

附 参考答案与解析

2006 年全国百校联盟高考《考试大纲》调研卷(一)

考纲分析与考向预测 2006 年高考的数学考试大纲与往年相比,没有特别大的变化,只是做了一些小的定性词语的调整,三角函数部分将“正弦函数、余弦函数、正切函数的图象和性质”由“了解”层次提高到“理解”,这在本套试卷的第 2、6、10、17 题都做了深度的反映,考生在复习中要作出相应的调整,将重心移到三角函数的图象和性质上来.圆锥曲线部分“理解椭圆的参数方程”改为“了解”,表面上看像是在削弱,但参数方程的概念和参数思想并未削弱,还是应该重视.

根据 06 年新考纲的变化和作者本人多年的经验认为:

①选择题将以集合、简易逻辑、函数、三角、数列、立体几何、解析几何、排列组合、二项式定理、复数等为素材,编制颇具思考性、挑战性和趣味性的小型综合题.请同学们注意专题训练选择题的解法,“不择手段”乃是解选择题的明智之举!②填空题将以平面向量、立体几何、导数、线性规划、解析几何等为载体,编制新颖别致、小巧玲珑的小型综合题.基于填空题是改革创新题型的“试验田”,请同学们早做心理准备,及早适应.另外解填空题要注意精细,不能有一丝一毫的差错,否则全题皆错.③解答题将以平面向量与三角的交汇题开场——稳定考生情绪 概率与统计应用题助兴——吊起考生胃口 立体几何题(传统方法与向量方法任选)平稳过渡——考生志在必得 解析几何题率先发难——考生骑虎难下;导数与函数题把关——考生面临考验;数列、不等式、函数等的大型综合题压轴——考生尽早断了断(放弃、分段得分或强攻)!

相关事宜	难度系数	平均分	最高分	130 分以上人数百分比	120 ~ 130 分人数百分比	110 ~ 120 分人数百分比	100 ~ 110 分人数百分比
测试学校							
陕西师大附中	0.56	109	147	12%	8%	8%	15%

测试评价与备考策略 从测试结果来看,主要存在以下问题:

①学生面对新颖的试题不知道如何入手,一时找不到解题的突破口,思维不能快速进入解题状态.如第 1 题、第 6 题、第 10 题、第 14 题等.②学生构造模型,利用模型的能力不够强,这在平时的解题训练中,要有意识地记忆、理解模型的有效价值,这对于不断提升分析问题和解决问题的能力是大有裨益的.如第 9 题、第 18 题等.③学生画图不准确,读图时的信息翻译常有差错,抓不住问题的关键点.如第 7 题、第 13 题、第 16 题、第 21 题等.④学生对一些基本概念模糊,基本的运算不正确及基本的方法不熟练而失分的现象比较严重.如第 5 题、第 11 题(理)、第 16 题、第 21 题、第 22 题等.

针对以上情况,建议考生先抓重点复习,平时多训练客观题的解题速度、主观题的踩分点,要针对自己的弱项,狠下工夫,多回头看看自己以前做过的题,进行整理归纳,多问自己几个为什么,为什么错,错的原因,还有些题目碰巧对了,但不是真正凭知识做出来的,而是凭感觉,这些都需要自己再加强,下次不一定就可以再做对的.

1. A 易知 $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $B = \{y | y > 1\}$. 则由 $A * B$ 的定义知, $A * B = [0, 1] \cup (2, +\infty)$. 故选 A.
 评析 本题是一道信息迁移题,弄懂 $A * B$ 的含义及 A 和 B 中代表元素的特征是求解本题的关键.

2. B 由 $\left| \frac{x}{x-1} \right| > \frac{x}{x-1} \Rightarrow \frac{x}{x-1} < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$, 可知 p 真. 在 $\triangle ABC$ 中, 根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R$, 由 $\sin A > \sin B \Rightarrow \frac{a}{2R} > \frac{b}{2R} \Rightarrow a > b \Rightarrow A > B$. 由 $A > B \Rightarrow a > b \Rightarrow 2R \sin A > 2R \sin B \Rightarrow \sin A > \sin B$, 可知 q 真. 故选 B.
 评析 本题以不等式的解法及正弦定理的应用为载体,考查简易逻辑等知识,是一道设计精巧的小型综合题.

3. B 因为 $-9, a_1, a_2, -1$ 成等差数列, 所以 $-1 = -9 + 3d$. 所以 $d = \frac{8}{3} = a_2 - a_1$. 又因为 $-9, b_1, b_2, b_3, -1$ 成等比数列, 所以 $b_2^2 = (-9) \cdot (-1) = 9$. 所以 $b_2 = -3$ ($b_2 = 3$ 舍去). 所以 $b_2(a_2 - a_1) = -8$. 故选 B.
 评析 本题充分考查等差数列及等比数列的性质的灵活运用, 如 $b_2^2 = (-9) \cdot (-1) = 9$, $b_2 = -3$ ($b_2 = 3$ 应舍去, 为什么? 请同学们思考). 此题堪称一道“小、巧、精、活”的好题.

4. C 与向量 m 垂直的直线斜率为 $\frac{3}{4}$, 设 $P(a, 2a+1)$, 过 P 点且垂直于向量 m 的直线方程为 $3x - 4y + c = 0$, 将 $P(a, 2a+1)$ 代入得 $c = 5a + 4$, 即直线方程为 $3x - 4y + 5a + 4 = 0$. 又圆的方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$. $\therefore$ 圆心到直线的距离 $d = \frac{|3+5a+4|}{5} \leq 1$, 解得 $-\frac{12}{5} \leq a \leq -\frac{2}{5}$. 故选 C.
 评析 本题是直线与圆通过平面向量“交接”而成的一道综合性较强的试题, 考查的各部分知识点并不难, 其关键在于灵活地进行知识的转换, 思维的跳跃.

5. (理) D 设 $f^{-1}(x-1) = s$, $f(s) = x-1$, 又设 $f^{-1}(3-x) = t$, $\therefore f(t) = 3-x$. $\therefore f(s) + f(t) = 2, f(s) = 2 - f(t) = f(-t)$. 又 $f(x)$ 是 R 上的单调函数, $\therefore s = -t$, 即 $s+t=0$, 就是 $f^{-1}(x-1) + f^{-1}(3-x) = 0$. 故选 D.
 (文) B 设 $y = f^{-1}(x+a)$, 则 $x = f(y) - a$, 即 $y = f^{-1}(x+a)$ 的反函数为 $y = f(x) - a$. 从而 $f(x+a) = f(x) - a$, 令 $x = a$, 得 $f(2a) = f(a) - a - a = 0$. 故选 B.
 评析 本题考查反函数的有关知识. 理科题设出 $f^{-1}(x-1) = s$, $f^{-1}(3-x) = t$ 分别得到 $f(s) = x-1, f(t) = 3-x$, 进而发现 $f(s) + f(t) = 2$ 是关键, 再结合已知条件进行代数推理便水到渠成. 文科题设 $y = f^{-1}(x+a)$, 求出其反函数 $y = f(x) - a$ 后再与 $f(x+a)$ 比较得到函数方程 $f(x+a) = f(x) - a$, 即可找到解题的突破口.

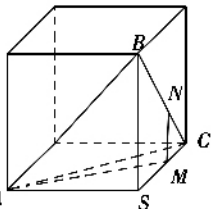
6. (理) B $\because A, B$ 为锐角三角形的两个内角, $\therefore A+B > \frac{\pi}{2}$, $\therefore \frac{\pi}{2} > A > \frac{\pi}{2} - B > 0$, $\therefore \tan A > \tan(\frac{\pi}{2} - B) = \cot B$, 又 $\frac{\pi}{2} > B > \frac{\pi}{2} - A > 0$, $\therefore \tan B > \tan(\frac{\pi}{2} - A) = \cot A$.

$\therefore \cot B - \tan A < 0, \tan B - \cot A > 0$, $\therefore$ 复数 z 对应的点位于复平面的第二象限, 故选 B.
 (文) C $\because f(x+2) = f(x)$, $\therefore T=2$ 是函数的一个周期. 又 $f(x)$ 在 $[-3, -2]$ 上是减函数, $\therefore f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上是减函数, 又 $f(x)$ 是偶函数, $\therefore f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是增函数.

$\therefore \alpha, \beta$ 是锐角三角形的两个内角, $\therefore \alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$, $\therefore \alpha > \frac{\pi}{2} - \beta$ 且 $\alpha, \frac{\pi}{2} - \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\therefore \sin \alpha > \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = \cos \beta$.

又 $\sin \alpha, \cos \beta \in (0, 1)$, $\therefore f(\sin \alpha) > f(\cos \beta)$. 故选 C.
 评析 理科题将复数与三角“交汇”在一起考查既是对考试大纲要求的呼应, 也是复数考查方式创新的必然要求. 文科题是一道集函数的周期性、奇偶性、单调性和三角知识于一体的小型综合题, 构思精巧, 考查学生的推理能力.

7. C $\because MN \perp AM$, $\therefore SB \perp AM$, 又 $SB \perp AC$, $\therefore SB \perp$ 平面 SAC , $\therefore SA, SB, SC$ 两两垂直. 将 $S-ABC$ 补成正方体如图示, 则 $S-ABC$ 的外接球与正方体的外接球相同, 球的直径等于正方体的对角线长, $\therefore 2R = \sqrt{3} \times 2\sqrt{3}, R = 3, S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 9 = 36\pi$. 故选 C.
 评析 本题由已知条件 $MN \perp AM$ 导出 SA, SB, SC 两两垂直, 进而为将正三棱锥 $S-ABC$ 补成正方体创设契机, 这是求解本题的核心思想. 割补法是求解立体几何问题惯用的方法, 应切实领会, 触类旁通.



8. (理) A $T_5 = T_{4+1} = C_6^4 (x\sqrt{x})^2 \cdot (-\frac{1}{x})^4 = 15 \cdot \frac{1}{x} = \frac{15}{x}, x = 2$. $\therefore S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2^n}) = 1 - (\frac{1}{2})^n$, $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$. 故选 A.
 (文) C 由题意知各项系数和为 $A = 4^n$ (令 $x = 1$) 各项二项式

的系数和为 $B=2^n$, 又由题意有 $A+B=4^n+2^n=272$, 则 $n=4$, 所以二项式为 $(3x^{\frac{1}{3}}+1)^4$, 由通项公式得 $T_{r+1}=C_4^r(3x^{\frac{1}{3}})^{4-r} \cdot 1^r=C_4^r \cdot 3^{4-r} \cdot x^{\frac{4-r}{3}}$, 由 $\frac{4-r}{3}=1$, 得 $r=1$, 所以 x 项的系数为: $C_4^1 \cdot 3^3=108$. 故选 C.

评析 二项式定理是高考的热点内容, 常以选择题、填空题的形式出现. 解答本题时应注意区分“二项式系数”与“项的系数”这两个不同的概念, 通项公式及赋值法的运用应熟练掌握. 理科题还应掌握数列极限的求解方法.

9. A 从五个球中任意取出两个放入它们编号相同的盒子中有 C_5^2 种方法, 再从剩下的 3 个球中取出一个放入与它编号不同的两个盒子中的一个有 C_2^1 种方法, 最后剩下的两个球只能有一种方法, 所以共有 $C_5^2 C_2^1=20$ 种方法. 故选 A.
- 评析 有关排列组合的应用题一直是高考的热点题型, 常以小题的形式出现. 解答这类问题的关键是分清是否有序、确定是分类还是分步、熟记常见模型的破解方法等.

10. D 由 $\tan 110^\circ = -\tan 70^\circ = -\frac{1}{\tan 20^\circ} = -\frac{1-\tan^2 10^\circ}{2\tan 10^\circ} = a$
 $\Rightarrow \tan^2 10^\circ - 2a \tan 10^\circ - 1 = 0$
 $\Rightarrow \tan 10^\circ = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2+4}}{2} = a \pm \sqrt{a^2+1}$. 由 $\tan 110^\circ < 0$ 知, $a < 0$ 而 $\tan 10^\circ > 0$, $\therefore \tan 10^\circ = a + \sqrt{a^2+1}$, ③正确. 又 $\tan 10^\circ = -\tan 70^\circ = -\frac{\tan 110^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 110^\circ \cdot \tan 60^\circ} = -\frac{a + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}a} = \frac{a + \sqrt{3}}{\sqrt{3}a - 1}$, 故②正确. 综上, ②③正确. 故选 D.

评析 本题以新颖的形式考查三角函数中的诱导公式、和角公式、倍角公式等, 是一道颇具思考性、挑战性和趣味性的三角函数综合题.

11. (理) B $\because \xi \sim N(3, 1)$, $\therefore P(-1 < \xi \leq 1) = F(1) - F(-1) = \Phi(\frac{1-3}{1}) - \Phi(\frac{-1-3}{1}) = \Phi(-2) - \Phi(-4) = 1 - \Phi(2) - 1 + \Phi(4) = \Phi(4) - \Phi(2)$. 故选 B.
- (文) A 分层抽取男生 $5 \times \frac{6}{15} = 2$ (名), 女生 $10 \times \frac{6}{15} = 4$ (名), 组成课外小组的结果数为 $m = C_{10}^4 C_2^2$. 从 15 名学生中选 6 名组成课外学习小组的结果数 $n = C_{15}^6$. 所以所求概率 $P = \frac{C_{10}^4 C_2^2}{C_{15}^6}$. 故选 A.

评析 理科题需要注意 ① $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $E\xi = \mu, D\xi = \sigma^2$. 从而 $\mu=3, \sigma=1$; ② $\xi \sim N(3, 1)$, ξ 不是服从标准正态分布, 需将所求转化为标准正态分布; ③ $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. 文科题是分层抽样法与概率的综合题, 本题的突破口即按性别依比例分层抽取 4 女 2 男共 6 名同学.

12. B 设 $|PF_2| = m$, 点 P 到直线 l 的距离为 d , 则由抛物线定义得 $d = |PF_2| = m$, 由点 P 在双曲线上及双曲线第一定义得 $|PF_1| = 2a + |PF_2| = 8 + m$, 又由双曲线第二定义得 $\frac{|PF_1|}{d} = e = \frac{5}{4}$, $\therefore \frac{8+m}{m} = \frac{5}{4}$, 解之得 $m=32$. 故选 B.

评析 本题是以抛物线与双曲线交汇为考查点, 考查学生灵活运用定义及离心率解题的能力, 具有较好的区分度和选拔功能.

13. (理) $\frac{2}{7}a + \frac{4}{7}b$ 连结 AR , $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\therefore \frac{7}{8}\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 即 $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{7}a + \frac{4}{7}b$.

(文) $3\sqrt{2}$ $\because a \cdot b = b \cdot c = c \cdot a = -1$, 且 $a+b+c=0$, $\therefore a = -(b+c)$, $-(b+c) \cdot b = -1$, 即 $b^2 + b \cdot c = 1$, $\therefore b^2 = 2$, $|b| = \sqrt{2}$. 同理可求得 $|a| = |c| = \sqrt{2}$, $|a| + |b| + |c| = 3\sqrt{2}$.

评析 理科题考查向量加法的平行四边形法则, 强化平面向量在平面几何中的应用. 在解此类题时, 除利用向量的加减法外, 还应充分利用平面几何的一些定理. 文科题求解的关键是将 a, b, c 中的一个向量用其他两个表示出来再计算.

14. ①③④ ①显然是正确的; ②中垂直于同一个平面的两个平面的位置关系应为平行或相交, 故②不正确; 垂直于同一个平面的两条直线平行, 故③正确; 垂直于同一条直线的两个平面平

行, 故④正确. 而垂直于同一条直线的两条直线的位置关系是平行、相交或异面, 故⑤不正确.

评析 这是填空题中的“多选题”, 高考中经常出现, 应引起足够重视. 本题以全新的视角考查了线线、线面、面面的位置关系问题, 要认真、细致地逐一将符号语言转换为文字语言加以分析才能得到正确答案.

15. $[\frac{45}{19}, 11]$ 由已知约束条件可作出如图阴影所示的可行域, 又

$$\frac{2y+3}{x+1} = 2 \times \frac{y+\frac{3}{2}}{x+1}, \text{可看作是求过}$$

点 $A(-1, -\frac{3}{2})$ 与可行域相交的直线的斜率的 2 倍的取值范围问题, 由于过点 A 的直线的斜率范围为 $[k_{AB}, k_{AC}]$, $\therefore B(\frac{12}{7}, \frac{12}{7})$,

$$C(0, 4), \text{而 } k_{AB} = \frac{\frac{12}{7} + \frac{3}{2}}{\frac{12}{7} + 1} = \frac{45}{38}, k_{AC} = \frac{4 + \frac{3}{2}}{0 + 1} = \frac{11}{2}, \text{故 } \frac{2y+3}{x+1} =$$

$$2 \times \frac{y+\frac{3}{2}}{x+1} \in [2k_{AB}, 2k_{AC}] = [\frac{45}{19}, 11].$$

评析 本题将线性规划、直线斜率等知识有机地交汇在一起.

将 $\frac{2y+3}{x+1}$ 变形为 $2 \times \frac{y+\frac{3}{2}}{x+1}$ 及数形结合思想的妙用值得仔细品味.

16. (理) ①② 画图象分析知 ① $f(x)$ 的最小值为 0; ② $f(x)$ 在每一点处都连续; ③ $f(x)$ 在 0 处左、右导数不等, 所以在 0 处不可导; ④ $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不是增函数; ⑤ 对于 $y=1$, x 有两个不同的值 $x_1 = -\ln 2$ 及 $x_2 = \frac{1}{2a}$ 与之对应, 所以 $f(x)$ 没有反函数.

(文) $\{x|x \leq \frac{3}{2}\}$ ① 当 $x+2 \geq 0$, 即 x

≥ -2 时, $(x+2) \cdot f(x+2) \leq 5-x \Leftrightarrow x+2 \leq 5-x \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$, 故

$-2 \leq x \leq \frac{3}{2}$; ② 当 $x+2 < 0$, 即 $x < -2$ 时, $(x+2) \cdot f(x+2) \leq 5-x \Leftrightarrow -(x+2) \leq 5-x \Rightarrow 0 \leq 7$, 故 $x < -2$. 综合①及②知 $x \in \{x|x \leq \frac{3}{2}\}$.

评析 理科题考查利用函数图象判断函数性质, 是数形结合题, 考生往往在此方面的能力较差. 另外③中涉及左右导数对教材内容有所拔高, 要求学生对知识融会贯通才能解答. 文科题将分段函数与不等式综合, 显示了试题设计的新颖之处. 求解时需要先分而治之, 再合并在一起.

17. (1) $\because f(x) = a^2 - ka \cdot b = 3\sin^2 \omega x + 1 - k \cdot \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x$
 $= \frac{3}{2}(1 - \cos 2\omega x) + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}k \sin 2\omega x$
 $= \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(k \sin 2\omega x + \sqrt{3} \cos 2\omega x)$
 $= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3k^2+9} \sin(2\omega x + \varphi)$.

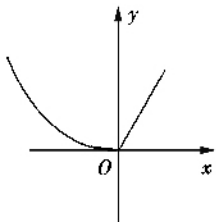
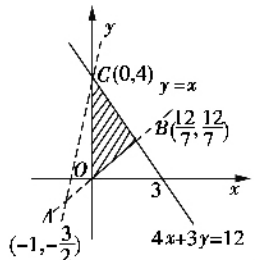
$\therefore f(x)$ 的值域为 $[\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3k^2+9}, \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3k^2+9}]$.

(2) $\because f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$, $\therefore \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}$, $\therefore \omega = 2$.

又 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{5}{2} + \sqrt{3}$, $\therefore \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3k^2+9} = \frac{5}{2} + \sqrt{3}$, 解得 $k=1$ 或 $k=-1$ (舍去).

$$\therefore f(x) = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin 4x + \sqrt{3} \cos 4x) = \frac{5}{2} - \sqrt{3} \sin(4x + \frac{\pi}{3}) = \frac{5}{2} + \sqrt{3} \sin(4x + \frac{4\pi}{3}).$$

而 $g(x) = ta \cdot b = t(\sqrt{3} \sin 2x, 1) \cdot (\cos 2x, 0)$



$$= t \cdot \sqrt{3} \sin 2x \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} t \sin 4x.$$

∴ 当 $t=2$ 且 $m = (-\frac{\pi}{3}, \frac{5}{2})$ 时, 则 $f(x)$ 的图象可由 $g(x)$ 的图象按向量 m 平移得到.

评析 本题是平面向量与三角函数的综合题, 以向量为背景, 考查了三角函数的性质及平移变换, 第(2)问设计成探索开放性问题的刺激同学们的解题“胃口”.

18. (理) (1) 在方案 3 中, 记“甲河流发生洪水”为事件 A ; “乙河流发生洪水”为事件 B , 则 $P(A) = 0.25, P(B) = 0.18$, 所以, 有且只有一条河流发生洪水的概率为 $P(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0.34$, 两河流同时发生洪水的概率为 $P(A \cdot B) = 0.045$, 都不发生洪水的概率为 $P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = 0.75 \times 0.82 = 0.615$, 设损失费为随机变量 ξ , 则 ξ 的分布列为:

ξ	10 000	60 000	0
P	0.34	0.045	0.615

(2) 对方案 1 来说, 花费 4 000 元; 对方案 2 来说, 建围墙需花费 1 000 元, 它只能抵御一条河流的洪水, 但当两河流都发生洪水时, 损失约 56 000 元, 而两河流同时发生洪水的概率为 $P = 0.25 \times 0.18 = 0.045$. 所以, 该方案中可能的花费为: 1 000 + 56 000 $\times 0.045 = 3 520$ (元). 对于方案 3 损失费的数学期望为 $E\xi = 10 000 \times 0.34 + 60 000 \times 0.045 + 0 \times 0.615 = 6 100$ (元). 比较可知, 方案 2 最好, 方案 1 次之, 方案 3 最差.

(文) (1) 设“甲队以 3:0 获胜”为事件 A , 则 $P(A) = (\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$.

(2) 设“甲队获得总冠军”为事件 B , 则事件 B 包括以下结果 3:0 3:1 3:2 三种情况.

若以 3:0 胜, 则 $P_1 = (\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$;

若以 3:1 胜, 则 $P_2 = C_3^2 (\frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$;

若以 3:2 胜, 则 $P_3 = C_4^2 (\frac{2}{3})^2 \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$.

所以, 甲队获得总冠军的概率为 $P(B) = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{64}{81}$.

评析 理科题考查随机变量的分布列与期望, 互斥事件有一个发生的概率, 相互独立事件同时发生的概率. 第(2)问对同学们的合情推理能力及分析解决问题的能力考查相当充分. 文科题主要考查互斥事件的概率, 独立重复事件的概率, 考查应用意识和实践能力.

19. (理) (1) 函数定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, $f'(x) = 2[(1+x) - \frac{1}{x+1}] = \frac{2x(x+2)}{x+1}$, 由 $f'(x) > 0$ 得 $-2 < x < -1$ 或 $x > 0$, 由 $f'(x) < 0$ 得 $x < -2$ 或 $-1 < x < 0$, 则 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-2, -1), (0, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-\infty, -2), (-1, 0)$.

