

数 学 (第一模拟)

【命题报告】 本套试卷严格依据最新高考《考试大纲》编写,并根据全国各地各方面最新权威的高考信息,对数学学科中主干知识点进行了逐个筛选,尤其是对 2006 年高考中可能出现的重点知识进行了大胆预测与重点命题,如函数、不等式、数列、三角、向量、导数、概率、立体几何、解析几何等知识模块. 试卷模式与 2005 年全国卷完全相符,具体表现如下:①特别注重在知识的交汇点处命题,如第 2 题、第 4 题、第 6 题、第 8 题(理)、第 15 题、第 17 题、第 19 题、第 21 题、第 22 题等;②加大了对新教材新增内容的考查力度,如第 13 题,导数题第 19 题,概率题第 11 题、第 18 题等;③加强了对数学应用题的考查,如第 9 题、第 11 题(文)、第 18 题等. 各类创新题型纷纷“闪亮登场”,如信息迁移题第 1 题,探索开放题第 14 题、第 16 题(理)、第 22 题(文)等. 本套试卷在突出对学生的运算能力、逻辑推理能力、空间想象能力、综合运用数学知识的能力的考查基础上,加大了对综合运用数学知识解决问题的能力的训练,如解答题第 18 题、第 19 题、第 21 题、第 22 题,知识综合性比较强,要求学生综合运用分类讨论、函数和方程、数形结合、等价转化等数学思想和方法去解决问题,也兼顾了对学生数学思维品质和个性品质的考查. 总之这套试卷较好地代表了高考命题的趋势及方向.

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 满分 150 分. 考试时间 120 分钟.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题 本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设 A, B 是非空集合,定义 $A * B = \{x | x \in A \cup B \text{ 且 } x \notin A \cap B\}$, 已知 $A = \{x | y = \sqrt{2x - x^2}\}$, $B = \{y | y = 2^x (x > 0)\}$, 则 $A * B$ 等于
A. $[0, 1] \cup (2, +\infty)$ B. $[0, 1) \cup (2, +\infty)$ C. $[0, 1]$ D. $[0, 2]$
2. 命题 p 不等式 $\left| \frac{x}{x-1} \right| > \frac{x}{x-1}$ 的解集为 $\{x | 0 < x < 1\}$ 命题 q 在 $\triangle ABC$ 中, “ $A > B$ ”是“ $\sin A > \sin B$ ”成立的充要条件. 则
A. p 真 q 假 B. “ p 且 q ”为真 C. “ p 或 q ”为假 D. p 假 q 真
3. 已知 $-9, a_1, a_2, -1$ 四个实数成等差数列, $-9, b_1, b_2, b_3, -1$ 五个实数成等比数列, 则 $b_2(a_2 - a_1)$ 等于
A. 8 B. -8 C. ± 8 D. $\frac{10}{3}$
4. 在直线 $y = 2x + 1$ 上有一点 P , 过 P 点且垂直于向量 $m = (3, -4)$ 的直线与圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 有公共点, 则 P 点的横坐标的取值范围为
A. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ B. $(-1, 1)$
C. $[-\frac{12}{5}, -\frac{2}{5}]$ D. 以上都不对
5. (理) 设定义域、值域均为 $\mathbb{R}$ 的单调函数 $y = f(x)$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$, 且 $f(x) + f(-x) = 2$, 则 $f^{-1}(x-1) + f^{-1}(3-x)$ 的值为
A. $2x-4$ B. 2 C. -2 D. 0
(文) 已知 $f(x)$ 是定义在实数集 $\mathbb{R}$ 上的函数, 它的反函数为 $f^{-1}(x)$. 若 $f^{-1}(x+a)$ 与 $f(x+a)$ 互为反函数, 且 $f(a) = a$ (a 为非零常数), 则 $f(2a)$ 的值为
A. $-a$ B. 0 C. a D. $2a$
6. (理) 若 A, B 为锐角三角形的两个内角, 则复数 $z = (\cot B - \tan A) + (\tan B - \cot A)i$ 对应的点位于复平面的
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
(文) 定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$, 满足 $f(x+2) = f(x)$, 且 $f(x)$ 在 $[-3, -2]$ 上是减函数, 又 α, β 是锐角三角形的两个内角, 则
A. $f(\sin \alpha) > f(\sin \beta)$ B. $f(\cos \alpha) < f(\cos \beta)$ C. $f(\sin \alpha) > f(\cos \beta)$ D. $f(\sin \alpha) < f(\cos \beta)$

7. 如图,在正三棱锥 $S-ABC$ 中, M,N 分别是 SC,BC 的中点,且 $MN \perp AM$,若侧棱 $SA = 2$

$\sqrt{3}$,则正三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积是

- A. 12π B. 32π C. 36π D. 48π

8. (理) 若 $(x\sqrt{x} - \frac{1}{x})^6$ 的展开式中的第五项是 $\frac{15}{2}$, 设 $S_n = x^{-1} + x^{-2} + \dots + x^{-n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

