理) 若 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{a}{2}x + b (x \leq 2) \\ \lg x + 2 (x > 2) \end{cases}$ 在 $x = 2$ 处连续, 则 $a + b =$ _____.

(文) 已知函数 $f(x) = 3x + 1 (x \in \mathbb{R})$, 当 $|x - 1| < a$ 时, 有 $|f(x) - 6| < 3$ 成立, 则正实数 a 的取值范围是 _____.

16. 已知 $\triangle ABC$ 三边 a, b, c 所对的三个顶点分别为 A, B, C , 且面积可以表示为 $S = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}(b - c)^2$, 那么角 A 的正弦值 $\sin A =$ _____.

三、解答题 本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知向量 $a = (\sin x, \cos x)$, $b = (\cos x, -\cos x)$, $f(x) = 2a \cdot b + |a|$.

(1) 写出函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 若在 $[0, \pi]$ 上, $f(x) = m$ 有两个不同的实根, 求实数 m 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

某地区根据 360 天的记录发现: 日平均气温为 -2°C 的天数有 40 天, 日平均气温为 5°C 的天数有 40 天, 日平均气温为 15°C 的有 80 天, 日平均气温为 20°C 的有 120 天, 剩余天数日平均气温为 32°C .

(1) 为了研究某种作物在不同温度下的发芽情况, 从这 360 天中抽出 18 天, 请问, 应采用哪种抽样方式, 不同日平均气温的天气分别抽取多少天?

(2) (理) 若某种作物在对应日平均气温条件下播种的发芽率如下表所示, 请问在该地区这 360 天中任选一天播种 1 000 粒种子, 则发芽种子数的期望值是多少?

日平均气温($^{\circ}\text{C}$)	-2	5	15	20	32
种子发芽率(%)	10	17	20	80	40

(文) 若某种作物在日平均气温为 5°C 到 20°C 的条件下播种发芽率为 90%, 其他条件下不发芽, 那么, 在该地区这 360 天中任选一天播种 5 粒种子, 恰好有 3 粒发芽的概率是多少?

19. (本小题满分 12 分)

(理) 设 $f(x) = a \ln(x+1) + (x+1)^2$, 且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(3) 令 $g(x) = f'(x)$, 若 $g(x)$ 上 $x=1$ 处的切线与两坐标轴分别交于 A, B 两点 (O 为坐标原点), 求 $\triangle AOB$ 的面积.

(文) 设 $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - x + a$ 有极小值 2.

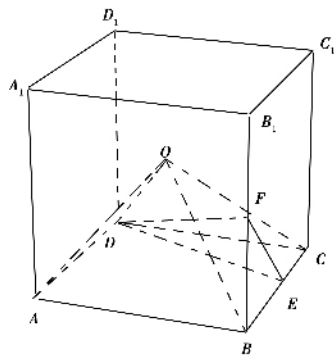
(1) 求实数 a 的值;

(2) 若点 $P(b, a)$ 在函数 $f(x)$ 的图象上, 求过点 P 的切线方程.

20. (本小题满分 12 分)

已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的八个顶点都在以点 O 为球心, 以 $\frac{3}{2}$ 为半径的球上, 且 $AB = a, BC = b, CC_1 = c$.

- (1) a, b, c 满足的关系式为 _____ (把满足条件的关系式直接填写在横线上);
- (2) (只理科做) 若 $a = b$, 且平面 AOD 与平面 BOC 所成角的正切值为 $\frac{4}{3}$, 求 a, b, c 的值;
- (3) 若 $a = 1$, 且 E, F 分别为 BC, BB_1 的中点, 求三棱锥 $C-DEF$ 体积的最大值.



21. (本小题满分 12 分)

已知 S_n 是各项均为正的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和, 且对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{S_n}$ 是 a_n 与实数 b 的等差中项, $a_1 = 1$.

- (1) 求 b 的值以及 a_2, a_3 的值;
- (2) 推导 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (3) (只理科做) 若 $b_n = \frac{8}{a_n \cdot a_{n+2}}$, 且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n . 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ 的值.

22. (本小题满分 14 分)

已知双曲线 C 中心在原点且焦点在 x 轴上, 过双曲线 C 的一个焦点且与双曲线有且只有一个交点的直线的方程为 $4x - 3y + 20 = 0$.

- (1) 求双曲线 C 的方程;
- (2) 若过双曲线左焦点 F_1 任作直线 l , 与过右焦点 F_2 的直线交于 P 点, 求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积的最大值;
- (3) 过双曲线 C 的左焦点 F_1 的直线 l 与双曲线的左支交于 A, B 两点.
(理) 试讨论 $\triangle ABF_2$ 的周长是否有最小值, 若有, 求出最小值, 否则, 说明理由.
(文) 若直线 l 的斜率为 1, 求 $\triangle ABF_2$ 的周长.