(2) 由 $f'(x) = \frac{2x(x+2)}{x+1} = 0$ 得 $x=0$ 或 $x=-2$, 由(1)知, $f(x)$

在 $[-\frac{1}{e}, -1, 0]$ 上递减, 在 $[0, e-1]$ 上递增,

又 $f(\frac{1}{e}-1) = \frac{1}{e^2} + 2f(e-1) = e^2 - 2 > \frac{1}{e^2} + 2$, 所以 $x \in [-\frac{1}{e}, -1, e-1]$ 时, $[f(x)]_{\max} = e^2 - 2$, 故 $m > e^2 - 2$ 时, 不等式 $f(x) < m$ 恒成立.

(3) 方程 $f(x) = x^2 + x + a$, 即 $x - a + 1 - \ln(1+x)^2 = 0$, 记 $g(x) = x - a + 1 - \ln(1+x)^2$, 所以 $g'(x) = 1 - \frac{2}{1+x} = \frac{x-1}{x+1}$, $g'(x) > 0$, 得 $x < -1$ 或 $x > 1$; 由 $g'(x) < 0$, 得 $-1 < x < 1$, 所以 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上递减, 在 $[1, 2]$ 上递增. 为了使 $f(x) = x^2 + x + a$ 在 $[0, 2]$ 上恰好有两个相异的实根, 只需 $g(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 和 $(1, 2]$

上各有一个实根, 于是有 $\begin{cases} g(0) \geq 0, \\ g(1) < 0, \\ g(2) \geq 0 \end{cases}$ 解得 $2 - 2\ln 2 < a \leq 3 - 2\ln 3$.

(文) (1) 不能. 取 $x = -1$, 则 $f(-1) = 1 + 1 + b > b$, 即存在点 $(-1, 2+b)$ 在函数图象上, 且在直线 $y=b$ 的上方.

(2) 由 $x=2$ 是方程 $f(x) = 0$ 的一个根, 得 $f(2) = -8 + 4a + b = 0$, 即 $b = 8 - 4a$. 又 $f'(x) = -3x^2 + 2ax$. 令 $f'(x) = 0$, 即 $-3x^2$

$+ 2ax = 0$, 解得 $x_1 = 0, x_2 = \frac{2a}{3}$. 又函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上是增函数,

∴ $x_2 = \frac{2a}{3} \geq 2$, 即 $a \geq 3$. ∴ $f(1) = -1 + a + b = -1 + a + 8 - 4a = 7 - 3a \leq -2$.

(3) 设任意不同的两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 则 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} < 1$. ∴ $\frac{-x_1^3 + ax_1^2 + x_2^3 - ax_2^2}{x_1 - x_2} < 1$, 即 $-x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 + a(x_1 + x_2) < 1$,

∴ $-x_1^2 + (a - x_2)x_1 - x_2^2 + ax_2 - 1 < 0$.

∵ $x_1 \in \mathbf{R}$, ∴ $\Delta_1 = (a - x_2)^2 + 4(-x_2^2 + ax_2 - 1) < 0$,

即 $-3x_2^2 + 2ax_2 + a^2 - 4 < 0$.

又 $x_2 \in \mathbf{R}$, ∴ $\Delta_2 = 4a^2 + 12(a^2 - 4) < 0$,

解得 $-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$.

故实数 a 的取值范围为 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

评析 本题将函数、方程、不等式与导数结合在一起, 充分发挥导数的工具作用, 应用导数研究函数的性质、方程根的分布、不等式的有关问题等, 是新课程高考的重点和热点问题, 不可等闲视之.

20. 解法一 (1) 当 $\frac{A_1P}{PB} = 1$ 时, $PC \perp AB$. 取 AB 的中点 D' , 连结 CD', PD' .

∵ $\triangle ABC$ 为正三角形, ∴ $CD' \perp AB$.

当 P 为 A_1B 的中点时, $PD' \parallel A_1A$, ∴ $A_1A \perp$ 底面 ABC , ∴ $PD' \perp$ 底面 ABC , ∴ $PC \perp AB$ (三垂线定理).

(2) 当 $\frac{A_1P}{PB} = \frac{2}{3}$ 时, 过 P 作 $PD \perp AB$ 于 D , 如图甲所示, 则 $PD \perp$ 底面 ABC . 过 D 作 $DE \perp AC$ 于 E , 连结 PE , 则 $PE \perp AC$,

∴ $\angle DEP$ 为二面角 $P-AC-B$

的平面角.

又 $\because PD \parallel A_1A$, ∴ $\frac{BD}{DA} = \frac{BP}{PA_1} =$

$\frac{3}{2}$, ∴ $AD = \frac{2}{5}a$,

∴ $DE = AD \cdot \sin 60^\circ$

$= \frac{2a}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{5}a$. 又 $\because \frac{PD}{A_1A} =$

$\frac{3}{5}$, ∴ $PD = \frac{3}{5}a$.

∴ $\tan \angle PED = \frac{PD}{DE} = \sqrt{3}$, ∴ $\angle PED = 60^\circ$.

即二面角 $P-AC-B$ 的大小为 60° .

(3) 设 C_1 到面 PAC 的距离为 d , 则 $V_{C_1-PAC} = V_{P-ACC_1}$.

∵ $PD \parallel A_1A$, ∴ $PD \parallel$ 平面 A_1C , ∴ DE 即为 P 点到平面 A_1C 的距离.

又 $PE = \sqrt{PD^2 + DE^2} = \sqrt{(\frac{3}{5}a)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{5}a)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{5}a$,

∴ $\frac{1}{3}S_{\triangle PAC} \cdot d = \frac{1}{3}S_{\triangle ACC_1} \cdot DE$,

即 $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}a \cdot \frac{2\sqrt{3}}{5}a) \cdot d = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}a^2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{5}a$.

解得 $d = \frac{a}{2}$.

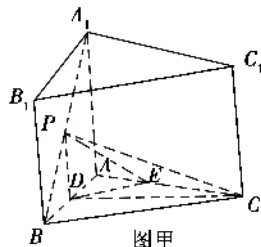
即 C_1 到平面 PAC 的距离为 $\frac{1}{2}a$.

解法二 以 A 为原点, AB 为 x 轴, 过 A 点与 AB 垂直的直线为 y 轴, AA_1 为 z 轴, 建立空间直角坐标系 $A-xyz$, 如图乙所示, 则 $B(a, 0, 0), A_1(0, 0, a), C(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0)$, 设 $P(x, 0, z)$.

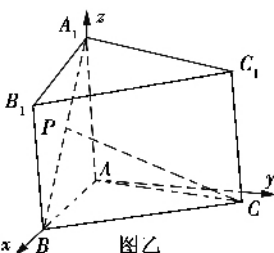
(1) 由 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ 得 $(x - \frac{a}{2},$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}a, z) \cdot (a, 0, 0) = 0$,

即 $(x - \frac{a}{2}) \cdot a = 0$, ∴ $x = \frac{a}{2}$, ∴ P 为 A_1B 的中点.



图甲



图乙

即 $\frac{A_1P}{PB} = 1$ 时, $PC \perp AB$.

(2) 当 $\frac{A_1P}{PB} = \frac{2}{3}$ 时, 由 $\overrightarrow{A_1P} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PB}$ 得 $(x, 0, z-a) = \frac{2}{3}(a-x, 0, -z)$,

$$\text{即} \begin{cases} 3x = 2a - 2x, \\ 3(z-a) = -2z, \end{cases} \begin{cases} x = \frac{2}{5}a, \\ z = \frac{3}{5}a. \end{cases} \therefore P(\frac{2}{5}a, 0, \frac{3}{5}a).$$

设平面 PAC 的一个法向量 $n = (x', y', z')$,

$$\text{则} \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} (x', y', z') \cdot (\frac{2}{5}a, 0, \frac{3}{5}a) = 0, \\ (x', y', z') \cdot (\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0) = 0. \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} \frac{2}{5}a \cdot x' + \frac{3}{5}az' = 0, \\ \frac{a}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}ay' = 0. \end{cases}$$

取 $x' = 3$, 则 $y' = -\sqrt{3}$, $z' = -2$.

$\therefore n = (3, -\sqrt{3}, -2)$.

又平面 ABC 的一个法向量为 $n_0 = (0, 0, 1)$,

$$\therefore \cos \langle n, n_0 \rangle = \frac{n \cdot n_0}{|n| \cdot |n_0|} = \frac{-2}{4 \times 1} = -\frac{1}{2},$$

$\therefore$ 二面角 $P-AC-B$ 的大小为 $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

(3) 设 C_1 到平面 PAC 的距离为 d , 则 $d = |\overrightarrow{C_1C}| \cdot |\cos \langle n, \overrightarrow{C_1C} \rangle|$

$$= \frac{|n \cdot \overrightarrow{C_1C}|}{|n|} = \frac{|(3, -\sqrt{3}, -2) \cdot (0, 0, -a)|}{4} = \frac{a}{2}. \text{ 即 } C_1 \text{ 到平面 } PAC \text{ 的距离为 } \frac{a}{2}.$$

评析 本题以正三棱柱为载体全方位地考查了立体几何中的重要内容, 如线面与线线的位置关系、二面角问题、距离问题等. 考查的知识点丰富, 是一道优秀的创新型试题. 解法二建立空间直角坐标系利用空间向量求解的思路和方法请同学们熟练掌握.

21. (1) 如图甲, 以 EF 所在的直线为 x 轴, EF 的中垂线为 y 轴, 建立平面直角坐标系. 由题设 $2EH = EG$, $EG \cdot HC = HP = 0$, $\therefore |PG| = |PE|$, 而 $|PF| + |PE| = |FG| = 2a$.

$\therefore$ 点 P 的轨迹是以 E, F 为焦点, 长轴长为 $2a$ 的椭圆, 其方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$.

(2) 如图乙, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_0, 0)$, $\therefore x_1 \neq x_2$ 且 $|CA| = |CB|$, 即 $(x_1 - x_0)^2 + y_1^2 = (x_2 - x_0)^2 + y_2^2$ ①, 又 A, B 在轨迹上, $\therefore \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2 - c^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{a^2 - c^2} = 1$, 即 $y_1^2 = a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}x_1^2, y_2^2 = a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}x_2^2$.

代入①整理得 $2(x_2 - x_1) \cdot x_0 = (x_2^2 - x_1^2) \cdot \frac{c^2}{a^2}$, $\therefore x_1 \neq x_2, \therefore x_0 = \frac{(x_1 + x_2)c^2}{2a^2}$, $\therefore -a \leq x_1 \leq a, -a \leq x_2 \leq a, \therefore -2a \leq x_1 + x_2 \leq 2a$. $\therefore x_1 \neq x_2, \therefore -2a < x_1 + x_2 < 2a$, $\therefore -\frac{c^2}{a} < x_0 < \frac{c^2}{a}$, 即 $|\overrightarrow{OC}| < \frac{c^2}{a}$.

(3) 如图乙, 由 $a\overrightarrow{OF} = c\overrightarrow{OM}$, 即点 M 为椭圆的右顶点, 设 OQ 所在直线为 $y = kx$, 由 $\begin{cases} y = kx, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \frac{ab}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}, \\ y = \frac{abk}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}. \end{cases}$ (其中 $b^2 = a^2 - c^2$)

$$\therefore \overrightarrow{OQ} = (\frac{ab}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}, \frac{abk}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}),$$

评析 理科题是函数、数列、极限等有机结合的综合题, 文科题则是数列、函数、不等式等巧妙融合的压轴题, 均体现了在“知识网络交汇点处设计试题”的高考命题指导思想. 理科题对 $f(x)$, 当 $x_1 + x_2 = 1$ 时, $f(x_1) + f(x_2) = \frac{1}{2}$ 的发现及倒序相加法、裂项相消法的熟练运用是解决问题的关键. 文科题叠加法的运用及构造函数利用函数的单调性求解的思想方法如同“神来”之笔, 给人留下了深刻的印象.

22. (理) (1) $b_n = \frac{2 - \frac{1}{2^{n-1}}}{(\frac{1}{2})^{n-1} - t}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\frac{2}{t} = t - 3 \Rightarrow t = 2$ 或 $t =$

1. 当 $t = 1$ 时, 若 $n = 1$, 则 $1 - t \cdot 2^{n-1} = 0$, 舍去. $\therefore t = 2$.

(2) 对 $f(x), x_1 + x_2 = 1$, 则 $f(x_1) + f(x_2) = \frac{1}{4^{x_1} + 2} + \frac{1}{4^{x_2} + 2} = \frac{1}{2}$.

由 $t = 2$, 得 $\frac{a_n}{t-1} = a_n$.

$$a_n = f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \dots + f(\frac{n-1}{n}) + f(1),$$

$$\text{又 } a_n = f(1) + f(\frac{n-1}{n}) + f(\frac{n-2}{n}) + \dots + f(\frac{1}{n}) + f(0),$$

$$\text{两式相加得 } 2a_n = \frac{n+1}{2} \Rightarrow a_n = \frac{n+1}{4}.$$

$$(3) c_n = \frac{1}{16a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

$$\therefore S_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

(文) (1) 由已知 $a_2 - a_1 = -2, a_3 - a_2 = -1, (-1) - (-2) = 1$.

$\therefore a_{n+1} - a_n = (a_2 - a_1) + (n-1) \cdot 1 = n-3$.

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} + a_{n-2}) + \dots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1$

$$= (n-4) + (n-5) + \dots + (-1) + (-2) + 6 = \frac{n^2 - 7n + 18}{2}.$$

当 $n = 1$ 时也适合, $\therefore a_n = \frac{n^2 - 7n + 18}{2} (n \in \mathbb{N}^*)$.

又 $b_1 - 2 = 4, b_2 - 2 = 2$, 而 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore b_n - 2 = (b_1 - 2) \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}, \text{ 即 } b_n = 2 + 8 \cdot (\frac{1}{2})^n.$$

(2) 设 $f(k) = a_k - b_k = \frac{1}{2}k^2 - \frac{7}{2}k + 7 - 8 \cdot (\frac{1}{2})^k = \frac{1}{2}(k - \frac{7}{2})^2 + \frac{7}{8} - 8 \cdot (\frac{1}{2})^k$, 当 $k \geq 4$ 时, $u(k) = \frac{1}{2}(k - \frac{7}{2})^2 + \frac{7}{8}$ 为 k 的增函数, $y = -8 \cdot (\frac{1}{2})^k$ 也为 k 的增函数.

$$\therefore \text{当 } k \geq 4 \text{ 时 } f(k) = a_k - b_k \geq f(4) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } f(1) = f(2) = f(3) = 0,$$

$$\therefore \text{不存在 } k, \text{ 使 } a_k - b_k \in (0, \frac{1}{2}).$$

评析 理科题是函数、数列、极限等有机结合的综合题, 文科题则是数列、函数、不等式等巧妙融合的压轴题, 均体现了在“知识网络交汇点处设计试题”的高考命题指导思想. 理科题对 $f(x)$, 当 $x_1 + x_2 = 1$ 时, $f(x_1) + f(x_2) = \frac{1}{2}$ 的发现及倒序相加法、裂项相消法的熟练运用是解决问题的关键. 文科题叠加法的运用及构造函数利用函数的单调性求解的思想方法如同“神来”之笔, 给人留下了深刻的印象.

22. (理) (1) $b_n = \frac{2 - \frac{1}{2^{n-1}}}{(\frac{1}{2})^{n-1} - t}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\frac{2}{t} = t - 3 \Rightarrow t = 2$ 或 $t =$

1. 当 $t = 1$ 时, 若 $n = 1$, 则 $1 - t \cdot 2^{n-1} = 0$, 舍去. $\therefore t = 2$.

(2) 对 $f(x), x_1 + x_2 = 1$, 则 $f(x_1) + f(x_2) = \frac{1}{4^{x_1} + 2} + \frac{1}{4^{x_2} + 2} = \frac{1}{2}$.

由 $t = 2$, 得 $\frac{a_n}{t-1} = a_n$.

$$a_n = f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \dots + f(\frac{n-1}{n}) + f(1),$$

$$\text{又 } a_n = f(1) + f(\frac{n-1}{n}) + f(\frac{n-2}{n}) + \dots + f(\frac{1}{n}) + f(0),$$

$$\text{两式相加得 } 2a_n = \frac{n+1}{2} \Rightarrow a_n = \frac{n+1}{4}.$$

$$(3) c_n = \frac{1}{16a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

$$\therefore S_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

(文) (1) 由已知 $a_2 - a_1 = -2, a_3 - a_2 = -1, (-1) - (-2) = 1$.

$\therefore a_{n+1} - a_n = (a_2 - a_1) + (n-1) \cdot 1 = n-3$.

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} + a_{n-2}) + \dots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1$

$$= (n-4) + (n-5) + \dots + (-1) + (-2) + 6 = \frac{n^2 - 7n + 18}{2}.$$

当 $n = 1$ 时也适合, $\therefore a_n = \frac{n^2 - 7n + 18}{2} (n \in \mathbb{N}^*)$.

又 $b_1 - 2 = 4, b_2 - 2 = 2$, 而 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore b_n - 2 = (b_1 - 2) \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}, \text{ 即 } b_n = 2 + 8 \cdot (\frac{1}{2})^n.$$

(2) 设 $f(k) = a_k - b_k = \frac{1}{2}k^2 - \frac{7}{2}k + 7 - 8 \cdot (\frac{1}{2})^k = \frac{1}{2}(k - \frac{7}{2})^2 + \frac{7}{8} - 8 \cdot (\frac{1}{2})^k$, 当 $k \geq 4$ 时, $u(k) = \frac{1}{2}(k - \frac{7}{2})^2 + \frac{7}{8}$ 为 k 的增函数, $y = -8 \cdot (\frac{1}{2})^k$ 也为 k 的增函数.

$$\therefore \text{当 } k \geq 4 \text{ 时 } f(k) = a_k - b_k \geq f(4) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } f(1) = f(2) = f(3) = 0,$$

$$\therefore \text{不存在 } k, \text{ 使 } a_k - b_k \in (0, \frac{1}{2}).$$

评析 理科题是函数、数列、极限等有机结合的综合题, 文科题则是数列、函数、不等式等巧妙融合的压轴题, 均体现了在“知识网络交汇点处设计试题”的高考命题指导思想. 理科题对 $f(x)$, 当 $x_1 + x_2 = 1$ 时, $f(x_1) + f(x_2) = \frac{1}{2}$ 的发现及倒序相加法、裂项相消法的熟练运用是解决问题的关键. 文科题叠加法的运用及构造函数利用函数的单调性求解的思想方法如同“神来”之笔, 给人留下了深刻的印象.

考纲分析与考向预测 通过对 2005 年高考试卷及 2006 年高考大纲的认真研读,笔者认为,2006 年的高考试卷仍然会保持整体的稳定性,重点内容重点考查,并且要体现数学的应用价值.例如考纲对三角函数要求的变化主要是加强三角函数图象应用的考查,本试卷中的第 17 题就体现了这样一个变化.圆的参数方程也是体现数学应用的一个方面,在本试卷中也有所体现,加深对这一部分知识的认识.而这些还仅仅是数学知识在数学中的应用技巧,数学知识在生活实际中的应用也是 2006 年考查的一个方向.本试卷中的第 7 和第 18 题都是应用题的形式.解析几何和数列是每年必考的一个内容,特别是作为压轴题更能体现对综合能力的考查,还有立体几何及导数等基本上也是以大题的形式出现,而函数和不等式这些是高中数学中最基本的知识,是解决其他问题的工具,一般都以小题的形式出现,本试卷都保持了每年的这些稳定题目,以新的形式出现,反应了高考命题制的基本思路.计算能力也是每年高考都会涉及的内容,这一部分在 2006 年的高考中也不会有大的变化,有些题目体现计算的技巧性,而有些需要体现计算的速度和准确度,这些在解答中都会有所体现.

测试学校	难度系数	平均分	最高分	140 分以上 人数百分比	130 ~ 140 分 人数百分比	120 ~ 130 分 人数百分比	110 ~ 120 分 人数百分比	100 ~ 110 分 人数百分比
清华附中	0.53	113	148	3.2%	6.1%	9.2%	11.3%	16.2%

测试评价与备考策略 从测试结果来看,有些选择题需要考生有足够的灵活性,可以对答案进行排除,或者根据自己的简单计算就可以得到答案.例如第 6 题根据直线斜率的取值范围即可排除相应答案,第 7 题只要理解题意根据简单的计算即可得出答案.但是有些题目需要足够的细心才能得到正确答案,例如第 13 和 14 题稍微疏忽就会出错,因此这两道题目也是测试中错误较多的填空题.导数知识的应用主要体现在切线的斜率和求极值与最值上.这些题目在求导时必须保证准确,否则就会“费力不讨好”,因此第 19 题(理)导数的计算把公式记错也是错误的致命点,而第 19(文)对于 b 值的讨论也需要有足够的耐心,许多考生都在这里栽跟头.立体几何还是通题通法,出错主要体现在对图象的认识上,很多考生在不能正确认识立体图形的条件下对题目不知所措,导致空白.而 21 和 22 这两道压轴题主要是解答不全,只写出第(1)小问的很多,后几问不会,或者写不完整.

根据对高考信息的分析,笔者认为在 2006 年的备考方面应注意以下几个方面:

1. 注意基础知识的理解和应用,集合、函数及不等式这些知识不仅要会,更要熟,会应用.平时除了多加强这一部分的基础知识的训练外,还要在应用中多下工夫,体现知识和思维的灵活性.因此,在复习这一部分时,要善于思考,形成知识系统.
2. 加强基础计算的训练,要做到既快又准,还有字母的运算要灵活,可以记住一些常见的数据,比如 C_3^2, C_4^2, C_6^3 等使计算更快.
3. 加强做题步骤的训练,有些题目不是不会,而是做不对,或者答案写不全,这些可以结合一些模拟试卷进行训练.
4. 多搜集高考信息,对信息进行分析,把握复习的重点,结合自己的实际,做一些训练.

1. B 可以解得 $A = \{x | 1 - a < x < 3 + a\}$, $B = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 4\}$, 由 $A \cup B = \mathbb{R}$ 画数轴分析可得 $\begin{cases} 3 - a \leq -2 \\ 3 + a \geq 4 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a \geq 5 \\ a \geq 1 \end{cases}$, 所以, $a \geq 5$.

评析 集合的运算是高中阶段最基础的知识,应该是送分题.

2. B $\tan(243^\circ - \alpha) = \tan(180^\circ + 63^\circ - \alpha) = \tan(63^\circ - \alpha) = \frac{1}{3}$, 而 $\cot(-927^\circ - \alpha) = -\cot(5 \times 180^\circ + 27^\circ + \alpha) = -\cot(27^\circ + \alpha) = -\cot[90^\circ - (63^\circ - \alpha)] = -\tan(63^\circ - \alpha) = -\frac{1}{3}$.

评析 三角函数的诱导公式不仅要会,而且要灵活掌握,你观察出这里的角与角之间的关系了吗?

3. C 因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称,所以 $f(x)$ 的反函数和原函数是同一函数,则 $y = \frac{x-6}{2x+m}$, 可得 $x = \frac{my+6}{1-2y}$, 即反函数 $f^{-1}(x) = \frac{-mx-6}{2x-1}$, 所以 $m = -1$, $f(x) = \frac{x-6}{2x-1}$, 则 $f^{-1}(8) = \frac{8-6}{16-1} = \frac{2}{15}$.