等于

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

(文) 设 $(3x^{\frac{1}{3}} + 1)^n$ 展开式中的各项的系数之和为 A , 各项的二项式系数之和为 B , 若 $A + B = 272$, 则展开式中的 x 项的系数是

- A. 104 B. 106 C. 108 D. 110

9. 设有编号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个球和编号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个盒子, 现将这五个球投放到五个盒子内, 要求每个盒内投放一个球, 并且恰好有两个球的编号与盒子编号相同, 则这样的投放方法总数为

- A. 20 B. 30 C. 60 D. 120

10. 若已知 $\tan 110^\circ = a$, 求 $\tan 10^\circ$ 的值, 那么在以下四个答案: ① $\frac{a+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a}$; ② $\frac{a+\sqrt{3}}{\sqrt{3}a-1}$; ③ $\sqrt{a^2+1}+a$; ④ $\sqrt{a^2+1}-a$

中, 正确的是

- A. ①和② B. ③和④ C. ①和④ D. ②和③

11. (理) 已知 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, $E\xi = 3$, $D\xi = 1$, 则 $P(-1 < \xi \leq 1) =$

- A. $2\Phi(1) - 1$ B. $\Phi(4) - \Phi(2)$ C. $\Phi(-4) - \Phi(-2)$ D. $\Phi(2) - \Phi(4)$

(文) 要从 10 名女生和 5 名男生中选出 6 名学生组成课外学习小组, 如果按性别依比例分层随机抽样, 试问组成此课外学习小组的概率为

- A. $\frac{C_{10}^4 C_5^2}{C_{15}^6}$ B. $\frac{C_{10}^3 C_5^3}{C_{15}^6}$ C. $\frac{C_{15}^6}{A_{15}^6}$ D. $\frac{A_{10}^4 A_5^2}{C_{15}^6}$

12. 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的左准线为 l , 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 抛物线 C_2 的准线为 l , 焦点是 F_2 , 若 C_1

与 C_2 的一个交点为 P , 则 $|PF_2|$ 的值等于

- A. 40 B. 32 C. 8 D. 4

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13. (理) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 设 $\vec{AB} = a, \vec{AC} = b$, AP 的中点为 Q , BQ 的中点为 R , CR 的中点恰为 P , 则用 a, b 表示 $\vec{AP} =$ _____.

(文) 设 O, A, B, C 为平面上四个点, $\vec{OA} = a, \vec{OB} = b, \vec{OC} = c$, 且 $a + b + c = 0, a, b, c$ 两两数量积都为 -1 , 则 $|a| + |b| + |c|$ 等于 _____.

14. 设 x, y, z 是空间不同的直线或不同平面, 且直线不在平面内, 下列条件中能保证“若 $x \perp z$ 且 $y \perp z$, 则 $x \parallel y$ ”为真命题的是 _____.

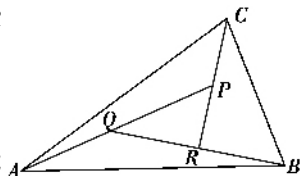
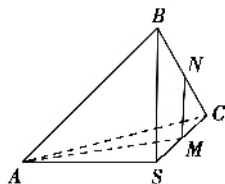
① x 为直线, y, z 为平面; ② x, y, z 为平面; ③ x, y 为直线, z 为平面; ④ x, y 为平面, z 为直线; ⑤ x, y, z 为直线.

15. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq x \\ 4x + 3y \leq 12 \end{cases}$, 则 $\frac{2y+3}{x+1}$ 的取值范围是 _____.

16. (理) 关于函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & (x \leq 0) \\ 2ax & (x > 0) \end{cases}$ (a 的常数且 $a > 0$), 下列表述正确的是 _____. (将你认为正确的答案的序号都填上)

①它的最小值是 0; ②它在每一点处都连续; ③它在每一点处都可导; ④它在 $\mathbb{R}$ 上是增函数; ⑤它有反函数.

(文) 已知 $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$, 则不等式 $(x+2) \cdot f(x+2) \leq 5-x$ 的解集是 _____.



三、解答题 本大题共 6 小题,共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知 $a = (\sqrt{3}\sin\omega x, 1)$, $b = (\cos\omega x, 0)$, $\omega > 0$, 又函数 $f(x) = a \cdot (a - kb)$ ($k > 0$) 是以 $\frac{\pi}{2}$ 为最小正周期的周期函数.

(1) 求函数 $f(x)$ 的值域;

(2) 若函数 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{5}{2} + \sqrt{3}$, 则是否存在正实数 t , 使得函数 $f(x)$ 的图象能由函数 $g(x) = ta \cdot b$ 的图象经过平移得到? 若能, 则求出实数 t 并写出一个平移向量 m ; 若不能, 则说明理由.