4. (理) B 由 $\log_3 m + (m^2 + m - 2)i - m + 1$ 表示纯虚数可知, $\log_3 m - m + 1 = 0$ 且 $m^2 + m - 2 \neq 0$, 即 $\begin{cases} \log_3 m = m - 1 \\ m \neq 1 \text{ 且 } m \neq -2 \end{cases}$, 画出函数 $y = \log_3 x$ 与 $y = x - 1$ 的图象可知公共点满足 $x \neq 1$ 且 $x \neq -2$ 的只有一个.

(文) B 只需画出函数 $y = \log_3 x$ 与 $y = x - 1$ 的图象,即可看出交点个数即方程解的个数为 2.

5. C 由 $a, \sqrt{a^2 + b^2}, b$ 成等比数列可得 $\sqrt{a^2 + b^2} = ab$ (故 ab 为正数), 而 $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{2ab}, ab \geq \sqrt{2ab}, \sqrt{ab} \geq \sqrt{2}, ab \geq 2$.

6. (理) C 设椭圆的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 则由 $x + y + m = 0$ 可得 $m = -(x + y) = -(2\cos\theta + \sin\theta) = -\sqrt{5}\sin(\theta + \varphi)$, 所以, $-\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5}$, 即直线 $mx - y - 2006 = 0$ 的斜率的取值范围为 $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$, 故倾斜角的最大值为 $\pi - \arctan \sqrt{5}$.

(文) B 设 $P(x, y)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 则由方程 $x + y + \sqrt{2}m = 0$ 知, $\sqrt{2}m = -(x + y) = -(\cos\theta + \sin\theta) = -\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$, 即 $m = -\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$, 所以 $-1 \leq m \leq 1$. 即直线 $mx - y - 2006 = 0$ 的斜率的范围是 $[-1, 1]$, 故倾斜角的最大值为 135° .

评析 倾斜角的最大值首先要考虑钝角,不要和斜率最大混淆在一起,本题是考查直线倾斜角取值范围的一个很好的题目.

7. B 6 个人及所带物品的平均重量为

$$\frac{60 + 66 + 70 + 72 + 58 + 50 + 5 + 7 + 4 + 8 + 6 + 11}{6} = \frac{139}{2}, \text{ 而每}$$

辆车载客 24 人, 故每辆车的载重量要略大于 $\frac{139}{2} \times$

$24 = 1668$ (kg), 故载重量为 2 吨的车辆较为合适.

8. A 根据条件可知 BC 与 x 轴垂直, 而 $AD \perp BC$, 所以可得 $D(1, -1)$, 而 E 是 BC 中点, 所以 $E(1, -2)$, 所以, $\vec{AE} = (6, -1)$, $\vec{AD} = (6, 0)$, $\cos \angle DAE = \frac{\vec{AD} \cdot \vec{AE}}{|\vec{AD}| \cdot |\vec{AE}|} = \frac{36}{6 \cdot \sqrt{37}} = \frac{6\sqrt{37}}{37}$.

9. A 画出不等式组表示的平面区域(如图), 可知当 $m = 1, n = 2$ 时, 两根之和 $t = 3m + 2n$ 取最大值 7, 当 $m = 0, n = -2$ 时, 两根之和 $t = 3m + 2n$ 取最小值 -4.

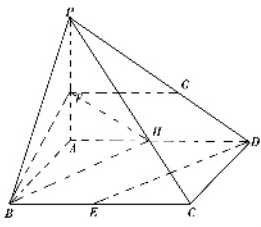
10. D 设椭圆另一焦点为 F_2 , 则根据椭圆定义可得 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, 设 PF_1 的中点为 M , 则 $OM \parallel PF_2$, 且 $|OM| = \frac{1}{2}|PF_2|$

即圆心距. 而由 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ 可得 $\frac{1}{2}|PF_2| = a - \frac{1}{2}|PF_1|$, 即两圆心距等于两圆半径之差, 故两圆内切.

评析 此题不仅考查椭圆的定义, 还考查了圆与圆的位置关系, 解决此类问题通常结合图形可以简化运算, 如果没有图形, $\frac{1}{2}|PF_2| = a - \frac{1}{2}|PF_1|$ 这一等式的含义就不能被容易发现.

11. A 若 $x_2 = 1$, 则 $x_1, x_3, x_4, \dots, x_{10}$ 中有一个为 1, 其余为 0, 这种情况有 $C_9^1 = 9$ 种解. 若 $x_2 = 0$, 则 $x_1, x_3, x_4, \dots, x_{10}$ 中可以有一个为 3, 其余为 0, 也可以有一个为 2, 一个为 1, 其余为 0, 还可以有三个为 1, 其余为 0, 这些情况有 $C_9^1 + A_9^2 + C_9^3 = 165$ 种解, 所以, 原方程共有 $165 + 9 = 174$ 个非负整数解.

12. C 如图, 取 AD 中点 H , 连结 BH , 则 $BH \parallel ED$, 所以, $\angle FBH$ 即为异面直线 DE 与 BF 所成的角, 所以, $\cos \angle FBH = \frac{4}{5}$, 设 $FA = x$, 又 $BH = \sqrt{5}$, 则 $BF = \sqrt{x^2 + 4}$, $FH = \sqrt{x^2 + 1}$, 由余弦定理可得 $\cos \angle FBH =$



$$\frac{BF^2 + BH^2 - FH^2}{2BF \cdot BH} = \frac{4}{5}, \text{ 即 } \frac{x^2 + 4 + 5 - x^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + 4} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = 1,$$

所以 F 为 PA 的中点, 又 $FG \parallel AD$, 所以 G 为 PD 中点, 且 $PD = 2\sqrt{2}$, 故 $PG = \sqrt{2}$.

13. 280 $(2\sqrt{x} - 2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{x}})^4 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^8$, 则展开后, 第 $r+1$ 项为: $T_{r+1} = C_8^r (\sqrt{2} \cdot \sqrt{x})^{8-r} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{x}})^r = C_8^r \cdot (-1)^r \cdot 2^{4-\frac{r}{2}} \cdot x^{\frac{4-r}{2}}$, 由 $\frac{4-r}{2} = 0$ 可得 $r=4$, 所以, 常数项为: $C_8^4 \cdot 2^2 = 280$.

14. ②③④ 本题主要考查对立体几何图形和基本知识的理解, 可以通过画图分别进行判断.

15. (理) $\lg 2 - 6$ 由函数连续的概念可知, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -f(x)$, 即 $\lg 2 + 2 = 8 + a + b$, 所以, $a + b = \lg 2 - 6$.

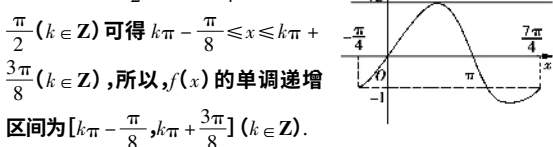
(文) $0 < a \leq \frac{1}{3}$ 由 $|x-1| < a$ 得 $1-a < x < 1+a$, 记集合 $A = \{x | 1-a < x < 1+a\}$, 由 $|f(x) - 6| < 3$ 得 $|3x+1-6| < 3$, 即 $\frac{2}{3} < x < \frac{8}{3}$, 记 $B = \{x | \frac{2}{3} < x < \frac{8}{3}\}$, 由条件可知, $A \subseteq B$, 所以,

$$\begin{cases} 1-a \geq \frac{2}{3} \\ 1+a \leq \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow 0 < a \leq \frac{1}{3}.$$

16. $\frac{4}{5}$ 根据面积公式有 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$, 又 $S = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}(b-c)^2$ 可得 $\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}(b-c)^2$, 即 $bc \sin A = a^2 - (b-c)^2 = 2bc - (b^2 + c^2 - a^2) = 2bc - 2bc \cos A$, 即 $\frac{1}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}$, 则即 $\cos A = 1 - \frac{1}{2} \sin A$ 代入 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 可得 $\frac{5}{4} \sin^2 A - \sin A = 0$, 又 $\sin A \neq 0$, 所以 $\sin A = \frac{4}{5}$.

17. (1) 由条件可得 $a \cdot b = \sin x \cos x - \cos^2 x$, $|a| = 1$, $f(x) = 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x + 1 = \sin 2x - (\cos 2x + 1) + 1 = \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$.

(2) 由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 可得 $k\pi - \frac{\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{3\pi}{8} (k \in \mathbb{Z})$, 所以, $f(x)$ 的单调递增



区间为 $[k\pi - \frac{\pi}{8}, k\pi + \frac{3\pi}{8}] (k \in \mathbb{Z})$.

同理可得 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[k\pi + \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{7\pi}{8}] (k \in \mathbb{Z})$.

(3) 令 $2x - \frac{\pi}{4} = \theta$, 由于 $x \in [0, \pi]$, 所以, $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$,

在同一坐标系下, 画出函数 $y = \sqrt{2} \sin \theta$ 与 $y = m$ 的图象, 如图, 根据图象可知 $m \in [-1, \sqrt{2}]$,

由于 θ 和 x 存在一一对应关系, 所以, $x \in [0, \pi]$ 时, $m \in [-1, \sqrt{2}]$.

评析 本题对函数 $f(x)$ 的化简至关重要, 如果 $f(x)$ 化简错误就会导致本题“全盘皆输”, 因此化简时必须慎重, 在画函数图象时, 也可以不用代换, 令 $2x - \frac{\pi}{4} = \theta$ 使图象更加简单, 关系更加明晰.

18. (1) 由于气温高低对种子发芽的影响很大, 所以, 应从不同日平均气温中进行抽样, 采用分层抽样的方式. 抽取比例为 $\frac{18}{360} = \frac{1}{20}$, 故每种气温分别抽取的天数分别为 $40 \times \frac{1}{20} = 2$, $40 \times \frac{1}{20} = 2$, $80 \times \frac{1}{20} = 4$, $120 \times \frac{1}{20} = 6$, $80 \times \frac{1}{20} = 4$. 即日平均气温为 -2°C 的抽取 2 天, 日平均气温为 5°C 的抽取 2 天, 日平均气温为 15°C 的抽取 4 天, 日平均气温为 20°C 的抽取 6 天, 日平均气温为 32°C 的抽取 4 天.

(2) (理) 日平均气温为 -2°C 、 5°C 、 15°C 、 20°C 、 32°C 的天数

在这 360 天中所占的比例分别为 $\frac{1}{9}$ 、 $\frac{1}{9}$ 、 $\frac{2}{9}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{2}{9}$,

故 1 000 粒种子发芽数的期望值为 $(\frac{1}{9} \times 0.1 + \frac{1}{9} \times 0.17 +$

$$\frac{2}{9} \times 0.2 + \frac{1}{3} \times 0.8 + \frac{2}{9} \times 0.4) \times 1\,000 = 430 \text{ (粒)},$$

即种子发芽数的期望为 430 粒.

(文) 日平均气温为 5°C 到 20°C 的天数在这 360 天中所占比例为 $\frac{40+80+120}{360} = \frac{2}{3}$, 那么, 在这 360 天中任选一天, 种下 1

粒种子的平均发芽的概率为 $\frac{2}{3} \times 90\% = 0.6$.

则种下 5 粒种子, 恰好有 3 粒发芽的概率为 $C_5^3 \cdot 0.6^3 \cdot (1 - 0.6)^2 = 0.3456$.

评析 本题是对概率与统计基础知识的考查, 要正确理解相关定义, 在实际运算时, 一定要看清楚数据的对应值.

19. (理) (1) 因为 $f(x) = a \ln(x+1) + (x+1)^2$, 所以, $f'(x) = \frac{a}{x+1}$

$$+ 2x + 2, f'(1) = 0 \text{ 可得 } \frac{a}{2} + 2 + 2 = 0, \text{ 所以, } a = -8.$$

$$(2) f(x) = -8 \ln(x+1) + (x+1)^2, f'(x) = \frac{-8}{x+1} + 2(x+1),$$

由 $f'(x) > 0$ 可得 $\frac{(x-1)(x+3)}{x+1} > 0$ 即 $-3 < x < -1$, 或 $x > 1$,

而函数的定义域为 $(-1, +\infty)$.

所以, $f(x)$ 的单调情况如下表:

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	递减	极小值	递增

由表可知, 当 $x=1$ 时, $f(x)$ 的极小值为 $f(1) = -8 \ln 2 + 4$.

$$(3) g'(x) = \frac{8}{(x+1)^2} + 2, \text{ 当 } x=1 \text{ 时, } g'(1) = 4, g(1) = 0.$$

所以, 切线斜率为 4, 切点为 $(1, 0)$,

所以, 切线方程为 $y = 4(x-1)$ 即 $4x - y - 4 = 0$,

令 $x=0$ 得 $y = -4$, 令 $y=0$ 得 $x=1$,

所以, $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2$.

(文) (1) $f'(x) = 9x^2 - 8x - 1$, 由 $f'(x) = 0$ 可得 $9x^2 - 8x - 1 = 0$, 解之得 $x = -\frac{1}{9}$, 或 $x = 1$.

$f(x)$ 的单调性如下表所示:

x	$(-\infty, -\frac{1}{9})$	$-\frac{1}{9}$	$(-\frac{1}{9}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增	极大值	递减	极小值	递增

所以, 当 $x=1$ 时, 函数有极小值, 由 $f(1) = 3 - 4 - 1 + a = 2$, 所以, $a = 4$.

(2) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - x + 4$, $a = 4$, 则由 $P(b, 4)$ 在函数上可得, $3b^3 - 4b^2 - b + 4 = 4$, 即 $3b^3 - 4b^2 - b = 0$, 所以, $b = 0$, 或 $b = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$,

当 $b=0$ 时, $P(0, 4)$, $f'(0) = -1$, 切线方程为 $y = -x + 4$, 即 $x + y - 4 = 0$;

当 $b = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$ 时, $f'(\frac{2+\sqrt{7}}{3}) = \frac{4\sqrt{7}+14}{3}$, $P(\frac{2+\sqrt{7}}{3}, 4)$, 切线方程为 $y - 4 = \frac{4\sqrt{7}+14}{3}(x - \frac{2+\sqrt{7}}{3})$;

当 $b = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$ 时, $f'(\frac{2-\sqrt{7}}{3}) = \frac{14-4\sqrt{7}}{3}$, $P(\frac{2-\sqrt{7}}{3}, 4)$, 切线方程为 $y - 4 = \frac{14-4\sqrt{7}}{3}(x - \frac{2-\sqrt{7}}{3})$;

所以, 所求的切线方程为 $x + y - 4 = 0$ 或 $y - 4 = \frac{4\sqrt{7}+14}{3}(x - \frac{2+\sqrt{7}}{3})$ 或 $y - 4 = \frac{14-4\sqrt{7}}{3}(x - \frac{2-\sqrt{7}}{3})$.

评析 导数部分也是这几年高考中必考的内容之一, 主要体现其在切线斜率和求极值与最值的应用, 要注意常用导数公式的

记忆.

20. (1) 由球及长方体的性质可知, 长方体的对角线长等于球的直径, 而长方体对角的平方等于长、宽、高的平方和, 所以, 有 $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, 故填 $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ (不写过程直接填写答案即可).

(2) (只理科做) 设 M, N 分别是 AD, BC 中点, 连结 OM, ON , 易知平面 AOD 与平面 BOC 的交线与 BC 平行, 则 $\angle MON$ 即为平面 AOD 与平面 BOC 所成角的平面角, 设为 α , 过 O 作 $OG \perp MN$ 与 G , 则 G 为线段 MN 的中点, 且 $OM = ON$, 则 $\angle NOG = \frac{\alpha}{2}$,

在 $\text{Rt} \triangle OGN$ 中, $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{GN}{OG} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{c}{2}} = \frac{a}{c}$, 所以, $\tan \alpha =$

$$\frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{2a}{c}}{1 - \frac{a^2}{c^2}} = \frac{4}{3},$$

化简整理可得, $2a^2 + 3ac - 2c^2 = 0$, 又 $a > 0, c > 0$, 所以, $c = 2a$, 又 $a = b$, 所以, $a = b = \frac{1}{2}c$, 代入 $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ 可得 $\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}c^2 + c^2 = 9$, 所以, $c = \sqrt{6}$, 所以, $a = b = \frac{\sqrt{6}}{2}, c = \sqrt{6}$.

(3) 由三棱锥的性质可知, $V_{C-DEF} = V_{D-CEF}$, 而 $DC \perp$ 平面 CEF , 且 $S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2}S_{\triangle BCF} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times b \times \frac{c}{2} = \frac{1}{8}bc$,

所以, $V_{C-DEF} = V_{D-CEF} = \frac{1}{3} \times a \times \frac{1}{8}bc = \frac{1}{24}abc$,

而由 $a = 1$ 可得 $1 + b^2 + c^2 = 9$, 即 $b^2 + c^2 = 8$,

所以, $V_{C-DEF} = \frac{1}{24}bc \leq \frac{b^2 + c^2}{48} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$,

当且仅当 $b = c$ 时取等号, 此时, $2b^2 = 8$,

所以, 当 $a = 1, b = c = 2$ 时, 三棱锥 $C-DEF$ 体积的最大值为 $\frac{1}{6}$.

评析 把三角函数的运算融入到一些几何中考查也是高考命题的一个方向, 注意公式的记忆, 而应用不等式求最值一定要说明等号成立的条件

21. (1) 由 $\sqrt{S_n}$ 是 a_n 与实数 b 的等差中项可得 $2\sqrt{S_n} = a_n + b$, 即 $S_n = \frac{1}{4}(a_n + b)^2$,

令 $n = 1$ 可得, $S_1 = a_1 = \frac{1}{4}(a_1 + b)^2$, 把 $a_1 = 1$ 代入可得 $1 = \frac{1}{4}(1 + b)^2 \Rightarrow b = -3$ 或 $b = 1$, 而 $b = -3$ 时, $2\sqrt{S_1} = a_1 + b$ 即为 $2 = 1 - 3$ 显然不成立, 所以舍去, 故 $b = 1$,

对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{4}(a_n + 1)^2$,

令 $n = 2$ 可得 $S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{4}(a_2 + 1)^2$, 把 $a_1 = 1$ 代入可得 $a_2 = 3$ ($a_2 = -1$ 舍去),

令 $n = 3$ 可得 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{4}(a_3 + 1)^2$, 把 $a_1 = 1, a_2 = 3$ 代入可得 $a_3 = 5$ ($a_3 = -3$ 舍去), 综上所述, $b = 1, a_2 = 3, a_3 = 5$.

(2) 由 $S_n = \frac{1}{4}(a_n + 1)^2$ ①,

可得 $S_{n+1} = \frac{1}{4}(a_{n+1} + 1)^2$ ②,

由 ② - ① 可得, $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \frac{1}{4}(a_{n+1} + 1)^2 - \frac{1}{4}(a_n + 1)^2 \Rightarrow (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 2) = 0$, 由条件可知, $a_{n+1} + a_n > 0$, 所以, $a_{n+1} - a_n - 2 = 0$, 即 $a_{n+1} - a_n = 2$, 即数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 又 $a_1 = 1$, 所以, 通项公式 $a_n = 2n - 1$.

(3) (只理科做) $b_n = \frac{8}{(2n-1)(2n+3)} = 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3}\right)$,

$T_n = 2\left[\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+1}\right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3}\right)\right]$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{8}{3} - 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3}\right).$$

所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{8}{3} - 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3}\right)\right] = \frac{8}{3}$.

评析 数列的前 n 项和与第 n 项之间关系的转化主要根据公式 $a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$, 而裂项相消也是一种最基本的方法, 对于比较复杂的题目可以多写几项进行观察.

22. (1) 令直线方程 $4x - 3y + 20 = 0$ 中的 $y = 0$, 可得 $x = -5$, 所以, 双曲线 C 的一个焦点坐标为 $(-5, 0)$, 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), 而过双曲线的一个焦点且与双曲线有且

只有一个焦点的直线是与双曲线渐近线平行的直线, 所以, $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$.

又根据条件知, $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$, 所以, $a = 3, b = 4$, 双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

(2) 根据图形可知, 直线 l 的斜率存在且不为 0, 故设 l 的方程为 $y = k(x + 5)$ ($k \neq 0$),

则直线 PF_2 的方程为 $y = -\frac{1}{k}(x - 5)$, 由 $\begin{cases} y = -\frac{1}{k}(x - 5) \\ y = k(x + 5) \end{cases}$ 解

得 $\begin{cases} x = \frac{5 - 5k^2}{k^2 + 1} \\ y = \frac{10k}{k^2 + 1} \end{cases}$, 即 P 点坐标为 $\left(\frac{5 - 5k^2}{k^2 + 1}, \frac{10k}{k^2 + 1}\right)$,

所以, $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}|F_1F_2| \cdot \left|\frac{10k}{k^2 + 1}\right| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \left|\frac{10k}{k^2 + 1}\right| = \frac{50|k|}{k^2 + 1} = \frac{50}{|k| + \frac{1}{|k|}} \leq \frac{50}{2} = 25$.

当且仅当 $|k| = \frac{1}{|k|}$, 即 $k = -1$ 或 $k = 1$ 时取等号, 此时直线 l 不平行于双曲线的渐近线, 与双曲线一定有两个交点.

故 $\triangle PF_1F_2$ 的面积的最大值为 25.

(3) (理) 当直线 l 的斜率存在时, 设方程为 $y = k(x + 5)$, 代入双曲线的方程可得 $\frac{x^2}{9} - \frac{k^2(x + 5)^2}{16} = 1$, 整理可得 $(16 - 9k^2)x^2 - 90k^2x - 225k^2 - 144 = 0$, 且由直线和双曲线有两个交点可知, $16 - 9k^2 \neq 0$, 即 $k \neq \pm \frac{4}{3}$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{90k^2}{16 - 9k^2}$,

而双曲线的离心率为 $\frac{c}{a} = \frac{5}{3}$, 根据双曲线的第二定义可得

$$|AB| = |AF_1| + |BF_1| = \frac{5}{3} \left[\left(-x_1 - \frac{a^2}{c}\right) + \left(-x_2 - \frac{a^2}{c}\right) \right] = -\frac{5}{3}(x_1 + x_2) - \frac{5}{3} \cdot \frac{2a^2}{c} = -6 - \frac{5}{3}(x_1 + x_2),$$

由双曲线的定义 $|AF_2| - |AF_1| = 6, |BF_2| - |BF_1| = 6$, 相加可得 $|AF_2| - |AF_1| + |BF_2| - |BF_1| = 12$, 即 $|AF_2| + |BF_2| - |AB| = 12$, 所以, $\triangle ABF_2$ 的周长是 $L = |AF_2| + |BF_2| + |AB| = 12 + 2|AB| = 12 + 2 \cdot \left[-6 - \frac{5}{3}(x_1 + x_2)\right] = -\frac{10}{3}(x_1 + x_2) = -\frac{10}{3} \cdot \frac{90k^2}{16 - 9k^2} = \frac{300}{9 - \frac{16}{k^2}}$, 此时, 显然 L 没有最小值, 而当直线 l 的斜率

不存在时, 就相当于斜率 $k \rightarrow \infty$ 时, 此时, $\frac{300}{9 - \frac{16}{k^2}}$ 随 k^2 增大而减小, 且当 $k^2 \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{300}{9 - \frac{16}{k^2}} \rightarrow \frac{100}{3}$,

所以, $\triangle ABF_2$ 有最小值 $\frac{100}{3}$, 此时, 直线 l 的斜率不存在.

(文) 当 l 的斜率为 1 时, 直线 l 的方程为 $y = x + 5$ 代入双曲线方程可得 $\frac{x^2}{9} - \frac{(x+5)^2}{16} = 1$,

整理得 $7x^2 - 90x - 369 = 0$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{90}{7}, x_1 \cdot x_2 = -\frac{369}{7}$, 所以, $|AB| = \sqrt{2} |x_1 - x_2| = \sqrt{2} \cdot$

$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(\frac{90}{7})^2 + 4 \cdot \frac{369}{7}} = \frac{192}{7}$,

而根据双曲线的定义可得 $|AF_2| - |AF_1| = 6, |BF_2| - |BF_1| = 6$,

两式相加可得 $|AF_2| - |AF_1| + |BF_2| - |BF_1| = 12$ 即 $|AF_2| + |BF_2| - |AB| = 12$,

所以, $\triangle ABF_2$ 的周长是 $|AF_2| + |BF_2| + |AB| = 12 + 2|AB| = 12 + \frac{192}{7} = \frac{276}{7}$.

评析 直线和圆锥曲线的关系是每年高考必考的内容, 并且多以压轴题的形式出现, 一般要联立方程, 结合韦达定理来解决, 解这类题目的方法一般很容易想到, 运算量大是这类题目的一个特点, 所以, 做这类题目首先要有足够的信心, 要坚持下去, 不能半途而废, 还要注意过程的完整性, 在平时都要加强训练.

2006 年全国百校联盟高考《考试大纲》调研卷(三)

考纲分析与考向预测 2006 年数学考试大纲对文理科做了相应改动和调整, 其中三角函数部分变“了解”为“理解”, 重心转移到对三角函数图象和性质的考查, 变“理解椭圆的参数方程”为“了解椭圆的参数方程”, 试卷中体现的有第 10 题, 极限部分变“理解闭区间上连续函数有最大值和最小值的性质”为“了解”, 另外文科“理解椭圆的参数方程”改为“了解椭圆的参数方程”. 但所有这些变化都没有根本的变化, 所以这些知识还是需要理解掌握并能灵活运用.

相关事宜	难度系数	平均分	最高分	130 分以上人数百分比	120 ~ 130 分人数百分比	110 ~ 120 分人数百分比	100 ~ 110 分人数百分比
测试学校 长沙一中	0.55	106	148	12%	8.1%	9.2%	14.9%

测试评价与备考策略 本套试卷难度与 2005 年全国卷相比略有偏高, 但由上表显示, 试卷的区分度较为理想, 试题的测试效果尤为明显, 这反映了测试班级学生的总体水平较好, 达到了预期的测试效果. 本次测试反映了考生第一轮复习效果已较为显著, 考生的基础知识较为扎实, 但也暴露了若干问题: ①见到新颖题型由于没有积极思考, 而轻易放弃, 丢分可惜; ②解题中的计算应细心准确, 很多考生平时做题依赖于计算器, 考试时计算能力很低, 建议考生应在平时加强对做创新题型的训练, 做到遇新而不慌, 迎难而不乱; 再者平时训练要细心, 杜绝出现计算性错误.

1. B $\sin(x+30^\circ) + \cos(x+60^\circ) = \sin x \cos 30^\circ + \cos x \sin 30^\circ + \cos x \cos 60^\circ - \sin x \sin 60^\circ = \cos x$.

2. (理) D 由导数的定义可知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \sin x - 2 \sin 2}{x - 2} =$

$(x \sin x)' \big|_{x=2} = (\sin x + x \cos x) \big|_{x=2} = \sin 2 + 2 \cos 2$.

(文) C 因为函数 $f(x) = a^2 \sin 2x + (a-2) \cos 2x$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{8}$ 对称, 所以有关系 $f(0) = f(-\frac{\pi}{4})$. 于是得 $a-2$

$= -a^2$, 解出 $a = -2$ 或 $a = 1$.

评析 要求出实数 a 的值, 就要想办法建立关于实数 a 的方程, 这就需要找出一个数量化的等式. 方程观点是解决数学问题的通性通法, 没有方程就要建立方程, 有了方程就要解该方程.

3. A $\because A = \{y | y = 2^x - 1, x \in \mathbb{R}\} = (-1, +\infty)$, 而 $f'(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$, $\therefore f(x)$ 的极小值为 $f(-1) = -2$ 和 $f(2) = \frac{8}{5}$, $\therefore B = \{-2, \frac{8}{5}\}$, 由题意, A

$-B = (-1, \frac{8}{5}) \cup (\frac{8}{5}, +\infty)$, $B-A = \{-2\}$, $\therefore A \oplus B =$

$\{-2\} \cup (-1, \frac{8}{5}) \cup (\frac{8}{5}, +\infty)$.

4. (理) A $\because \frac{4-3ai}{3+ai} = \frac{(4-3ai)(3-ai)}{(3+ai)(3-ai)} = \frac{12-3a^2-(4a+9a)i}{9+a^2}$ 为纯虚数, $\therefore 12-3a^2=0 (a \neq 0)$, 即 $a = \pm$

2. 若 $a = 2$, 则 $(\frac{2+ai}{2-ai})^{2006} = (\frac{2+2i}{2-2i})^{2006} = [\frac{(1+i)^2}{2}]^{2006} =$

$(i)^{2006} = -1$; 若 $a = -2$, 则 $(\frac{2+ai}{2-ai})^{2006} = (\frac{2-2i}{2+2i})^{2006} = (-i)^{2006} = -1$.

(文) B 由题意可得 $\begin{cases} \omega > 0 \\ \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{|\omega|} \geq 1 - \frac{\pi}{3} \end{cases}$, 即 $0 < \omega \leq \frac{3}{2}$, 故选 B.

5. B $\because f'(x) = a(x^2 + x - 2) = a(x+2)(x-1)$, $\therefore f(x)$ 的极大值和极小值在 $f(-2)$ 和 $f(1)$ 中取得, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象经过四个象限的充要条件是 $f(-2) \cdot f(1) = (\frac{16}{3}a+1)(\frac{5}{6}a+1) < 0$, 即 $-\frac{6}{5} < a < -\frac{3}{16}$, 故选 B.

6. C 星期六做综合模拟试卷, 而星期一和星期四不做数学模拟试卷, $\therefore$ 数学模拟试卷只能在星期二、三、五、日做, 有 C_4^1 种做法, 于是语文和外语只能在剩下的五天中选两天来做, 有 A_5^2 种做法, 故共有 $C_4^1 A_5^2 = 80$ 种不同的做法.

7. C $\because \vec{OP} = \vec{AP} - \vec{AO}, \vec{OP} = \vec{BP} - \vec{BO}, \vec{OP} = \vec{CP} - \vec{CO}, \vec{OP} = \vec{DP} - \vec{DO}, \vec{OP} = \vec{EP} - \vec{EO}, \vec{OP} = \vec{FP} - \vec{FO}$, 又 $\vec{AO} = -\vec{DO}, \vec{BO} = -\vec{EO}$,

$\vec{CO} = -\vec{FO}$, $\therefore 6\vec{OP} = \vec{AP} + \vec{BP} + \vec{CP} + \vec{DP} + \vec{EP} + \vec{FP}$.

8. A $m-n = (1+\sin A)(1+\sin B) - (1+\cos A)(1+\cos B) = \sin A + \sin B - \cos A - \cos B = \sin A + \sin B - \cos(A+B) = \sin A + \sin B - \cos A - \cos B$

$+ \cos C$, 又 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, $\therefore A+B > \frac{\pi}{2}$, 即 $\frac{\pi}{2} > A > \frac{\pi}{2} - B > 0$, $\therefore \sin A > \sin(\frac{\pi}{2} - B) = \cos B$, 同理 $\sin B > \cos A$, $\therefore m$

$-n > 0$, 即 $m > n$, 故选 A.

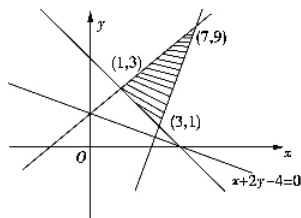
9. A 作出可行域, $\therefore$ 目标函数 $z = 1x + 2y - 4 = \sqrt{5}$

$\cdot \frac{|x+2y-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}$, $\therefore z$ 即

为可行域内的点到直线 $x+2y-4=0$ 的距离的 $\sqrt{5}$ 倍. 故由图可得

$z_{\max} = \sqrt{5} \cdot \frac{|7+2 \times 9 - 4|}{\sqrt{5}}$

$= 21$.



10. B 将参数方程 $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \cos \theta \\ y = 2 + \sqrt{2} \sin \theta \end{cases}$ 化成普通方程为 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$, $\therefore$ 曲线 C 是以 $M(2,2)$ 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆, 如图所示, $|OM| =$

$2\sqrt{2}$, $\angle MOA = \frac{\pi}{6}$, $|OA| = 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{6}$, $\angle AMB = \frac{2\pi}{3}$, $\therefore S_{OAMB} = 2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$,

$S_{\text{扇形}AMB} = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, 故所求的面积为 S_{OAMB}

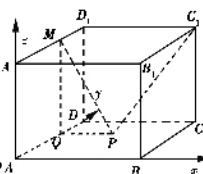
$- S_{\text{扇形}AMB} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$.

11. C 设 P 是平面 $ABCD$ 上任意的一点, 正方体的棱长为 1, 以 A 为原点建立空间直角坐标系, 如图所示, 设 $P(x,y,0)$, 则 $C_1(1,1,1)$, 过 P 作 $PQ \perp AD$ 于 Q , 过 Q 作 $QM \perp A_1D_1$ 于 M , 连 PM , 则 $PM \perp A_1D_1$,

$\therefore |PC_1| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + 1}$, $|PM| = \sqrt{x^2 + 1}$. 由题意有,

$|PC_1| = \sqrt{2}|PM|$, 即

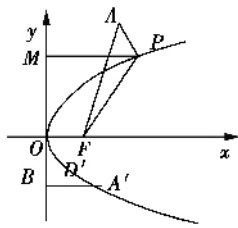
$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + 1} = \sqrt{2} \sqrt{x^2 + 1}$, 化简得 $(x+1)^2 - (y-1)^2 = 1$, 故 P 点的轨迹



- 是双曲线.
12. D 用 $-x$ 代替方程中的 x , 方程不变, $\therefore$ 曲线 C 关于 y 轴对称. 同理, 曲线 C 关于 x 轴对称. 又用 $-x, -y$ 分别代替方程中的 x, y , 方程不变, $\therefore$ 曲线 C 关于原点对称. 在第一象限内, 由 $\frac{x}{x^3} + \frac{y}{y^3} = 1$ 可知 $y = (1 - \frac{x}{x^3})^{\frac{3}{2}}$, 而 $1 - (1 - \frac{x}{x^3})^{\frac{3}{2}} \geq 0$, $\therefore y = (1 - \frac{x}{x^3})^{\frac{3}{2}} \leq 1, x \leq 1$, $\therefore$ 曲线 C 所围成的图形面积小于 2. 令 $f(x) = (1 - \frac{x}{x^3})^{\frac{3}{2}} (x > 0)$, 则 $f'(x) = (1 - \frac{x}{x^3})^{\frac{1}{2}} (-\frac{1}{x^2}) < 0$, $\therefore$ 曲线 C 在第一象限上的所有点的切线斜率均为负数, 由曲线 C 的对称性可知, 曲线 C 在第三象限上的所有点的切线斜率也均为负数. 设 $P(x, y)$ 为曲线 C 在第一象限上的任意一点, 则 $|OP| = [x^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} = [x^2 + (1 - \frac{x}{x^3})^3]^{\frac{1}{2}} = [3x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 1]^{\frac{1}{2}} = [3(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}]^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}$, 等号当且仅当 $\frac{1}{x^3} = \frac{1}{2}$ 时成立, $\therefore$ 曲线 C 上的点到原点的距离的最小值为 $\frac{1}{2}$.
13. 81 由 $C_{20}^{n+6} = C_{20}^{n+2}$ 可得 $2n+6 = n+2$ 或 $(2n+6) + (n+2) = 20$, 即 $n = -4$ 或 $n = 4$, $\therefore n = 4$. 由赋值法可得所求式为 $[2 - (-1)]^4 = 3^4 = 81$.

14. 当 $|a| \leq 4$ 时为 4; 当 $|a| > 4$ 时为

$\sqrt{9+a^2}-1$ 如图所示, 当 A 点在抛物线的内部 (或抛物线上), 即 $|a| \leq 4$ 时, 则 $|PA| + |PM|$ 的最小值为 4; 当 A 点在抛物线的外部, 即 $|a| > 4$ 时, 由抛物线的定义可知 $|PA| + |PM| = |PA| + |PF| - 1 \geq |AF| - 1 = \sqrt{9+a^2}-1$.



15. $(3 \cdot 009, 8[(\frac{1}{4})^{1003} - 1])$ 由题意

有, 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_1 = 1, a_5 = 13 = a_1 + 4d$, $\therefore d = 3$, $\therefore a_n = 1 + 3(n-1) = 3n-2$. 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 且 $b_2 = 6, b_3 = 3 = b_2 \cdot q$, $\therefore q = \frac{1}{2}$, $\therefore b_n = b_2 q^{n-2} = 6(\frac{1}{2})^{n-2} = 3(\frac{1}{2})^{n-3}$. $\therefore \overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}} = (a_{2k} - a_{2k-1}, b_{2k} - b_{2k-1}) = (3, -3(\frac{1}{2})^{2k-3})$, $\therefore \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_3P_4} + \dots + \overrightarrow{P_{2005}P_{2006}} = (3 \times 1003, -8[1 - (\frac{1}{4})^{1003}]) = (3 \cdot 009, 8[(\frac{1}{4})^{1003} - 1])$.

16. 若①③⑥, 则⑦; 若③⑥⑧, 则②等, $a \parallel b, a \parallel \alpha, b \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$; $a \parallel \alpha, b \perp \beta, \alpha \parallel \beta \Rightarrow a \perp b$; $a \parallel \beta, a \parallel b, a \perp \alpha \Rightarrow b \perp \alpha$ 等等.
17. (1) 由题意知, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\pi - B) = 6$,

$$\therefore |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = -\frac{6}{\cos B},$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \sin B = -\frac{3 \sin B}{\cos B} = -3 \tan B.$$

$$\text{又 } \sqrt{3} \leq S \leq 3, \therefore \sqrt{3} \leq -3 \tan B \leq 3, \text{ 即 } -1 \leq \tan B \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{而 } B \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的内角}, \therefore 0 < B < \pi, \therefore \frac{3\pi}{4} \leq B \leq \frac{5\pi}{6}, \therefore \frac{7\pi}{4} \leq 2B + \frac{\pi}{4} \leq \frac{23\pi}{12}.$$

$$\text{又 } f(B) = \sin^2 B + 2 \sin B \cos B + 3 \cos^2 B = \frac{1}{2} (1 - \cos 2B) + \sin 2B + \frac{3}{2} (1 + \cos 2B) = \sin 2B + \cos 2B + 2 = \sqrt{2} \sin(2B + \frac{\pi}{4}) + 2 \in [1, \frac{5-\sqrt{3}}{2}].$$

故所求的值域为 $[1, \frac{5-\sqrt{3}}{2}]$.

(2) $\therefore p \cdot q = (\sin A, \cos A) \cdot (\cos C, \sin C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \sin(A+C) = \sin B, |p| = |q| = 1$, $\therefore |2p - 3q|^2 = 4p^2 - 12p \cdot q + 9q^2 = 13 - 12 \sin B \in [7, 13 - 6\sqrt{2}]$. 故所求的取值范围为 $[7, 13 - 6\sqrt{2}]$.

评析 本题在平面向量和三角函数的交汇处命题, 体现了考试大纲的命题原则.

18. (理) 若 A 研究所独立地研究疫苗, 则其经济效益的期望为 $0 \times \frac{2}{3} + a \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} a$ (万元). 而两个研究所独立地研究时至少有一个研制成功的概率为 $1 - (1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$, $\therefore$ 两个研究所合作研制成功的概率为 $\frac{1}{2} \times (1 + 50\%) = \frac{3}{4}$.

于是若 A 研究所采用与 B 研究所合作的方式来研究疫苗所获得的经济效益期望为

$$0 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} a \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8} a \text{ (万元)}.$$

而 $\frac{3}{8} a > \frac{1}{3} a$, 故应该建议 A 研究所采用合作的方式研究疫苗.

评析 本题取材于社会热点问题, 情景新颖, 难度不大, 体现了新课标的新理念.

(文) 记事件 A : 从第一个盒子中取得一个标有字母 A 的球, 事件 B : 从第一个盒子中取得一个标有字母 B 的球, 事件 C : 从第二个盒子中取得一个红球, 事件 D : 从第三个盒子中取得一个红球. 则试验成功的事件为 $A \cdot C + B \cdot D$,

$$\text{由 } P(A) = \frac{7}{10}, P(B) = \frac{3}{10}, P(C) = \frac{1}{2}, P(D) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \text{ 又 } A \cdot C \text{ 与 } B \cdot D \text{ 互斥, } A \text{ 与 } C \text{ 相互独立, } B \text{ 与 } D \text{ 也相互独立,} \\ \text{得 } P(A \cdot C + B \cdot D) = P(A \cdot C) + P(B \cdot D) = P(A)P(C) + P(B)P(D) = \frac{59}{100}.$$

答: 试验成功的概率为 $\frac{59}{100}$.

评析 本题综合考查了相互独立事件和互斥事件的概率, 适合文科考生.

19. (理) 以 A 点为原点建立空间直角坐标系 (如图所示), 则 $B(1, 0, 0), C(2, 2, 0), D(0, 2, 0), P(0, 0, 2), M(1, 1, 1)$.

$$(1) \because \cos \langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AD} \rangle = \frac{\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{BM}| |\overrightarrow{AD}|} = \frac{(0, 1, 1) \cdot (0, 2, 0)}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 故 } \overrightarrow{BM} \text{ 与 } \overrightarrow{AD} \text{ 所成的角为 } 45^\circ.$$

(2) 设平面 PBD 的一个法向量为 $n = (x, y, z)$, 则 $n \cdot \overrightarrow{BD} = (x, y, z) \cdot (-1, 2, 0) = -x + 2y = 0, \therefore x = 2y$. $n \cdot \overrightarrow{PD} = (x, y, z) \cdot (0, 2, -2) = 2y - 2z = 0, \therefore z = y$. 取 $y = 1$, 则 $n = (2, 1, 1)$, $\therefore \cos \langle \overrightarrow{BM}, n \rangle = \frac{\overrightarrow{BM} \cdot n}{|\overrightarrow{BM}| |n|} = \frac{(0, 1, 1) \cdot (2, 1, 1)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

设 $\overrightarrow{BM}$ 与平面 PBD 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = \cos \langle \overrightarrow{BM}, n \rangle = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即为所求.

$$(3) C \text{ 点到平面 } PBD \text{ 的距离 } d = \frac{|n \cdot \overrightarrow{BC}|}{|n|} = \frac{|(2, 1, 1) \cdot (1, 2, 0)|}{|(2, 1, 1)|} = \frac{2}{3} \sqrt{6}.$$

(4) (只理科做) 由于平面 PBD 的一个法向量为 $n = (2, 1, 1)$, 平面 BCD 的一个法向量为 $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 2)$, 而 $\cos \langle \overrightarrow{AP}, n \rangle = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot n}{|\overrightarrow{AP}| |n|} = \frac{(0, 0, 2) \cdot (2, 1, 1)}{2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

显然二面角 $C-BD-P$ 的平面角为钝角, 故所求角的余弦值为 $-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

评析 本题既可以用空间向量方法求解, 也可以用传统几何方法求解, 而用空间向量方法求解要简单一些.

20. (1) $\therefore f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, 由题意有, $f'(x_1) = f'(x_2)$, 即 $3x_1^2 + 2ax_1 + b = 3x_2^2 + 2ax_2 + b$, 即 $3(x_1^2 - x_2^2) + 2a(x_1 - x_2) = 0$, 即 $3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 2a(x_1 - x_2) = 0$, 而 $x_1 + x_2 = 0$ 且 $x_1 \neq x_2$, $\therefore a = 0$. 又当 $x = 1$ 时函数 $f(x)$ 取得极小值 1, $\therefore f'(1) = 0$ 且 $f(1) = 1$, 即 $f'(1) = 3 + b = 0$ 且 $f(1) = 1 + b + c = 1$, $\therefore b = -3$ 且 $c = 3$. 故 $a = 0, b = -3, c = 3$.

(2) 由(1)知 $g(x) = x^3 - 3x + 3 + 3x - 3 = x^3 (1 \leq x \leq 6)$,
 $\therefore g'(x) = 3x^2$, 切线 AB 的方程为 $y - t^3 = 3t^2(x - t)$,

$\therefore A(\frac{2}{3}t, 0), B(6, 18t^2 - 2t^3)$,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}(6 - \frac{2}{3}t)(18t^2 - 2t^3) = \frac{2}{3}(81t^2 - 18t^3 + t^4) = \frac{2}{3}t^2(9 - t)^2$.

$\therefore S' = \frac{2}{3}(2 \times 81t - 3 \times 18t^2 + 4 \times t^3) = \frac{4}{3}t(81 - 27t + 2t^2) = \frac{8}{3}t(t - 9)(t - \frac{9}{2})$,

$\therefore$ 当 $1 \leq t < \frac{9}{2}$ 时 $S' > 0$, 即 $S = \frac{2}{3}t^2(9 - t)^2$ 递增;

当 $\frac{9}{2} < t \leq 6$ 时 $S' < 0$, 即 $S = \frac{2}{3}t^2(9 - t)^2$ 递减.

$\therefore$ 当 $t = \frac{9}{2}$ 时 S 取得最大值 $\frac{2 \cdot 187}{8}$.

又当 $t = 1$ 时 $S = \frac{128}{3}$, 当 $t = 6$ 时 $S = 216$, 而 $\frac{128}{3} < 216$,

故 $\triangle ABC$ 的面积取值范围为 $[\frac{128}{3}, \frac{2 \cdot 187}{8}]$.

评析 本题在函数和导数交汇处命题, 具有较强的预测性, 而且设问的方式具有较大的开放度, 情景新颖.

21. (1) 由 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 + (\frac{b}{a})^2 = (\frac{\sqrt{13}}{2})^2$, 得 $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$.

$\therefore$ 两渐近线 OP_1, OP_2 的方程分别为 $y = \frac{3}{2}x$ 和 $y = -\frac{3}{2}x$.

设点 $P_1(x_1, \frac{3}{2}x_1)$ 、点 $P_2(x_2, -\frac{3}{2}x_2)$.

设 $\angle P_1OP_2 = 2\alpha$, 则 $\tan \alpha = \frac{3}{2}$, $\therefore \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{12}{13}$,

$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{5}{13}$.