18. (本小题满分 12 分)

(理) 某地位于甲、乙两条河流的交汇处, 根据统计资料预测, 今年汛期甲河流发洪水的概率为 0.25, 乙河流发洪水的概率为 0.18 (假设两河流发洪水与否互不影响). 现有一台大型设备正在该地工作, 为了保护设备, 施工部门提出以下三种方案:

方案 1 运走设备, 此时需花费 4 000 元.

方案 2 建一保护围墙, 需花费 1 000 元, 但围墙只能抵御一个河流发生的洪水, 当两河流同时发洪水时, 设备仍将受损, 损失约 56 000 元.

方案 3 不采取措施, 此时, 当两河流都发洪水时损失达 60 000 元, 只有一条河流发洪水时, 损失为 10 000 元.

(1) 试求方案 3 中损失费 ξ (随机变量) 的分布列;

(2) 试比较哪一种方案好.

(文) 某篮球职业联赛总决赛在甲、乙两支球队之间进行, 比赛采用五局三胜制, 即哪个队先胜三场即可获得总冠军. 已知在每一场比赛中, 甲队获胜的概率均为 $\frac{2}{3}$, 乙队获胜的概率均为 $\frac{1}{3}$. 求:

(1) 甲队以 3:0 获胜的概率;

(2) 甲队获得总冠军的概率.

19. (本小题满分 12 分)

(理) 设函数 $f(x) = (1+x)^2 - \ln(1+x)^2$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若当 $x \in [\frac{1}{e} - 1, e - 1]$ (e 为自然对数的底数) 时, 不等式 $f(x) < m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围;

(3) 若关于 x 的方程 $f(x) = x^2 + x + a$ 在区间 $[0, 2]$ 上恰好有两个相异的实根, 求实数 a 的取值范围.

(文) 已知函数 $f(x) = -x^3 + ax^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

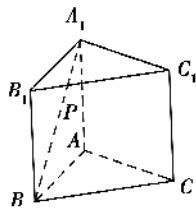
(1) 若 $a = 1$, 函数 $f(x)$ 的图象能否总在直线 $y = b$ 的下方? 说明理由;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上递增, $x = 2$ 是方程 $f(x) = 0$ 的一个根, 求证 $f(1) \leq -2$;

(3) 若函数 $f(x)$ 图象上任意不同的两点连线的斜率小于 1, 求实数 a 的取值范围.

20. (本小题满分 12 分)

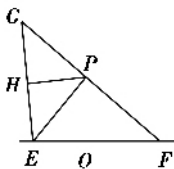
如图,已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长都为 a , P 为 A_1B 上的点.



- (1) 试确定 $\frac{A_1P}{PB}$ 的值,使得 $PC \perp AB$;
- (2) 若 $\frac{A_1P}{PB} = \frac{2}{3}$,求二面角 $P-AC-B$ 的大小;
- (3) 在(2)的条件下,求 C_1 到平面 PAC 的距离.

21. (本小题满分 12 分)

如图,已知 $|\vec{EF}| = 2c$, $|\vec{FG}| = 2a$ ($a > c$) 且 $2\vec{EH} = \vec{EG}$, $2\vec{EO} = \vec{EF}$, $\vec{HP} \cdot \vec{EG} = 0$ (G 为动点).



- (1) 建立适当的平面直角坐标系,写出点 P 的轨迹方程;
- (2) 若点 P 的轨迹上存在两个不同的点 A, B ,且线段 AB 的中垂线与 EF (或 EF 的延长线) 相交于一点 C ,则 $|\vec{OC}| < \frac{c^2}{a}$;
- (3) 若 $a\vec{OF} = c\vec{OM}$ 且点 P 的轨迹上存在点 Q 使得 $\vec{OQ} \cdot \vec{QM} = 0$. 求点 P 的轨迹的离心率 e 的取值范围.

22. (本小题满分 14 分)

(理) 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 有 $b_n = \frac{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}}{1-t \cdot 2^{n-1}}$, 其中 t 是与 n 无关的常数.

- (1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = t - 3$, 求 t 的值;
 - (2) 对(1)中的 t 存在数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_n}{t-1} = f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \cdots + f(\frac{n-1}{n}) + f(1)$, 其中 $f(x) = \frac{1}{4^x + 2}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 - (3) $c_n = \frac{1}{16a_n \cdot a_{n+1}}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 的值.
- (文) 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = b_1 = 6, a_2 = b_2 = 4, a_3 = b_3 = 3$, 且数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 是等差数列, 数列 $\{b_n - 2\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 是等比数列.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
 - (2) 是否存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使 $a_k - b_k \in (0, \frac{1}{2})$? 若存在, 求出 k 的值 若不存在, 请说明理由.