又 $S_{\triangle OP_1P_2} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OP_1}| |\overrightarrow{OP_2}| \sin 2\alpha = \frac{6}{13}|\overrightarrow{OP_1}| |\overrightarrow{OP_2}| = \frac{27}{4}$,

$\therefore |\overrightarrow{OP_1}| |\overrightarrow{OP_2}| = \frac{117}{8}$.

$\therefore \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = |\overrightarrow{OP_1}| |\overrightarrow{OP_2}| \cos 2\alpha = \frac{117}{8} \times (-\frac{5}{13}) = -\frac{45}{8} =$

$x_1x_2 - \frac{9}{4}x_1x_2 = -\frac{5}{4}x_1x_2$, 即 $x_1x_2 = \frac{9}{2}$.

(2) 由点 P 为线段 P_1P_2 的一个三等分点可知, 点 P 分 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比 $\lambda = 2$,

$\therefore P$ 点坐标为 $(\frac{x_1 + 2x_2}{3}, \frac{x_1 - 2x_2}{2})$, 即 $(\frac{x_1 + 2x_2}{3}, \frac{x_1 - 2x_2}{2})$.

设 $P(x, y)$, 则 $x = \frac{x_1 + 2x_2}{3}$ 且 $y = \frac{x_1 - 2x_2}{2}$, 即 $x_1 + 2x_2 = 3x$ 且 $x_1 - 2x_2 = 2y$,

$\therefore (3x)^2 - (2y)^2 = (x_1 + 2x_2)^2 - (x_1 - 2x_2)^2 = 8x_1x_2 = 36$, 即

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

(3) (只理科做) 由(2)知 $c = \sqrt{13}$, $\therefore F_1(-\sqrt{13}, 0)$,

$F_2(\sqrt{13}, 0)$, $y_0^2 = \frac{9x_0^2}{4} - 9$,

$\therefore \overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = |\overrightarrow{MF_1}| |\overrightarrow{MF_2}| \cos \langle \overrightarrow{MF_1}, \overrightarrow{MF_2} \rangle = (-\sqrt{13} - x_0, -y_0) \cdot (\sqrt{13} - x_0, -y_0) = x_0^2 - 13 + y_0^2 = x_0^2 - 13 + \frac{9x_0^2}{4} -$

$9 = \frac{13x_0^2}{4} - 22 < 0$, 即 $|x_0| < \frac{2}{13}\sqrt{286}$.

又 $|x_0| > 2$, 故 x_0 的取值范围为 $(-\frac{2}{13}\sqrt{286}, -2) \cup (2, \frac{2}{13}\sqrt{286})$.

评析 本题有效的考查了解析几何的基本思想方法, 而且本题借助平面向量这一工具, 使问题的解决轻松得多.

22. (理) (1) 从数列角度来看, 语句(4) (即“ $x = x + 3$ ”)可以理解为 $x_{n+1} = x_n + 3$ (其中 $n \in \mathbb{N}^*$), 语句(6) (即“ $x = 4x$ ”)可以理解为 $x_{n+1} = 4x_n$ (其中 $n \in \mathbb{N}$), 而语句(2) ~ (4) 是一个小循环,

执行的程序是 $x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 3 & (n = 2k - 1) \\ 4x_n & (n = 2k) \end{cases} (k \in \mathbb{N})$. 同理语句

(2) ~ (9) 是一个大循环, 其终止条件为“ $n = 2007$ ”.

于是问题转化为: 在数列 $\{x_n\}$ 中, $x_1 = 4$, $x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 3 & (n = 2k - 1) \\ 4x_n & (n = 2k) \end{cases} (k \in \mathbb{N})$, 求 x_{2007} .

$\therefore x_{2n+2} = x_{2n+1} + 3 = 4x_{2n} + 3$, 即 $x_{2n+2} + 1 = 4x_{2n} + 4 = 4(x_{2n} + 1)$,

令 $a_n = x_{2n} + 1$, 则 $a_{n+1} = 4a_n$, $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $a_1 = x_2 + 1 = (x_1 + 3) + 1 = 8$, $\therefore a_n = 8 \times 4^{n-1} = 2 \times 4^n$.

故 $x_{2n} = 2 \times 4^n - 1$, $\therefore x_{2n-2} = 2 \times 4^{n-1} - 1$, $\therefore x_{2n-1} = 4x_{2n-2} = 4(2 \times 4^{n-1} - 1) = 2 \times 4^n - 4$.

故 $x_{2007} = x_{2 \times 1004 - 1} = 2 \times 4^{1004} - 4 = 2^{2009} - 4$, 即打印出来的 x 的值为 $2^{2009} - 4$.

(2) 由于经过语句(2) ~ (7) 的小循环后, n 为偶数才执行语句(7) (即“ $y = y + 2$ ”), 从数列角度来看, 它可以理解为 $y_{2n+1} = y_{2n-1} + 2$ (其中 $n \in \mathbb{N}^*$).

令 $b_n = y_{2n-1}$, 则 $b_{n+1} = b_n + 2$, 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且 $b_1 = y_1 = 2$, $\therefore b_n = 2 + 2(n-1) = 2n$.

$\therefore y_{2n-1} = 2n$.

此时语句(8) (即“ $z = z + \frac{y}{x+4}$ ”)执行的程序是 $z_{2n+1} = z_{2n-1} + \frac{y_{2n+1}}{x_{2n+1} + 4}$. 于是令 $c_n = \frac{y_{2n-1}}{x_{2n-1} + 4}$, 则 z_{2n-1} 为数列 $\{c_n\}$ 的前项

和, $\therefore z_{2n-1} = \frac{y_1}{x_1 + 4} + \frac{y_3}{x_3 + 4} + \frac{y_5}{x_5 + 4} + \cdots + \frac{y_{2n-1}}{x_{2n-1} + 4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \cdots + \frac{n}{4^n}$,

两边同乘以 $\frac{1}{4}$ 得: $\frac{1}{4}z_{2n-1} = \frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^3} + \frac{3}{4^4} + \cdots + \frac{n}{4^{n+1}}$,

两式相减得 $\frac{3}{4}z_{2n-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots + \frac{1}{4^n} - \frac{n}{4^{n+1}} =$

$\frac{\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{4^n})}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{n}{4^{n+1}} = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{4^n}) - \frac{n}{4^{n+1}}$,

$\therefore z_{2n-1} = \frac{4}{9}(1 - \frac{1}{4^n}) - \frac{n}{3 \cdot 4^n} = \frac{4}{9} - \frac{4 + 3n}{9 \cdot 4^n}$.

故 $z_{2007} = z_{2 \times 1004 - 1} = \frac{4}{9} - \frac{3 \cdot 016}{9 \cdot 4^{1004}}$, 即打印出来的 z 的值为 $\frac{4}{9} - \frac{3 \cdot 016}{9 \cdot 4^{1004}}$.

(3) 由于对于任意的自然数 n , 都有 $z_{2n-1} = \frac{4}{9} - \frac{3 \cdot 016}{9 \cdot 4^{1004}} < \frac{4}{9}$, 即不存在自然数 n , 使得 $z_{2n-1} \geq \frac{4}{9}$.

所以张三同学说的是对的.

评析 本题以程序框图作背景, 情景新颖, 而且体现了新课标的理念, 与新课标联系紧密, 是新课程教材向新课标教材过渡时期的优秀试题.

(文) (1) 因为点 (n, S_n) 都在曲线 $C: y = -x^2 - 3x$ 上, 所以 $S_n = -n^2 - 3n$. 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = -4$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = -n^2 - 3n + (n-1)^2 + 3(n-1) = -2n - 2$, $a_1 = -4$ 也适合 $a_n = -2n - 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = -2n - 2 (n \in \mathbb{N}^*)$.

(2) 由 $y = -x^2 - 3x$ 得 $y' = -2x - 3$, 曲线 C 在点 $x = -1$ 处的切线的斜率为 $k = -2 \times (-1) - 3 = -1$, 所以切线 l 的方程是 $y - 2 = -(x + 1)$, 即 $y = -x + 1$. 又因为点 $(n, \log_2 b_n) (n \in \mathbb{N}^*)$ 都在直线 l 上, 所以 $\log_2 b_n = -n + 1$, 得 $b_n = 2^{-n+1} = (\frac{1}{2})^{n-1}$, 故数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 所以其前 n 项和为 $T_n =$

$1 - (\frac{1}{2})^n$.

$\frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2[1 - (\frac{1}{2})^n]$.

(3) $c_n = -\frac{a_n b_n}{2} = (n+1)(\frac{1}{2})^{n-1}$, 所以 $V_n = 2 \times 1 + 3 \times \frac{1}{2} + 4 \times (\frac{1}{2})^2 + \cdots + (n+1)(\frac{1}{2})^{n-1}$, 于是 $\frac{1}{2}V_n = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times$

$(\frac{1}{2})^2 + 4 \times (\frac{1}{2})^3 + \cdots + n(\frac{1}{2})^{n-1} + (n+1)(\frac{1}{2})^n$, 两式相减得 $\frac{1}{2}V_n = 2 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \cdots + (\frac{1}{2})^{n-1} - (n+1)(\frac{1}{2})^n$, 整理得 $V_n = 6 - (n+3)(\frac{1}{2})^{n-1}$. 于是 $V_n + c_n = 6 - 2$

$(\frac{1}{2})^{n-1}$, 由于 $2 \times (\frac{1}{2})^{n-1} > 0$, 所以 $V_n + c_n = 6 - 2 \times (\frac{1}{2})^{n-1} < 6$.

评析 本题在数列和导数、解析几何的交汇点命题, 主要考查的是数列的基本思想方法, 并且难度适合文科考生.

2006 年全国百校联盟高考《考试大纲》调研卷(四)

考纲分析与考向预测 2006 年大纲将“正弦函数、余弦函数、正切函数的图象和性质”由“了解”提高到“理解”, 考生在复习中应相应作出调整, 要比较熟练地画出三角函数图象, 理解诸性质如对称中心、对称轴、周期、单调、最值(极值)的相互关系. 在大题中, 要注意“化简三角函数式, 再研究性质和图象”类题目. 同时, 函数的连续也由“了解”上升为“理解”, 这就要求考生在给出解析式的情况下, 要判定函数的连续性, 反之亦然. 参数方程对理科学生而言, 仅是“了解”层次, 只需基本会用, 不必盲目拔高. 文科生要求“理解圆的参数方程”, 要注意以下三点: 会将圆的参数方程变成普通方程; 会选择参数, 将圆的普通方程变成参数方程; 明白圆的参数方程中参数(角)的意义, 并能由此展开相关的几何分析. 今年高考大纲数学理科将“闭区间上连续函数有最大值和最小值”由“理解”降低为“了解”, 考生会用就行.

“回归 + 创新”仍将成为 2006 年高考命题的主旋律, 命题重点会体现以下几个方面: 代数中的函数、数列、不等式、三角基本变换、立体几何、解析几何, 新课程增加内容中的向量、概率以及概率与统计、导数等主干内容, 在近年来的高考考点分布中保持了较高比例. 同时, 大纲对学科的考查不刻意追求知识的覆盖面. 因此, 考生在复习中要重视“通法”, 淡化“特技”, 将主要精力放到主干知识的训练, 以及数学基本方法、基本思想的灵活运用上来.

测试学校	难度系数	平均分	最高分	140 分以上人数百分比	130 ~ 140 分人数百分比	120 ~ 130 分人数百分比	110 ~ 120 分人数百分比	100 ~ 110 分人数百分比
黄冈高级中学	0.57	101	143	5%	7%	23%	18%	24%

测试评价 本套试卷难度与 2005 年全国卷相比略有偏高, 测试反映出的问题有: ①学生面对新颖的试题却不知道如何入手, 一时找不到解题的突破口, 思维不能快速进入解题状态. ②学生构造模型, 利用模型的能力不够强, 这在平时的解题训练中, 要有意识的记忆、理解模型的有效价值, 这对于不断提升分析问题和解决问题的能力是有较大作用的. ③学生画图、读图、识图、用图的技能不是很强, 具体表现在“画图不准确, 读图时的信息翻译常有差错, 抓不住问题的关键点. 说明了考生由于对一些基本概念不清楚, 基本的运算不正确及基本的方法不熟练而失分的现象比较严重.

1. (理) D 易知 $a = \sqrt{2}$, 则 $\frac{a + i^{2007}}{1 + ai} = \frac{\sqrt{2} - i}{1 + \sqrt{2}i} = \frac{(\sqrt{2} - i)(1 - \sqrt{2}i)}{(1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i)} = \frac{-3i}{3} = -i$.

评析 根据纯虚数概念, 求出 a , 再对 $\frac{\sqrt{2} + i^{2007}}{1 + \sqrt{2}i}$ 化简求值, 其思想是分母实数化. 此题的另一个处理技巧是: $\frac{a + i^{2007}}{1 + ai} = \frac{(a + i^{2007})i}{(1 + ai)i} = \frac{ai + i^{2008}}{(1 + ai)i} = \frac{ai + 1}{(1 + ai)i} = \frac{1}{i} = -i$.

(文) C 作图可知正确答案为 C.

评析 常规思路是设过 $(0, 2)$ 的直线(斜率存在)为 $y = kx + 2$, 联立 $x^2 + y^2 = 1$ 再利用 $\Delta = 0$ 求出 k 的值, 这种做法往往运算量比较大. 此类题目应通过几何作图, 尽量运用解直角三角形的知识求解. 需要指出, 此题稍作引申便得到 4(理). 此时需借助 $y = \tan x$ 在 $[0, \pi]$ 的图象方可准确无误地求解.

2. B $S_1 = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$, $S_2 = \{x | a - 4 < x < a + 4\}$, $S_3 = \{x | a < x < 5 \text{ 或 } a > 9\}$.

评析 此题融合了二次不等式、绝对值不等式以及已知集合关系求参数等基本题型, 在解答的过程中务必细心, 并注意集合 S_3 中的代表元. 此题的另一技巧: 由于 $S_2 \subseteq S_1$, 故 $(C_{R} S_1) \cap S_2 = \emptyset$ 当然正确.

3. A $\odot O'$ 的半径为 1, 球 O 的半径为 $\sqrt{2}$, 所以 OO' 的长度为 $\sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1} = 1$.

评析 “球面距”是球中很重要的一个概念. 此题最终目的是对球中一个重要直角三角形(小圆半径、球半径、球心到小圆面的距离构成的一个直角三角形)的考查, 这也是高考的常考点.

4. (理) C 作图可知正确答案为 C. 评析 此题常规做法是利用 $\Delta \geq 0$ 求 k 的范围, 但其运算量往往较大, 这类题目应该通过几何作图确定其位置关系, 尽量运用解直角三角形的知识, 并结合函数 $y = \tan x$ 在 $[0, \pi]$ 上的图象方可快速准确无误地得出结果.

(文) C $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 \geq 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 为 R 上的增函数, 故没有极值.

评析 对三次函数常见的处理方式是先求导降次, 再由 Δ 判断二次式根的情况.

5. B 过 A 作 $AA' \parallel CC'$ 与平面 $D'C'B'$ 交于 A' , 易知 $ABCD - A'B'C'D'$ 为斜棱柱, 从而 $V_{ABCD - A'B'C'D'} = V_{ABCD} - V_{A-B'C'D'} - V_{A-A'B'D'}$, 又由于 $\angle CC'D' = \angle CC'B' = \frac{\pi}{3}$ 且 $\cos CC'B' =$

$\cos CC'A' \cos A'C'B'$, 所以 $\cos CC'A' = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以该棱柱的高 $h = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, 所以 $V_{ABCD - A'B'C'D'} = 1 \times 1 \times \sqrt{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$.

评析 粗心的同学以为就是一个平行六面体, 但事实上, 是平行六面体“削掉了一只角”, 于是通过补形补成一个平行六面体而求体积. 其实由“等底等高体积”可知该多面体的体积是其对应平行六面体体积的 $\frac{5}{6}$ 倍.

6. (理) D 由题可知抛物线的焦点到其准线的距离为 $\frac{1}{2}$, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 的焦点到相应准线的距离为 $c - \frac{a^2}{c} = \frac{b^2}{c} = \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 2$, 所以 $a^2 = c^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$, 从而 $a = \sqrt{3}$, 所以 $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(文) D 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 的焦点到相应准线的距离为 $c - \frac{a^2}{c} = \frac{b^2}{c} = \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 2$, 所以 $a^2 = c^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$, 从而 $a = \sqrt{3}$, 所以 $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

评析 在此题解法的基础上进行提炼而得到双曲线(椭圆)的焦点到其准线的距离(简称“焦准距”)为 $\frac{b^2}{c}$, 而抛物线的焦准距为 p .

7. C S_n 是等差数列 $\{u_n\}$ 的前 n 项和, 所以 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是以 $\frac{S_1}{1}$ 为首项, $\frac{d}{2}$ 为公差的等差数列, 所以 $\frac{S_{2008}}{2008} = -2008 + (2008 - 1) \times 1$, 从而 $S_{2008} = -2008$.

评析 因为等差数列的前 n 项和 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$, 所以 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列, 这是能解出此题目的关键所在.

8. (理) B $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, 由图可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上是减函数, 所以 $f(x)$ 在这个区间上有 $f'(x) < 0$, 所以 $f'(x)$ 的开口向下, 从而 $a < 0$, 又因为 $f(x)$ 的两个极值点横坐标都为负数, 所以 $f'(x) = 0$ 有两个负根 x_1, x_2 , 从而 $x_1 + x_2$

$$= -\frac{2b}{3a} < 0, \text{所以 } b < 0.$$

评析 图象信息选择题可以全面地考查学生的素质和能力. 观察图象时一定要注意其中的关键点、截距等. 沿着此题解法做下去可以进一步判断出 c 的符号 ($c < 0$). 需指出本题还可采用特殊值法,不妨假设与 x 轴另外一个交点的坐标为 -1 ,然后对照 $f(x)$ 的解析式,就可判断出 a, b, c 的符号.

(文) B 由 $2 \leq x \leq 3$ 得, $0 \leq y \leq 1$, 而 $y^2 = -x^2 + 4x - 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 + y^2 = 0$, 所以 $x = \frac{4 + \sqrt{16 - 4(3 + y^2)}}{2} = 2 + \sqrt{1 - y^2}$, 所以原函数的

反函数为 $y = 2 + \sqrt{1 - x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$).

评析 求反函数是一类常规题型,此题考查二次式的综合处理能力,特别在反解 x 时,一定要通过 $2 \leq x \leq 3$ 来确定 $\sqrt{\Delta}$ 前面的符号.

9. C $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上是减函数,所以 $x > f(1) = 0$.

评析 此题本质是考查函数 $y = \log_a x$ 及其复合函数的单调性. 如果按常规思路,先求出 $f^{-1}(x)$,再求出 x 的取值范围,比较麻烦.

10. C 由题目可得到 $\begin{cases} b - 2a \geq 0 \\ b + 2a \geq 0 \\ |a| \leq 1 \\ |b| \leq 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b - 2a \leq 0 \\ b + 2a \leq 0 \\ |a| \leq 1 \\ |b| \leq 2 \end{cases}$, 由线性规划作图可知正确答案为 C.

评析 此题考查线性规划中的“区域”,需注意 $\begin{cases} |a| \leq 1 \\ |b| \leq 1 \end{cases}$ 表示一个正方形内部及边界上点的集合.

11. B $2B < \frac{\pi}{2} \Rightarrow B < \frac{\pi}{4}$, $A + B = 2B + B = 3B > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{4}$.

$$\sin(A + B) = \sin C \Rightarrow \sin 3B = \sin C.$$

$$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cot \frac{C}{2} \Rightarrow \tan \frac{3B}{2} \tan \frac{C}{2} = 1.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin 2B}{\sin B} = 2 \cos B \in (\sqrt{2}, \sqrt{3}).$$

评析 三角形中的三角函数有关问题是历来考查的一个重点. 此题容易在②的大小判断上出错.

12. (理) C 以正方体的 8 个顶点为顶点的三棱锥有 $C_8^4 - 12 = 58$ 个,任意一个三棱锥中有 3 对异面直线的对数为 $58 \times 3 = 174$. 所以正确答案为 C.

评析 此题沿袭 2005 全国 I (理) 12 题,考查的难度比较大,需要认真仔细分析找到解题路径.

(文) C $\vec{OP} = \vec{OC} + \lambda(\vec{CB} + \vec{CA}) \Rightarrow \vec{CP} = 2\lambda \vec{CD}$ (D 为 AB 边的中点).

评析 对三角形中的“中线向量公式”应该引起重视. 学生可进一步思考其他“心”,如:满足 $(\vec{OP} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OC}) = 0$ 的 P 点的轨迹一定过 $\triangle ABC$ 的垂心.

13. (理) 108 赋值法得 $A = 4^n, B = 2^n$, 所以 $4^n + 2^n = 272 \Rightarrow n = 4$, 所以含 x 项为 $C_4^3 (3\sqrt[3]{x})^3 = 108x$, 所以正确答案应该填 108.

(文) -160 因为 $C_{10}^9 \cdot x^9 \times 2^1 \times \frac{1}{x} + C_{10}^8 \cdot x^8 \times 2^2 \times (-1) = (20 - 180)x^8$, 所以正确答案应该填 -160.

评析 项的系数与二项式的系数是不同的两个概念,而求各项的系数和应采用赋值法,求二项式系数和利用公式 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.

14. (理) $\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{3}$ $\because \vec{AB} = (2\cos x + 1, 2\cos 2x + 2), \vec{OC} = (\cos x, -1)$, $\therefore \vec{AB} \cdot \vec{OC} = (2\cos x + 1)\cos x + (2\cos 2x + 2) \times (-1) \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0$ 或 $\cos x = \frac{1}{2}$,

所以正确答案应该填 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{3}$.

评析 此题目综合考查向量的基础知识以及三角函数二倍角公式的灵活变形. 给定条件解三角方程也是本题的一个考查点,学生应该熟练掌握特殊角的三角函数.

(文) 600 $(C_4^1 C_6^2 + C_4^2 C_6^1 + C_4^3) A_3^3 = 600$, 所以正确答案应该填 600.

评析 解排列组合题目时,应满足先选元素,后排列的原则.

15. (理) -1 $\begin{cases} 1 - 2 \cdot 3^x = 3^{2x+1} \\ 1 - 2 \cdot 3^x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot (3^x)^2 + 2 \cdot 3^x - 1 = 0 \\ 3^x < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 3^x =$

$\frac{1}{3} \Rightarrow x = -1$, 所以正确答案应该填 -1.

(文) -1 $1 - 2 \cdot 3^x = 3^{2x+1} \Rightarrow 3 \cdot (3^x)^2 + 2 \cdot 3^x - 1 = 0 \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3}$ 或 $3^x = -1$ 所以正确答案应该填 -1.

评析 此题的关键是将对数式转换成指数方程,再解关于 3^x 的一元二次方程,理科需注意 $1 - 2 \cdot 3^x > 0$ 这一条件.

16. ②③④ 易知 $DB' \perp$ 面 ACD' , $\therefore$ ①错.

$\because DB' \subset$ 面 $AB'C'D'$ 且 $DB' \perp$ 面 ACD' , $\therefore$ ②正确

$\because MD'$ 在直线 MN 与直线 DD' 的公共法向量上的投影的大小等于 $D'C'$ 的长度, $\therefore$ ③正确.

$\therefore$ 作 $B'C'$ 的中点 N , 四边形 $MND'A$ 是等腰梯形,

$\therefore$ ④正确.

$\therefore$ 顺次连结 $BB', B'C', C'D', D'D, AD, AB$ 的中点构成一个正六边形, $\therefore$ ⑤错. 所以正确答案应该填 ②③④.

17. (1) 由图象可知 $A = 4, \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$.

$$\frac{\pi}{8} \times (-2) + \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

$$(2) \therefore f(x) = 4\sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\therefore \text{由 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}) \text{ 得 } 16k - 6 \leq x \leq 16k + 2 (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\therefore f(x) \text{ 的单调增区间为 } [16k - 6, 16k + 2] (k \in \mathbb{Z}).$$

$$(3) (\text{理}) \text{ 由图象可知 } k_{MN} = \frac{4-0}{2-(-2)} = 1.$$

设 $P(x_0, y_0)$ 为 $f(x)$ 上一点 C , 则 $f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4}\right)$.

$$\text{由题得 } \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}x_0 + \frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}x_0 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi},$$

$$x_0 = \left(\arccos \frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4}\right) \times \frac{8}{\pi},$$

$$x_0 = \frac{8}{\pi} \arccos \frac{2}{\pi} - 2,$$

$$\therefore P\left(\frac{8}{\pi} \arccos \frac{2}{\pi} - 2, 4\sin\left(\arccos \frac{2}{\pi}\right)\right) \text{ 为所求的一个点.}$$

$$(\text{文}) \therefore f(x) = 4\sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$\therefore$ 将函数 $f(x) = 4\sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的纵坐标保持不变,横坐标

变为原来的 $\frac{8}{\pi}$ 倍,得到 $y = 4\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象,再将该函数

图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位得到 $y = 4\sin x$ 的图象,再将其纵坐标

变为原来的 $\frac{1}{2}$ (横坐标不变) 得到函数 $g(x) = 2\sin x$.

评析 由图象得解析式,进一步求其单调区间等,是常规题型. 本题的新颖之处 在正弦曲线上求切线,这既要求认真掌握导数的几何意义,又要求详尽掌握正余弦的求导公式、复合函数的求导法则等.

18. 解法一 (1) $\because SD \perp AD, SD \perp AB, \therefore SD \perp$ 面 $ABCD$, 而 $SD \subset$ 面 $SDB, \therefore$ 面 $SDB \perp$ 面 $ABCD$.

(2) 由题可知 DS, DA, DC 两两互相垂直,

$\therefore$ 建立如图空间直角坐标系 $D-xyz$,

$\therefore S(\sqrt{3}a, 0, 0), A(0, a, 0), B(0, a, 2a), C(0, 0, 2a), D(0, 0, 0),$

$\therefore \vec{AD} = (0, -a, 0), \vec{SB} = (-\sqrt{3}a, a, 2a),$

$$\therefore \cos \langle \vec{AD}, \vec{SB} \rangle = \frac{\vec{AD} \cdot \vec{SB}}{|\vec{AD}| \cdot |\vec{SB}|} = -\frac{\sqrt{2}}{4},$$

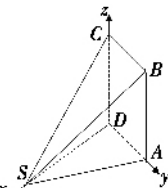
$\therefore AD$ 与 SB 所成的角为 $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$.

(3) $\vec{DS} = (\sqrt{3}a, 0, 0), \vec{DB} = (0, a, 2a).$

设面 SBD 的一个法向量为 $n = (x, y, z),$

$$\therefore \begin{cases} n \cdot \vec{DS} = 0 \\ n \cdot \vec{DB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}ax = 0 \\ ay + 2az = 0 \end{cases} \Rightarrow n = (0, -2, 1).$$

又 $\because \vec{AB} = (0, 0, 2a), \vec{SA} = (-\sqrt{3}a, a, 0)$, 设面 SAB 的一个法向



量为 $m = (x_1, y_1, z_1)$,
 $\therefore \begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ m \cdot \overrightarrow{SA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2az_1 = 0 \\ -\sqrt{3}ax_1 + ay_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = (1, \sqrt{3}, 0),$

$\therefore \cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| |n|} = -\frac{\sqrt{15}}{5},$

所以所求的二面角为 $\arccos \frac{\sqrt{15}}{5}$.

解法二 (1) 同解法一(1).

(2) $\because$ 矩形 $ABCD, \therefore AD \perp BC$, 即 $BC = a$,
 $\therefore$ 要求 AD 与 SB 所成的角即求 BC 与 SB 所成的角.

在 $\triangle SBC$ 中,

由(1)知 $SD \perp$ 面 $ABCD, \therefore$ Rt $\triangle SDC$ 中,

$SC = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{7}a.$

$\because CD$ 是 CS 在面 $ABCD$ 内的射影, 且 $BC \perp CD, \therefore SC \perp BC$,

$\tan SBC = \frac{SC}{CB} = \frac{\sqrt{7}a}{a} = \sqrt{7},$

$\therefore BC$ 与 SB 所成的角为 $\arctan \sqrt{7}$,

从而 SB 与 AD 所成的角为 $\arctan \sqrt{7}$,

(3) $\because$ 面 $SDB \perp$ 面 $ABCD, BD$ 为面 SDB 与面 $ABCD$ 的交线,

$\therefore$ 过 A 作 $AE \perp DB$ 于 E ,

则 $AE \perp$ 面 SDB .

又过 A 作 $AF \perp SB$ 于 F , 连结 EF .

由三垂线的逆定理得 $EF \perp SB$,

$\therefore \angle AFE$ 为二面角 $A-SB-D$ 的平面角.

在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 $BD = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a$,

$\therefore$ 在 $\triangle ABD$ 中, $AE = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}a.$

由(2)知在 Rt $\triangle SBC$ 中, $SB = \sqrt{(\sqrt{7}a)^2 + a^2} = \sqrt{8}a.$

而 Rt $\triangle SAB$ 中, $SA = 2a$, 且 $AB = 2a$,

$\therefore SB^2 = SA^2 + AB^2 = \sqrt{8}a$,

$\therefore \triangle SAB$ 为等腰直角三角形且 $\angle SAB$ 为直角,

$\therefore AF = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = \sqrt{2}a,$

$\therefore \sin AFE = \frac{AE}{AF} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{10}}{5},$

$\therefore$ 面 SBD 与面 SAB 所成的角为 $\arcsin \frac{\sqrt{10}}{5}$.

评析 立体几何中, 夹角与距离是高考的常考点. 注意几个角的范围: 线线角 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 、线面角 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 、二面角 $[0, \pi]$.

19. (1) $\because a \parallel b, \therefore (3S_n - 2S_{n-1} - 3)t - 3S_{n-1} = 0$,
 即 $3tS_n - (2t+3)S_{n-1} = 3t$ ①

从而有 $3tS_{n+1} - (2t+3)S_n = 3t$ ②

② - ① 得 $3t(S_{n+1} - S_n) - (2t+3)(S_n - S_{n-1}) = 0$,

$\therefore 3ta_{n+1} = (2t+3)a_n (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2).$

又 $\because 3t(a_1 + a_2) - (2t+3)a_1 = 3t \Rightarrow a_2 = \frac{2t+3}{3t}a_1$,

$\therefore \frac{a_2}{a_1} = \frac{2t+3}{3t},$

综上 数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项 $\frac{2t+3}{3t}$ 为公比的等比数列 ($n \in \mathbb{N}^*$).

(2) (理) 由(1)可知 $f(t) = \frac{2t+3}{3t} = \frac{2}{3} + \frac{1}{t}.$

$\therefore b_1 = 1, b_n = f(\frac{1}{3b_{n-1}}) = \frac{2}{3} + 3b_{n-1},$

$\therefore (b_n + \frac{1}{3}) = 3(b_{n-1} + \frac{1}{3}),$

$\therefore b_n = \frac{4}{3} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{3} (n \in \mathbb{N}^*).$

又由(1)知道 $a_n = (\frac{2}{3} + \frac{1}{t})^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*),$

$\therefore \frac{b_n}{a_n} = \frac{\frac{4}{3} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{3}}{(\frac{2}{3} + \frac{1}{t})^{n-1}} = \frac{4}{3} (\frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{t}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{t}})^{n-1} - \frac{\frac{1}{3}}{(\frac{2}{3} + \frac{1}{t})^{n-1}}.$

① 当 $t = \frac{3}{25}$ 时, $\frac{b_n}{a_n} = \frac{4}{3} (\frac{1}{3})^{n-1} - \frac{1}{9^{n-1}}$, 此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{4}{3}.$

② 当 $0 < t < \frac{3}{25}$ 时, $\frac{2}{3} + \frac{1}{t} > 9$, 此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0.$

(文) 由(1)可知 $f(t) = \frac{2t+3}{3t} = \frac{2}{3} + \frac{1}{t}.$

$\therefore b_1 = 1, b_n = f(\frac{1}{3b_{n-1}}) = \frac{2}{3} + 3b_{n-1}.$

$\therefore (b_n + \frac{1}{3}) = 3(b_{n-1} + \frac{1}{3}), \therefore b_n = \frac{4}{3} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{3} (n \in \mathbb{N}^*).$

令 $c_n = nb_n = \frac{4}{3}n \times 3^{n-1} - \frac{n}{3},$

从而 $T_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = \frac{4}{3}(1 + 2 \times 3 + 3 \times 3^2 + \cdots + n \times$

$3^{n-1}) - \frac{1}{3} \times \frac{n(n+1)}{2},$

令 $u_n = 1 + 2 \times 3 + 3 \times 3^2 + \cdots + n \times 3^{n-1},$

则 $3u_n = 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \cdots + n \times 3^n,$

$u_n = \frac{2n-1}{4} \times 3^n + \frac{1}{4},$

$\therefore T_n = (2n-1)3^{n-1} - \frac{1}{3}[\frac{n(n+1)}{2} - 1].$

评析 以向量为载体考查数列相关知识. 此题转换成 $(3S_n - 2S_{n-1} - 3)t - 3S_{n-1} = 0$ 后, 对该式的处理是解本题关键. 对它的处理类似于对 2005 江苏卷的第 23 题的处理, 其本质还是考查 $u_n = S_n - S_{n-1}$. (理) 求极限中考查了分类讨论的思想, (文) 则考查了常见数列的求和.

20. 记“三个元件 T_1, T_2, T_3 正常工作”为

别为事件 A_1, A_2, A_3 , 则 $P(A_1) = \frac{1}{2},$

$P(A_2) = \frac{3}{4}, P(A_3) = \frac{3}{4}.$

(1) 电路不发生故障的事件为 $(A_2 + A_3)A_1$, $\therefore$ 电路不发生故障的概率为

$P_1 = P[(A_2 + A_3)A_1] = P(A_2 + A_3) \cdot P(A_1)$

$= [1 - P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3})] \cdot P(A_1)$

$= [1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}] \times \frac{1}{2} = \frac{15}{32}.$

(2) 如图(1)或(2), 此时不发生故障的概率最大. 证明如下:

图(1)中不发生故障事件为 $(A_1 + A_2) \cdot A_3$

$\therefore$ 不发生故障概率为 $P_2 = P[(A_1 + A_2)A_3] = P(A_1 + A_2) \cdot P(A_3)$

$= [1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2})] P(A_3) = \frac{21}{32},$

$\therefore P_2 > P_1.$

图(2)不发生故障事件为 $(A_1 + A_3) \cdot A_2$, 同理不发生故障概率为 $P_3 = P_2 > P_1.$

因此当三个元件连成图(1)或图(2)时不发生故障的概率最大.

评析 本题以物理中的电路为背景设计了一道开放型问题, 主要考查互斥事件、相互独立事件的概率的求法. 对于(2), 应注意考虑各种可能的情形, 将它们的概率分别求出进行比较得出结论.

21. (1) 由题设 $l: y = kx + m$ (k 为该直线的斜率),

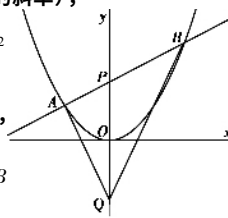
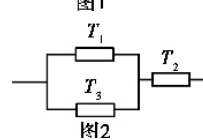
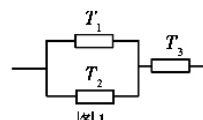
$\therefore \begin{cases} x^2 = 4y \\ y = kx + m \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4kx + 4m \Rightarrow x_1x_2$

$= -4m,$

$\therefore x_1x_2$ 为定值 $-4m.$

(2) 由 $x - 2y + 4 = 0$ 得 $P(0, 2), Q(0, -2).$

又由 $\begin{cases} x^2 = 4y \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$ 得 $A(-2, 1), B(4, 4),$



$$\therefore |AP| = \sqrt{5}, |AQ| = \sqrt{13}, |BP| = 2\sqrt{5}, |BQ| = 2\sqrt{13}.$$

当椭圆 C_2 过 A 点时,

$$2a = |AP| + |AQ| = \sqrt{5} + \sqrt{13},$$

$$a^2 = \left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{13}}{2}\right)^2 = \frac{9 + \sqrt{65}}{2},$$

$$b^2 = \left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{13}}{2}\right)^2 - 4 = \frac{1 + \sqrt{65}}{2},$$

$$\text{椭圆的方程为 } \frac{y^2}{9 + \sqrt{65}} + \frac{2x^2}{1 + \sqrt{65}} = 1;$$

当椭圆 C_2 过 B 点时, $2a = |BP| + |BQ| = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{13}$,

$$a^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{13})^2 = 18 + 2\sqrt{65}, b^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{13})^2 - 4 = 14 + 2\sqrt{65},$$

此时椭圆的方程为 $\frac{y^2}{18 + 2\sqrt{65}} + \frac{x^2}{14 + 2\sqrt{65}} = 1$.

(3) 由题得 $\vec{AP} = \lambda \vec{PB}$,

$$\therefore \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = 0, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = m, \text{ 即 } \frac{x_1}{x_2} = -\lambda.$$

$$\text{又 } \because Q(0, -m), \vec{QA} = (x_1, y_1 + m), \vec{QB} = (x_2, y_2 + m),$$

$$\therefore \vec{QA} - \mu \vec{QB} = (x_1 - \mu x_2, y_1 + \mu y_2 + (1 - \mu)m).$$

$$\text{又 } \because \vec{QP} = (0, 2m), \vec{QP} \perp (\vec{QA} - \mu \vec{QB}),$$

$$\therefore 2m[y_1 - \mu y_2 + (1 - \mu)m] = 0$$

$$\text{从而 } \frac{x_1^2}{4} - \mu \frac{x_2^2}{4} + (1 - \mu)m = 0,$$

$$\text{即 } x_1^2 - \mu x_2^2 + 4(1 - \mu)m = 0 \quad \text{①}.$$

$$\text{由 ① 知 } x_1^2 - \mu x_2^2 - (1 - \mu)x_1 x_2 = 0,$$

$$\therefore \frac{x_1}{x_2} - \mu \frac{x_2}{x_1} - (1 - \mu) = 0.$$

$$\text{令 } t = \frac{x_1}{x_2},$$

$$\therefore t^2 - (1 - \mu)t - \mu = 0,$$

$$(t - 1)(t + \mu) = 0,$$

$$\therefore t = -\mu \text{ 或 } t = -1 \text{ (舍去)},$$

$$\text{即 } \frac{x_1}{x_2} = -\mu, \therefore \lambda = \mu.$$

评析 “设而不求”是解析几何中运用得比较多的一种思想,此题要证明 $\lambda = \mu$,其关键是运用(1)中结论将①中的 m 换成

$$-\frac{x_1 x_2}{4}, \text{ 从而转换成 } x_1, x_2 \text{ 的齐次式.}$$

22. (理) (1) 由 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是增函数,

$$\therefore \frac{1}{x-2} + a \geq 0 \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上恒成立, } \therefore a \geq -\frac{1}{x-2} \text{ 恒成立.}$$

$$\text{而 } -2 < x-2 < -1, \therefore -1 < \frac{1}{x-2} < -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < -\frac{1}{x-2} < 1,$$

$$\therefore a \geq 1, \text{ 即 } a \text{ 的取值范围是 } [1, +\infty).$$

(2) 先用数学归纳法证明当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, 有 $0 < a_n < 1$.

① 当 $n=1$ 时, 由题设知 $a_1 \in (0, 1)$ 命题成立.

② 假设当 $n=k$ 时命题成立, 即 $0 < a_k < 1$. 则当 $n=k+1$ 时,

$$a_{k+1} = \ln(2 - a_k) + a_k,$$

由(1)可知, 当 $a=1$ 时, 函数 $f(x) = \ln(2-x) + ax$ 在 $(0, 1)$ 上是增函数,

$$\therefore 0 < a_{k+1} = \ln(2 - a_k) + a_k < 1,$$

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时, 命题成立.

$\therefore$ 当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, 有 $0 < a_n < 1$.

$$\therefore a_{n+1} - a_n = \ln(2 - a_n) > 0, \therefore a_{n+1} > a_n, n \in \mathbb{N}.$$

(3) 数列 $\{b_n\}$ 不具有单调性.

$$\text{令 } g(x) = 2\ln(2-x) + x,$$

$$\text{则 } g'(x) = 1 - \frac{2}{2-x}, \text{ 当 } x \in (0, 2) \text{ 时, } g'(x) < 0,$$

$\therefore g(x) = 2\ln(2-x) + x$ 在 $(0, 2)$ 上是减函数.

$$\therefore b_1 \in (0, 1), b_2 = 2\ln(2 - b_1) + b_1 > 1, \text{ 且 } b_2 < 2\ln 2 < 2,$$

$$\therefore b_3 = 2\ln(2 - b_2) + b_2 < 2\ln(2 - 1) + 1 = 1,$$

$$\therefore b_1 < b_2, \text{ 而 } b_2 > b_3, \therefore \{b_n\} \text{ 不具有单调性.}$$

$$\text{另解: 令 } b_1 = \frac{1}{2}, \text{ 则 } b_2 = 2\ln(2 - b_1) + b_1 = 2\ln \frac{3}{2} + \frac{1}{2} =$$

$$\ln \frac{9}{4} + \frac{1}{2} \in (1, 2),$$

$$\text{而 } b_3 = 2\ln(2 - b_2) + b_2 < 1.$$

由此可知, $\{b_n\}$ 不具有单调性.

评析 $f(x)$ 在区间 D 上是增(减)函数 $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) 在区间 D 上恒成立.

(文) (1) 当 $a=3$ 时, 函数 $f(x) = x^3 - 3x^2$, 此时 $f'(x) = 3x^2 - 6x$, 由 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$, 得 $x_1 = 0, x_2 = 2$, 由此列表如下

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\uparrow$	0	$\downarrow$	-4	$\uparrow$

若 $a=1$, 当 $x=0$ 时, $f(x)$ 的极大值为 0; 当 $x=2$ 时, $f(x)$ 的极小值为 -4.

(2) 由(1)可知 $g(x) = x^3 - 3x^2 + k$ 的极大值为 $g(0) = k$, 极小值为 $g(2) = k - 4$, 又因为方程 $x^3 - 3x^2 + k = 0$ 有两个实数根等价于函数 $g(x) = x^3 - 3x^2 + k$ 的图象与 x 轴只有两个交点, 所以 $g(0)g(2) = 0$, 从而 $k=0$ 或 $k=4$.

(3) $\because$ 点 $(0, 1)$ 不在函数 $f(x)$ 的图象上, 设切点为 (m, n) ,

$$\therefore n = m^3 - am^2 \quad \text{①}.$$

又 $\because f'(x) = 3x^2 - 2ax$, 所以在点 (m, n) 处切线的斜率 $k = f'(m) = 3m^2 - 2am$, 所以在点 (m, n) 处且过点 $(0, 1)$ 的切线的方程为 $y = (3m^2 - 2am)x + 1$, 所以 $n = (3m^2 - 2am)m + 1 \quad \text{②}$.

$\therefore$ 联立①②得 $2m^3 - am^2 + 1 = 0$ 有两个解;

又由题可知过点 $(0, 1)$ 点 $f(x)$ 的切线有两条 $\Rightarrow$ 函数 $u(m) = 2m^3 - am^2 + 1$ 的图象与 x 轴有两个交点, 而 $u'(m) = 6m^2 - 2am$, $u_{\text{极大}} = u(0)$, $u_{\text{极小}} = u(\frac{a}{3})$, 从而 $u(0) \cdot u(\frac{a}{3}) = 0$, $\therefore a$

$$= 3.$$

评析 问题(3)的关键是把“切线有两条”的“形”转化为“方程有 2 个不同实根”的“数”, 即数形结合, 然后把三次方程有两个不同实根予以转化. 三次方程有两个不同实根等价于“极大值大于 0, 且极小值小于 0”. 另外对于求过某点的曲线的切线, 应该注意此点是否在曲线上.

2006 年全国百校联盟高考《考试大纲》调研卷(五)

考纲分析与考前预测 新大纲将“正弦函数、余弦函数、正切函数的图像和性质”由“了解”提高到“理解”, 将三角函数的图象与性质及其应用提高到了一个更高的层次, 此次调整也预示着三角大题的重视, 且可能会以中档的综合性试题呈现. 此次大纲的变化部分涉及了参数的要求变化, 本卷第 21 题在此基础上作了一定的探索. 创新是高考命题永恒不变的旋律, 因而本试卷的命题也在学习新大纲的基础上作了很大的创新, 创设新颖的情境, 激发学生独立思考, 从数学的角度去发现和提出问题, 并加以探索和研究, 这有利于提高学生的思维能力和创新意识. 另外, 新课标的进一步实施, 对于 06 年考纲也有着一定的指导性, 其对高考必将有着深远的影响, 从命题思考到命题的素材的选择, 将会有更大的择题空间.

今年高考数学命题, 仍然坚持能力和应用创新不动摇, 可能大幅度地出些创新题, 重点更加突出, 稳中有变, 变中求新, 在题型创新方面将会有一些背景新颖、内涵深刻、富有新意的新题型出现, 以引导广大师生摆脱题海战术, 命题的中心仍应是数学思想方法. 不等式会以全新的权重仍会分别作为一个填空题和一个解答题, 二次函数以及二次不等式、绝对值不等式仍会成为近几年高考的一个热点. 在立体几何的试题中, 也会有一点新意, 对几何体的割补处理是一种很常规的要求, 其考查了考生良好的应变能力. 数列在选择题、填空题中突出“小、巧、活”的三大特点, 在解答题中以中等难度以上的综合题为主, 涉及函数、方程、不等式、概率等重要内容. 圆锥曲线要注意一些立意新, 角度好, 有创意的题目, 特别要关注在向量和解析几何交汇点上的命题趋势. 排列组合、概率与统计的命题背景仍然会以全新的权重出现, 应当注意新课标中新出现的概率类型及社会热点问题的应用性考查. 应对探究性问题要审慎处理“阅读理解”和“整体设计”两个环节, 首先要把题目读懂, 全面、准确把握题目提供的所有信息和题目提出的所有要求, 在此基础上分析题目的整体结构, 找好解题的切入点, 对解题的主要过程有一个初步的设计, 再落笔解题.

相关事宜	难度系数	平均分	最高分	140 分以上人数百分比	130 ~ 140 分人数百分比	120 ~ 130 分人数百分比	110 ~ 120 分人数百分比	100 ~ 110 分人数百分比
测试学校								
河南省实验中学	0.51	98	148	3.2%	6.1%	9.2%	11.3%	16.2%

测试评价与备考建议 本套试卷覆盖了新考纲所要求的主体内容, 在试题的背景和数学思想的考查方面作了多方面的探讨, 试卷的创

新性非常高,具有较好的选拔性,试卷难易度适中.

从测试的情况反映,考生的一轮复习已取得了很大的进步,对于很多创新性问题学生兴趣很浓,答题正确率高于考前的预测,但对于基础性概念的掌握仍还存在着一定的问题,如第 11 题考生的得分普遍不高,当然也还有不少考生对于数学公式使用不太熟练,解题不规范,运算的准确率仍偏低.

考生在解答题的推理过程中也暴露了一定的问题,对于数学思想与方法的灵活运用仍然需要加强,同时对于难度大的试题考生需要正确对待,调整好解题策略及心理状态,应完全可以将该得的分数控制在一定的底线上.

1. D $A = \{x | 0 \leq x \leq \sqrt{5}, x \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, 2\}, B = \{x | x = 2a, a \in A\} = \{0, 2, 4\}, A \cap B = \{0, 2\} \subseteq A$. 故应选 D.

评析 本题考查集合的运算及元素的特征,属于基础题.

2. (理) B $f(1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a - 2$, 解得 $a = 2$, 故应选 B.

(文) B 由已知可得 $2^x = \frac{a+1}{2-a} > 1$, 解得 $\frac{1}{2} < a < 2$, 故应选 B.

评析 理科题考查分段函数的连续性,文科题考查函数的有界性及不等式的求解,属于高考新考纲变化的范畴.

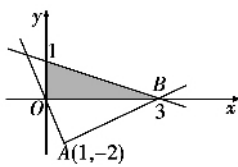
3. D 每个结构简图去掉最左边的一个化学键后,每个环上有 5 个化学键,故第 n 个结构简图有 $5n+1$ 个化学键.

评析 本题是一道学科综合题,考查等差数列的通项公式的求解及不完全归纳的数学能力.

4. (理) B $\frac{(2+i)(1+i)^2}{1-2i} = \frac{(2+i) \cdot 2i}{1-2i} = \frac{(-2+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-10}{5} = -2$, 故应选 B.

(文) B 作出可行域如右图阴影所示,可得 $z \in [k_{AB}, +\infty) \cup (-\infty, k_{OP}] = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.

评析 理科题考查复数知识,文科题考查线性规划知识,该类问题在高考中属于基础题范畴.



5. B $T_4 = C_3^7 x^4 \left(-\frac{1}{x}\right)^3 = -35x = 7 \Rightarrow$

$x = -\frac{1}{5}$, 故应选 B.

评析 本题通过二项式的公式,考查方程思想的应用.

6. C $\because y' = \sqrt{3}x^2 - \sqrt{3} \ (-1 < x < 1), \therefore -\sqrt{3} \leq y' < 0$, 即得 $-\sqrt{3} \leq \tan \alpha < 0$,

$\therefore \alpha \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$, 故应选 C.

评析 本题考查导数知识,属于直线、函数值域与导数知识的交汇,具有一定的综合性.

7. C 折叠后 $EA \perp BA, EA \perp AC$, 得 $EA \perp$ 平面 ABC . 由 $AB = 2, BC = \sqrt{3}, CD = 1$ 得 $AE = \frac{1}{2} \sqrt{(\sqrt{3})^2 - (2-1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $\triangle ABC$

为直角三角形,则有 $V_{E-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot AE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

评析 本题考查立体几何中的折叠问题,考查折叠过程中变量与不变量的探索,考查空间想象能力及分析问题与解决问题的能力.

8. (理) D 关于测试次数 ξ 及其相应的概率分布如下表所示:

ξ	2	3	4	5	6
P	$\frac{A_2^2}{A_6^2}$	$\frac{C_2^1 C_2^1 A_4^1}{A_6^3}$	$\frac{C_2^1 C_3^1 A_4^1}{A_6^4}$	$\frac{C_2^1 C_4^1 A_4^1}{A_6^5}$	$\frac{C_2^1 C_5^1 A_4^1}{A_6^6}$

则 $E\xi = 2 \times \frac{A_2^2}{A_6^2} + 3 \times \frac{C_2^1 C_2^1 A_4^1}{A_6^3} + 4 \times \frac{C_2^1 C_3^1 A_4^1}{A_6^4} + 5 \times \frac{C_2^1 C_4^1 A_4^1}{A_6^5} + 6 \times \frac{C_2^1 C_5^1 A_4^1}{A_6^6} = \frac{14}{3}$.

(文) A 由于四位整数小于 2 000, 故最高位必是 1, 只需考虑后三位. 又有且仅有两个数字相同, 故分为两类: 第一类: 若 1 重复, 则有 $C_3^1 A_9^2$ 个四位整数符合要求; 第二类: 若 1 不重复, 则有 $C_3^1 C_2^2 C_9^1$ 个四位整数符合要求. 因此, 共有 $C_3^1 A_9^2 + C_3^1 C_2^2 C_9^1 = 432$ 个数四位整数符合要求. 故有且仅有两个数字相同的概率 $P = \frac{432}{1\ 000} = 0.432$, 应选 A.

评析 本题考查概率问题的求解, 近几年概率问题的背景逐渐生活化, 但其根本问题仍为基本的概率模型, 考查实际应用与建模能力.

9. A $\begin{pmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}^2 =$

$$\begin{pmatrix} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{故应选 A.}$$

评析 本题为矩阵的运算考查, 属于新课标知识的渗透考查, 同时也考查了三角函数的基本公式.

10. C 第 1 次小圆先到 B, 第 2 次中圆到 C, 第 3 次小圆到 C; 第 4 次大圆到 B, 第 5 次小圆到 A, 第 6 次中圆到 B, 第 7 次小圆到 B, 共 7 次, 故应选 C.

评析 本题考查分类与分步的数学思想方法, 但其应属于算法流程的初步思想, 源于新课标算法内容, 考查考生合理论科学分析问题与处理问题的能力.

11. D 设 $a_n = a_1 q^{n-1}$, 则 ① $\frac{a_n + a_{n+1}}{a_{n-1} + a_n} = \frac{a_1 q^{n-1} + a_1 q^n}{a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}} = q (q \neq -1)$, 所以 ① 不正确; ② $\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = \frac{a_1 q^n - a_1 q^{n-1}}{a_1 q^{n-1} - a_1 q^{n-2}} = q$, $\therefore$

$\{a_{n+1} - a_n\}$ 为等比数列; ③ $\frac{a_n}{a_{n+1}} \div \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1$, $\therefore \left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ 为等

比数列; ④ $\frac{na_n}{(n-1)a_{n-1}} = \frac{n \cdot q}{(n-1)}$, 则 $\{n \cdot a_n\}$ 不是等比数列, 故选 D.

评析 本题属于一道数列开放题, 考查逻辑推导与思维的严密性, 是一道综合性较高的考题.

12. C 设 $P(x, y)$, 不妨设 $y > 0$, 过点 P 作 x 轴的垂线 PH, 垂足为 H, 则

$$\tan \angle PA_1 H = \frac{y}{x - a}, \tan \angle PA_2 H =$$

$$\frac{y}{x - a} \quad (\text{其中 } a^2 = 2\ 006),$$

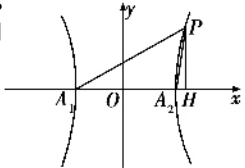
$$\therefore \tan \angle PA_1 H \cdot \tan \angle PA_2 H = \frac{y^2}{x^2 - a^2}$$

$$= 1, \therefore \angle PA_1 H + \angle PA_2 H = \frac{\pi}{2},$$

设 $\angle PA_1 A_2 = \theta$, 则 $\angle PA_2 H = 5\theta$, $\therefore \theta + 5\theta = \frac{\pi}{2}$, $\therefore \theta = \frac{\pi}{12}$, 即

$\angle PA_1 A_2 = \frac{\pi}{12}$, 故选 C.

评析 本题考查双曲线综合问题, 对于此类问题, 在解决过程中要注意充分使用已知条件, 寻找其中的隐含条件, 利用其中的角之间的关系, 尤其是涉及到有关直线问题时, 常常要注意考虑对应直线的斜率情况.



13. 2 006 由 $m \parallel n$ 可得 $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = 2\ 006$,

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} + \tan 2\alpha = \frac{1}{\cos 2\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = 2\ 006.$$

评析 本题考查向量与三角的综合运算, 向量的平行的充要条件及三角函数倍角公式与化简的应用, 是高考考查的一个重要方向.

14. 20 设参加考试的人数为 n 人, 则两个同时被招进来的概率 $P = \frac{C_{n-2}^3}{C_n^5} = \frac{1}{19} \Rightarrow n = 20$.

评析 本题是一道逆向考查实际应用的概率问题, 本题从一个图片, 一段对话入手, 显示了概率在生活中的应用.

15. $(3, -1)$ 设 $a = (h, k)$, 则曲线 $C_1: \frac{|x|}{2} - \frac{|y-3|}{3} = 1$, 按向量 a

平移得 $C_2: \frac{|x-h|}{2} - \frac{|y-k-3|}{3} = 1$, 即为 $C_2: \frac{|x+1|}{2} - \frac{|y|}{3} = 1$,

所以得 $a = (-1, -3)$.

设 $b = (x, y)$, 则有 $\begin{cases} -x-3y=0 \\ x-y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$, 即 $b = (3, -1)$.

16. $162 - 72\sqrt{2}$ 由正方形的对称性, α 最大的实际有效变角为

$45^\circ, \alpha \in [0, 45^\circ]$, 在正方形的顶点处, 设 α 的对边为 x ,

$$\therefore 3 = x + \frac{x}{\sin \alpha} + \frac{x}{\tan \alpha}, x = \frac{3 \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha + 1},$$

$$\therefore \text{增加的面积为 } S = 4 \times 2 \times \frac{x^2}{\tan \alpha} = \frac{72 \sin \alpha \cos \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha + 1)^2}, \text{故把魔方的中间一层转动 } \alpha \text{ 后, 魔方的表面积为 } 54 + \frac{72 \sin \alpha \cos \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha + 1)^2};$$

$$\text{令 } t = \sin \alpha + \cos \alpha \in [1, \sqrt{2}], S = \frac{36(t^2 - 1)}{(t + 1)^2} = 36 - \frac{72}{t + 1}, \text{当 } t =$$

$\sqrt{2}$, 即 $\alpha = 45^\circ$ 时, S 达到最大, 总表面积最大值为 $162 - 72\sqrt{2}$.
 评析 本题的设计灵感来自于电视广告中的动画, 检测考生的数学建模能力与三角变换能力, 此题又是来源于新课标立体几何三视图题型变化. 从数学应用题设计的角度考查空间想象与实际应用能力.

17. (1) $2\sqrt{2}(\sin^2 A - \sin^2 C) = (a - b) \sin B$, 又 $2R = 2\sqrt{2}$, 由正弦定理得:

$$2\sqrt{2}[(\frac{a}{2R})^2 - (\frac{c}{2R})^2] = (a - b) \frac{b}{2R}, \therefore a^2 - c^2 = ab - b^2, a^2 + b^2 - c^2 = ab,$$

$$\text{由余弦定理得 } 2ab \cos C = ab, \therefore \cos C = \frac{1}{2}, \therefore 0 < C < \pi, \therefore C = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{解法一 } S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ab \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} 2R \sin A \cdot 2R \sin B = 2\sqrt{3} \sin A \sin B = -\sqrt{3} [\cos(A + B) - \cos(A - B)].$$

$$\therefore A + B = \frac{2\pi}{3}, \therefore S = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \cos(A - B), \text{故当 } \cos(A - B) = 1,$$

$$\text{即 } A = B = \frac{\pi}{3} \text{ 时, } S_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{解法二 } S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ab \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} 2R \sin A \cdot 2R \sin B = 2\sqrt{3} \sin A \sin B$$

$$= 2\sqrt{3} \sin A \sin(\frac{2\pi}{3} - A) = 2\sqrt{3} \sin A (\sin \frac{2\pi}{3} \cos A - \cos \frac{2\pi}{3} \sin A)$$

$$= 2\sqrt{3} \sin A (\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A) = \sqrt{3} (\sqrt{3} \sin A \cos A + \sin^2 A)$$

$$= \sqrt{3} [\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2A + \frac{1}{2} (1 - \cos 2A)] = \sqrt{3} (\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2A - \frac{1}{2} \cos 2A) +$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \sin(2A - \frac{\pi}{6}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{当 } 2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } S_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

评析 本题考查三角函数基本知识, 正弦定理与余弦定理的应用, 边角变换及三角变换是一个难点, 另外正弦定理的选择也是解题策略中易出现盲点的问题.

18. (1) 设取球次数为 ξ_1 , 则 $P(\xi_1 = 1) = \frac{C_2^1}{C_{10}^1} = \frac{1}{5}, P(\xi_1 = 2) = \frac{C_8^1}{C_{10}^1}$

$$\times \frac{C_2^1}{C_{10}^1} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25}.$$

$$\text{所以最多取两次的概率 } P = \frac{1}{5} + \frac{4}{25} = \frac{9}{25}.$$

$$(2) \text{由题意知, 可以如下取球: 红白白、白红白、白白红、白白蓝四种情况, 所以恰有两次取到白球的概率为 } P = \frac{5}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times 3 + \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{153}{1000}.$$

$$(3) \text{(只理科做) 设取球次数为 } \xi, \text{ 则 } P(\xi = 1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}, P(\xi = 2) = \frac{8}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{25}, P(\xi = 3) = \frac{8}{10} \times \frac{8}{10} \times (\frac{2}{10} + \frac{8}{10}) =$$

$\frac{16}{25}$, 则分布列为

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{16}{25}$

$$\text{取球次数的数学期望为 } E\xi = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{4}{25} + 3 \times \frac{16}{25} = \frac{61}{25}.$$

评析 本题是一道常见的概率题, 考查考生分析问题解决问题的能力, 其命题情境为常见的有放回取球概率模型.

19. (理) $\because f(x)$ 为二次函数, 且 $f(-5) = f(7)$, $f(x)$ 的对称轴为 $x = 1$.

$$\text{设 } f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0), \text{ 则 } -\frac{b}{2a} = 1, \therefore b = -2a,$$

$$\therefore f'(x) = 2ax - 2a, \therefore f'(5) = 8a > 0, \therefore a > 0. \therefore f(x) \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上递增.}$$

$$\text{而 } t^2 - 2t \sin \alpha + 2 = (t - \sin \alpha)^2 + 2 - \sin^2 \alpha \geq 2 - \sin^2 \alpha \geq 1, \text{ 且 } 2 - \cos \alpha \geq 1.$$

$$\therefore f(t^2 - 2t \sin \alpha + 2) \geq f(2 - \cos \alpha) \Rightarrow t^2 - 2t \sin \alpha + 2 \geq 2 - \cos \alpha \Rightarrow t^2 - 2t \sin \alpha + \cos \alpha \geq 0.$$

$$\text{于是问题等价于 } t^2 - 2t \sin \alpha + \cos \alpha \geq 0 \text{ 对任意实数 } t \text{ 恒成立,} \therefore \Delta = 4 \sin^2 \alpha - 4 \cos \alpha \leq 0, \text{ 即 } \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 \geq 0,$$

$$\text{解得 } \cos \alpha \geq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ 或 } \cos \alpha \leq \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore 2k\pi - \arccos \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \leq \alpha \leq 2k\pi + \arccos \frac{\sqrt{5} - 1}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{故所求角 } \alpha \text{ 的取值范围为 } 2k\pi - \arccos \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \leq \alpha \leq 2k\pi + \arccos \frac{\sqrt{5} - 1}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

(文) $\because f(x)$ 为二次函数且 $f(-5) = f(7)$, 则 $f(x)$ 的对称轴为 $x = 1$.

$$\text{设 } f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0), \text{ 则 } -\frac{b}{2a} = 1, \therefore b = -2a,$$

$$\therefore f(-1) = f(3).$$

$$\therefore f'(x) = 2ax - 2a, \therefore f'(5) = 8a > 0, \therefore a > 0. \therefore f(x) \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上递增.}$$

$$\text{而 } t^2 - 2mt + 2m^2 + 2 = (t - m)^2 + m^2 + 2 \geq 2 > 1.$$

$$\therefore f(t^2 - 2mt + 2m^2 + 2) \geq f(3) \Rightarrow t^2 - 2mt + 2m^2 + 2 \geq 3 \Rightarrow t^2 - 2mt + 2m^2 - 1 \geq 0.$$

$$\text{于是问题等价于 } t^2 - 2mt + 2m^2 - 1 \geq 0 \text{ 对任意实数 } t \text{ 恒成立,} \therefore \Delta = 4m^2 - 4(2m^2 - 1) \leq 0, \text{ 即 } 1 - m^2 \leq 0, \text{ 解得 } m \geq 1, \text{ 或 } m \leq -1.$$

故所求 m 的取值范围为 $m \geq 1$, 或 $m \leq -1$.

评析 本题以二次函数导数为入口, 综合了三个二次问题, 将不等式的恒成立问题与导数知识巧妙结合, 理科题是三角有界性讨论, 文科题是二次函数字母讨论, 分类标准是整个问题的关键, 等价转化是问题解决的手段.

20. (1) 在 $\triangle PAB$ 中, $AP = a, AB = \sqrt{2}a, \angle PAB = 45^\circ$,
 $\therefore PB^2 = AP^2 + AB^2 - 2AP \cdot AB \cos PAB = a^2 + 2a^2 - 2a \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = a^2$,

$$\therefore AP^2 + PB^2 = 2a^2 = AB^2. \therefore \triangle APB \text{ 是直角三角形, 且 } AP \perp PB.$$

$$\text{又 } AP, DE \text{ 都在平面 } PAB \text{ 内, 且 } DE \perp PB,$$

$$\therefore AP \parallel DE, \text{ 故 } AP \parallel \text{平面 } DEC.$$

$$(2) \text{(理) 如图, 建立空间直角坐标系. 由已知, 得 } A, B, C \text{ 三点的坐标分别为 } A(0, a, 0), B(\frac{2}{3}a,$$

$$0, \frac{\sqrt{3}}{3}a), C(a, 0, 0). \therefore \vec{AC} = (a,$$

$$-a, 0), \vec{AB} = (\frac{2}{3}a, -a, \frac{\sqrt{3}}{3}a).$$

$$\text{但 } \vec{AD} = \frac{1}{2} \vec{AB} = (\frac{a}{3}, -\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}a),$$

$$\vec{CD} = \vec{AD} - \vec{AC} = (-\frac{2}{3}a, \frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}a),$$

$$\therefore D \text{ 是 } AB \text{ 的中点, } DE \parallel AP,$$

$$\therefore E \text{ 是 } PB \text{ 的中点, 且 } \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BP} = \left(-\frac{a}{3}, 0, -\frac{\sqrt{5}}{6}a\right).$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \langle \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BE} \rangle &= \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{CD}| |\overrightarrow{BE}|} = \\ &= \frac{-\frac{2}{3}a \times \left(-\frac{a}{3}\right) + \frac{a}{2} \times 0 + \frac{\sqrt{5}}{6}a \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{6}a\right)}{\sqrt{\left(-\frac{2}{3}a\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{6}a\right)^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{5}}{6}a\right)^2}} \\ &= \frac{\frac{2}{9}a^2 - \frac{5}{36}a^2}{\frac{\sqrt{30}}{6} \times \frac{1}{2}a^2} = \frac{\sqrt{30}}{30}. \end{aligned}$$

(文) 在 $\triangle PAC$ 中, 同(1)理, 得 $AP \perp PC$, 而 $PC \cap PB = P$, $\therefore AP \perp$ 平面 PBC .

又平面 PAC 与平面 DEC 有一公共点 C , 且 $AP \parallel$ 平面 DEC , 设平面 $PAC \cap$ 平面 $DEC = l$, 则 $C \in l$, 且 $AP \parallel l$, $\therefore l \perp$ 平面 PBC 于 C .

$\therefore PC \perp l, CE \perp l$, 从而 $\angle PCE$ 即为所求二面角 $P-l-E$ 的平面角. 在 $\text{Rt} \triangle PAC$ 中, $\angle PAC = 45^\circ$, 故 $PA = PC = a$, 同时 $PB = a$.

又 D 是 AB 的中点, $DE \parallel AP$, 则 E 是 PB 的中点, 从而 $PE = \frac{1}{2}a$.

在 $\triangle PEC$ 中, $\cos BPC = \frac{2}{3}, PC = a, PE = \frac{1}{2}a$,

$$\therefore EC^2 = PE^2 + PC^2 - 2PE \cdot PC \cos BPC = \frac{1}{4}a^2 + a^2 - 2 \times \frac{1}{2}a$$

$$\times a \times \frac{2}{3} = \frac{7}{12}a^2.$$

$$\therefore EC = \sqrt{\frac{7}{12}}a.$$

$$\therefore \cos PCE = \frac{PC^2 + EC^2 - PE^2}{2PC \cdot EC} = \frac{a^2 + \frac{7}{12}a^2 - \frac{1}{4}a^2}{2a \times \sqrt{\frac{7}{12}}a} = \frac{4}{21} \sqrt{\frac{21}{1}}.$$

故所求二面角的余弦值为 $\frac{4}{21} \sqrt{\frac{21}{1}}$.

21. (1) $\because a = 1 > 0, \therefore f(x) = ax + b$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数,

$\therefore a_n = f(a_{n-1}) = a \cdot a_{n-1} + b = a_{n-1} + b, b_n = b_{n-1} + b (n \geq 2)$,

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 都是公差为 b 的等差数列.

又 $a_1 = 0, b_1 = 1, \therefore a_n = (n-1)b, b_n = 1 + (n-1)b$.

(2) $\because a > 0, b_n = ab_{n-1} + b, \therefore \frac{b_n}{b_{n-1}} = a + \frac{b}{b_{n-1}}$,

由 $\{b_n\}$ 是等比数列, 知 $\frac{b}{b_{n-1}}$ 为常数,

又 $\{b_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列, 则 b_{n-1} 不为常数, $\therefore$ 必有 $b = 0$.

(3) $\because a > 0, \therefore a_n = a \cdot a_{n-1} + b, b_n = a \cdot b_{n-1} + b, \therefore b_n - a_n = a(b_{n-1} - a_{n-1})$,

$\therefore \frac{b_n - a_n}{b_{n-1} - a_{n-1}} = a$, 数列 $\{b_n - a_n\}$ 是等比数列.

$\therefore b_n - a_n = (b_1 - a_1)a^{n-1} = a^{n-1}$.

$$\therefore T_n - S_n = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_n - a_n) =$$

$$\begin{cases} n, (a=1), \\ \frac{1-a^n}{1-a}, (a \neq 1). \end{cases}$$

$$\therefore (T_1 + T_2 + \cdots + T_{2006}) - (S_1 + S_2 + \cdots + S_{2006}) = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_{2006} - a_{2006}) = \begin{cases} 2006, (a=1), \\ \frac{1-a^{2006}}{1-a}, (a \neq 1). \end{cases}$$

评析 本题主要考查数列的递推及等差数列、等比数列的基础知识, 将函数的参数式列入题目之中, 考查了考生灵活的应答能力和严谨的思维.

22. (1) 过 $A(0, -b), B(a, 0)$ 的直线方程为 $bx - ay - ab = 0$.

$$\text{由距离公式得 } \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 又 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

解得 $b = 1, a = \sqrt{3}$. 所以, 双曲线方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

(2) 由 $\begin{cases} \frac{x^2}{3} - y^2 = 1, \\ y = kx + m, \end{cases}$ 消去 y ,

$$\text{得 } (3k^2 - 1)x^2 + 6kmx + 3(m^2 + 1) = 0, \quad ①$$

从题设知 $3k^2 - 1 \neq 0, \Delta = (6km)^2 - 12(3k^2 - 1)(m^2 + 1) > 0$,

$$\therefore m^2 - 3k^2 + 1 > 0. \quad ②$$

设 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$, CD 中点 $P(x_3, y_3)$,

$\therefore C, D$ 两点在以 A 为圆心的同一个圆上, $\therefore P$ 点为 CD 中点, 且 $AP \perp CD$.

$$\text{从 } ① \text{ 式得 } x_1 + x_2 = \frac{-6km}{3k^2 - 1}, \text{ 所以 } x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3km}{3k^2 - 1}.$$

由 $P(x_3, y_3)$ 在直线 $y = kx + m$ 上, 得 $y_3 = kx_3 + m = -\frac{3k^2 m}{3k^2 - 1} + m =$

$$\frac{-m}{3k^2 - 1}.$$

$$\text{所以 } k_{AP} = \frac{\frac{-m}{3k^2 - 1} + 1}{\frac{-3km}{3k^2 - 1}} = \frac{-m + 3k^2 - 1}{-3km},$$

由于 $AP \perp CD$, 故 $\frac{-m + 3k^2 - 1}{-3km} \cdot k = -1$,

化简得 $3k^2 = 4m + 1, \quad ③$

综上得 k, m 间的关系 $3k^2 = 4m + 1$, 且 $m^2 - 3k^2 + 1 > 0$.

(3) 由 $3k^2 = 4m + 1 > 0 (k \neq 0)$, 得 $m > -\frac{1}{4}$.

由 $\begin{cases} 3k^2 = 4m + 1 \\ m^2 - 3k^2 + 1 > 0 \end{cases}$ 消去 k , 得 $m^2 - (4m + 1) + 1 > 0$,

即 $m^2 - 4m > 0$. 解得 $m < 0$, 或 $m > 4$.

所以 $-\frac{1}{4} < m < 0$, 或 $m > 4$.

评析 本题考查了考生对曲线轨迹问题的处理, 其中对参数问题的探讨, 是作为高考热点考查的一个猜想.

2006 年全国百校联盟高考《考试大纲》调研卷(六)

考纲分析与考向预测 从 2006 年考纲所作调整来看, 既保持以往大纲的连续性, 又有新的突破. 从“了解正弦函数、余弦函数、正切函数的图象和性质”到“理解正弦函数、余弦函数、正切函数的图象和性质”, 明显可以感觉到三角这部分的重心转移到对三角函数图象和性质的考查. “理解椭圆的参数方程”到“了解椭圆的参数方程”, 表面上对椭圆的参数方程的考查在削弱, 但参数方程的概念和参数思想并未削弱, 如会用参数法在圆或抛物线等中设参数点, 会用交轨法求轨迹方程等.

相关事宜	难度系数	平均分	最高分	140 分以上人数百分比	130 ~ 140 分人数百分比	120 ~ 130 分人数百分比	110 ~ 120 分人数百分比	100 ~ 110 分人数百分比
测试学校								
黄冈高级中学	0.56	112	148	4.2%	6.1%	10.2%	11.3%	16.2%

测试评价与备考策略 本套试卷从总体来看, 知识点分布合理, 难度适中, 预测性强, 能够很好地考查学生对基础知识和基本方法的掌握情况. 通过测试, 也能暴露学生中存在的一些问题, 如:

(1) 学生对基础知识仍需进一步强化训练, 如第 4 题、第 11 题、第 13 题、第 17 题等, 虽然考查的知识点简单, 但学生往往会因基础知识不扎实、不熟练而导致失分.

(2) 面对新颖情景、新的信息, 学生可能会深入理解, 无从下手, 如第 12 题、15 题、22 题等, 反映了学生的创新能力还很薄弱, 须在今后的学习中进一步加强.

(3) 推理不严密, 叙述不准确, 过程存在缺陷, 如第 18 题、20 题等, 虽然大致思路正确, 但中间过程分析不到位, 导致失分.

针对 2006 年高考大纲, 建议考生在复习备考中, 在继续强化对基础知识、基本方法学习和训练的同时, 加强对创新型的训练, 做到遇新题不慌, 迎难而上. 再就是在平日学习中注重对解题步骤的训练, 提高解题的规范性, 克服“眼高手低”的毛病.

1. (理) B 由于复数 $z = \cos \theta + i \sin \theta (\theta \in \mathbb{R})$ 在复平面上对应的点是 $(\cos \theta, \sin \theta)$, 依题意应有 $\cos \theta + 2 \sin \theta = 0$, 所以 $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -2$.

(文) D 由于 $f(-x) = 2^{1-|x|} = 2^{|x|} = f(x)$, 所以函数 $f(x) = 2^{|x|}$ 是偶函数, 又因为当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = 2^x$ 是单调递增函数, 所以选项 D 正确.

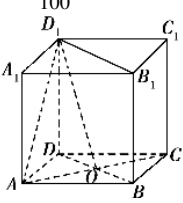
2. B 当 $n=1$ 时, $S_1 = a_1 = 1$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \log_5 (n+4) - \log_5 (n+3) = \log_5 \frac{n+4}{n+3} = \log_5 (1 + \frac{1}{n+3})$, 显然关于 n 单调递减.

3. C 要使函数有意义, 应有 $\frac{|x|}{1-x} - 1 > 0$, 该不等式等价于 $\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} - 1 > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < 0 \\ \frac{-x}{1-x} - 1 > 0 \end{cases}$, 解第一个不等式组得 $\frac{1}{2} < x < 1$, 第二个不等式组无解, 所以原函数的定义域是 $(\frac{1}{2}, 1)$.

4. (理) A 依题意有 $a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, 所以 $E\xi = \frac{1}{3}m + \frac{2}{3}n = 2$, 即 $m + 2n = 6$, 又 $D\xi = \frac{1}{3}(m-2)^2 + \frac{2}{3}(n-2)^2 = 2n^2 - 8n + 8 = 2(n-2)^2$, 所以当 $n=2$ 时, $D\xi$ 取最小值为 0.

(文) A 若设高三学生数为 x , 则高一学生数为 $\frac{x}{2}$, 高二学生数为 $\frac{x}{2} + 300$, 所以有 $x + \frac{x}{2} + 300 + \frac{x}{2} = 3500$, 解得 $x = 1600$, 故高一学生数为 800, 因此应抽取高一学生数为 $\frac{800}{1000} = 8$.

5. C 如图所示, 连结 AC 与 BD , 交于点 O , 连结 D_1O , 则 $\angle AD_1O$ 就是 AD_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角. 设 $AB = a$, $AA_1 = b$, A_1 则有 $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, 所以 $\sin \angle AD_1O = \frac{AO}{AD_1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + b^2}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $\angle AD_1O \in (0, \frac{\pi}{4})$.



6. D 因为 $f(x) = (1-ax)^6$, 所以 $g(x) = 6(1-ax)^5 \cdot (-a) = -6a(1-ax)^5$. 在 $(1-ax)^5$ 的展开式中, 通项 $T_{r+1} = (-1)^r C_5^r (ax)^r$, 令 $r=2$ 得 x^2 项的系数为 $10a^2$, 故在 $g(x)$ 的展开式中, 含 x^2 项的系数等于 $-60a^3$, 由题意得 $-60a^3 = -480$, 所以 $a=2$.

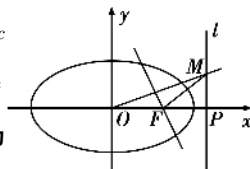
7. D 相邻最大值和最小值点的斜率可以取到最大, 则可以取 $\frac{\pi x}{k} = -\pi$, $\frac{\pi x}{k} = 0$ 对应的点, 即点 $A(-k, -\sqrt{3})$ 和 $B(0, \sqrt{3})$, 由斜率公式可得 $\frac{\sqrt{3} - (-\sqrt{3})}{0 - (-k)} = \sqrt{3}$, 所以 $k=2$, 则 $f(x) = \sqrt{3} \cos \frac{\pi x}{2}$, $f(x)$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$.

8. A 以平行六面体的顶点为顶点构成的四面体的个数为 $C_8^4 - 6 = 58$ 个, 以平行六面体的顶点为顶点构成的四棱锥的个数是 $12 \times 4 = 48$, 所以构成的四面体的个数与四棱锥的个数之和等于 $58 + 48 = 106$.

9. C 圆 $x^2 + y^2 = 2$ 沿向量 $a = (m, n)$ 平移后, 其圆心坐标为 (m, n) , 又圆与直线 $x - y - 4 = 0$ 相切, 所以 $\frac{|m - n - 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 解得 $|m - n - 4| = 2$, 所以 $m - n = 6$ 或 $m - n = 2$, 若 $m - n = 6$, 则 $|a|^2 = m^2 + n^2 = (n+6)^2 + n^2 = 2n^2 + 12n + 36 = 2(n+3)^2 + 18$, 所以当 $n = -3$ 时 $|a|$ 取最小值 $3\sqrt{2}$. 而当 $m - n = 2$ 时, $|a|^2 = m^2 + n^2 = (n+2)^2 + n^2 = 2n^2 + 4n + 4 = 2(n+1)^2 + 2$, 所以当 $n = -1$ 时, $|a|$ 取最小值 $\sqrt{2}$, 综上知使得 $|a|$ 最小的向量 a 为 $(1, -1)$.

10. B 如图所示, 由于线段 OM 的垂直平分线经过 F , 所以 $FO = FM = c$, 即在右准线 l 上, 应存在一点 M , 使得 $FM = c$, 而 F

到右准线 l 的距离为 $d = \frac{a^2}{c} - c = \frac{b^2}{c}$, 故有 $c \geq \frac{b^2}{c}$, 即 $c^2 \geq b^2 = a^2 - c^2$, 所以 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq e < 1$, 此即为离心率的取值范围.



11. C 由于 $f(\frac{11}{6}) = f(\frac{11}{6} - 1) - 1 = f(\frac{5}{6}) - 1 = f(\frac{5}{6} - 1) - 2 = f(-\frac{1}{6}) - 2 = \sin(-\frac{\pi}{6}) - 2 = -\frac{5}{2}$, 所以 $f(\frac{11}{6}) + f(m) = -\frac{5}{2} + \sin(m\pi) = -2$, 所以 $\sin(m\pi) = \frac{1}{2}$, 根据 $-2 < m < 0$ 可知, $m = -\frac{7}{6}$ 或 $m = -\frac{11}{6}$.

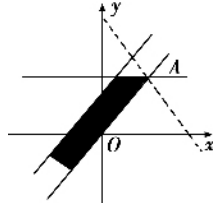
12. (理) D 最多可以是 8 粒. 将这 8 粒中的 6 粒分别放在天平两侧, 各 3 粒, 若平衡, 则较轻的珠子在剩下的两粒中, 只需再量一次即可找出. 若天平不平衡, 则较轻的珠子在偏轻的一端, 取其中 2 粒分别放在天平两侧称量一次即可找出.

(文) B 将这 7 粒中的 6 粒分别放在天平两侧, 各 3 粒, 若平衡, 则较轻的珠子就是剩下的那粒. 若天平不平衡, 则较轻的珠子在偏轻的一端, 取其中 2 粒分别放在天平两侧称量一次即可找出, 所以最多称量两次即可找出.

13. (理) $[2, +\infty)$ 因为函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续, 所以函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处连续, 而 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3m+9$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -3$, 所以有 $3m+9 = -3$, 解得 $m = -4$. 结合函数图象可知函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[2, +\infty)$.

评析 本题主要考查连续函数的意义和函数单调区间的求法, 同时也考查了分段函数的知识, 函数的单调性和单调区间是函数性质的重要方面, 以分段函数为载体, 与函数的连续性融合在一起, 重在考查学生对基础知识和基本方法的掌握和灵活运用. 另外, 本题在解答中, 若结合函数图象, 将更直观, 因此对数形结合思想方法的考查也是本题的一个意图所在.

(文) 15 在平面直角坐标系中画出不等式组 $\begin{cases} -3 \leq x - y \leq 0 \\ y \leq 5 \end{cases}$ 表示的平面区域, 如右图, 令 $x + 2y = z$, 则 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{z}{2}$, 因此当直线 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{z}{2}$ 经过区域中的 A 点时, z 取到最大值, 而由 $\begin{cases} x - y = 0 \\ y = 5 \end{cases}$ 得 $A(5, 5)$, 所以 $x + 2y$ 的最大值是 15.

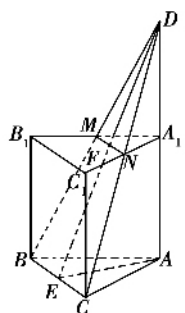


评析 本题主要考查线性规划问题. 线性规划作为新增内容, 它与不等式问题、直线方程问题密切相关, 同时也能考查学生的作图能力、识图能力、计算能力, 因此一直是高考命题的热点内容.

14. (-1, 3) 设 AA' 与向量 $\overrightarrow{PB}$ 所在直线相交于 M 点, 则 $|\overrightarrow{PM}| = |\overrightarrow{PA}| \cdot \cos \langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB} \rangle = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{25}{5\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, 所以 $\overrightarrow{PM} = \frac{\sqrt{5}}{5} \overrightarrow{PB} = (1, 2)$, 因此 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PA} = (-2, 1)$, 所以 $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{AM} = (-1, 3)$.

评析 本题也可取特殊点来解, 设 P 为原点快速求解.

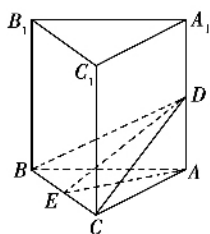
15. (理) 6 设截面与侧棱 AA_1 所在直线交于 D 点, 取 BC 中点 E, 连结 AE、DE. $\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore AE \perp BC$. $\because A_1A \perp$ 平面 ABC , $\therefore DE \perp BC$. $\therefore \angle DEA$ 为截面与底面所成二面角的平面角, $\therefore \angle DEA = 30^\circ$. $\therefore$ 等边 $\triangle ABC$ 边长为 4, $\therefore AE = 2\sqrt{3}$. 在 $Rt\triangle DAE$ 中, $DA = AE \tan \angle DEA = 2$, 所以 D 点在 AA_1 的延长线上, 如右图, 截面为梯形 BCNM. $\because AD = 2, AA_1 = 1, \therefore MN$ 是 $\triangle DBC$ 的中位线.



$\therefore S_{\text{梯形}BCNM} = \frac{3}{4} S_{\triangle DBC} = \frac{3}{4} \times 8 = 6$.

(文) 8 假设截面与侧棱 AA_1 所在直线交于 D 点, 取 BC 中点 E, 连结 AE、DE.

∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore AE \perp BC$.
 $\therefore A_1A \perp$ 平面 ABC , $\therefore DE \perp BC$. $\therefore$
 $\angle DEA$ 为截面与底面所成二面角的平面角,
 $\therefore \angle DEA = 30^\circ$.
 $\therefore$ 等边 $\triangle ABC$ 边长为 4, $\therefore AE = 2\sqrt{3}$.
 在 $Rt\triangle DAE$ 中, $DA = AE \tan \angle DEA = 2$. 所以 D 点在侧棱 AA_1 上, 如右图, 截面为 $\triangle BCD$.



在 $Rt\triangle DAE$ 中, $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = 4$.
 $\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot DE = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$.

评析 本题主要考查了立体几何中有关截面的问题, 涉及多面体的截面问题, 一般都要先确定截面形状, 再解决问题, 因此这类问题实质也是立体几何的综合问题, 在计算面积和体积之前, 也要有推理论证的过程, 这是高考立体几何试题的特点. 本题在解答时, 要特别注意侧棱长与截面形状的关系.

16. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ 设 $P(\frac{y^2}{2}, y)$ 是抛物线上任意一点, 则 P 到直线 $x + y + 5 = 0$ 的距离为 $d = \frac{|\frac{y^2}{2} + y + 5|}{\sqrt{2}}$, 所以 $d = \frac{y^2 + 2y + 10}{2\sqrt{2}} = \frac{(y+1)^2 + 9}{2\sqrt{2}}$, 故当 $y = -1$ 时, 距离 d 取得最小值 $\frac{9\sqrt{2}}{4}$, 此即为直线 $x + y + 5 = 0$ 与抛物线 $y^2 = 2x$ 的距离.

评析 本题是一个信息迁移题, 以新给出的定义“两个图形的距离”为载体考查了直线、抛物线以及有关的代数运算和方法等. 在每年的高考试题中都不乏出现一些源于课本, 而又背景新颖的题目. 而此处以新定义为依托进行考查, 是对学生的基本能力的深层次考查. 另外, 此题的解答还可以利用导数的几何意义联系切线进行求解.

17. (1) 由 $2S = \sqrt{3}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC})$ 得, $2 \cdot \frac{1}{2} ac \sin B = \sqrt{3} \cdot c \cos(\pi - B)$, 整理得 $\tan B = -\sqrt{3}$, 所以 $B = 120^\circ$.

(2) 因为 $S = 3\sqrt{3}$, 所以 $\frac{1}{2} ac \sin B = 3\sqrt{3}$, 由 (1) 知 $B = 120^\circ$, 所以 $\frac{1}{2} ac \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$, 得 $ac = 12$,

又由余弦定理得 $\cos 120^\circ = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, 所以 $a^2 + c^2 - b^2 = -12$, $(a+c)^2 - 2ac - b^2 = -12$, 即 $(a+c)^2 - b^2 = 12$, 又因为三角形周长为 $6 + 4\sqrt{3}$, 所以 $a + b + c = 6 + 4\sqrt{3}$. 于是得 $a + c - b = 4\sqrt{3} - 6$, 因此得 $a + c = 4\sqrt{3}$, $b = 6$, 又 $ac = 12$, 所以解得 $a = c = 2\sqrt{3}$. 故三角形的三边长分别为 $a = 2\sqrt{3}$, $b = 6$, $c = 2\sqrt{3}$.

评析 在知识点的交汇处命题一直是高考命题所倡导和看重的, 本题以三角形为载体巧妙地将平面向量与三角函数有关知识融合在一起进行考查, 视角新颖独特, 能够很好地考查学生的基础知识和基本技能.

18. (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $a_{k+1} = q^k$, $a_{k+3} = q^{k+2}$, $a_{k+2} = q^{k+1}$, 依题意得 $2q^{k+2} = q^k + q^{k+1}$, 由于 $q^k \neq 0$, 所以 $2q^2 - q - 1 = 0$, 解得 $q = 1$ 或 $q = -\frac{1}{2}$.

(2) 当 $q = 1$ 时, $S_{k+1} = (k+1)a_1 = k+1$, $S_{k+3} = k+3$, $S_{k+2} = k+2$, 显然 $S_{k+1} + S_{k+2} = k+1 + k+2 = 2k+3 \neq 2S_{k+3}$, 故 S_{k+1} , S_{k+3} , S_{k+2} 不能构成等差数列;

当 $q = -\frac{1}{2}$ 时, $S_{k+1} = \frac{1 - (-\frac{1}{2})^{k+1}}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3} [1 - (-\frac{1}{2})^{k+1}]$,

同理可得 $S_{k+2} = \frac{2}{3} [1 - (-\frac{1}{2})^{k+2}]$, $S_{k+3} = \frac{2}{3} [1 - (-\frac{1}{2})^{k+3}]$,

于是 $S_{k+1} + S_{k+2} = \frac{2}{3} [1 - (-\frac{1}{2})^{k+1}] + \frac{2}{3} [1 - (-\frac{1}{2})^{k+2}]$

$= \frac{4}{3} [1 - (-\frac{1}{2})^{k+1} - (-\frac{1}{2})^{k+2}] = \frac{4}{3} [1 - (-\frac{1}{2})^{k+2}] = 2S_{k+3}$, 所以 S_{k+1} , S_{k+3} , S_{k+2} 能构成等差数列.

综上所述: 当 $q = 1$ 时, S_{k+1} , S_{k+3} , S_{k+2} 不能构成等差数列; 当 $q = -\frac{1}{2}$ 时能构成等差数列.

评析 等差数列和等比数列是两种重要的数列, 高考对数列问题的考查主要以这两种数列为主, 本题通过新颖别致的设问方式综合考查了两种数列的有关公式和方法, 特别是在第 (2) 问的解答中, 需要用到分类讨论的数学思想方法, 这不仅在数列中, 在其他知识中也会经常用到这一思想, 预测今年的高考试题中仍会有这方面的题目.

19. (1) 从 3 种服装商品、2 种家电商品、4 种日用商品中, 选出 3 种商品, 一共可以有 C_9^3 种不同的选法.

选出的 3 种商品中, 没有日用商品的选法有 C_5^3 种, 所以选出的 3 种商品中至少有一种日用商品的概率为 $P = 1 - \frac{C_5^3}{C_9^3} = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$.

(2) (理) 假设商场将中奖奖金数额定为 x 元, 则顾客在三次抽奖中所获得的奖金总额是一随机变量 ξ , 其所有可能的取值为 0, x , $2x$, $3x$.

$\xi = 0$ 时表示顾客在三次抽奖中都没有获奖, 所以 $P(\xi = 0) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$, 同理可得 $P(\xi = x) = C_3^1 (\frac{1}{2}) (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{8}$, $P(\xi = 2x) = C_3^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$, $P(\xi = 3x) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

于是顾客在三次抽奖中所获得的奖金总额的期望值是 $E\xi = 0 \times \frac{1}{8} + x \cdot \frac{3}{8} + 2x \cdot \frac{3}{8} + 3x \cdot \frac{1}{8} = 1.5x$.

要使促销方案对商场有利, 应有顾客获奖奖金数的期望值不大于商场的提价数额, 因此应有 $1.5x \leq 180$, 所以 $x \leq 120$, 故商场应将中奖奖金数额最高定为 120 元, 才能使促销方案对自己有利.

(文) 要使所中奖金数不低于商场提价数, 则该顾客应中奖两次或三次, 分别得奖金 200 元和 300 元.

顾客每次抽奖时获奖与否是等可能的, 即每次中奖的概率都是 $\frac{1}{2}$, 所以中奖两次的概率是 $P_1 = C_3^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$,

中奖三次的概率是 $P_2 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$,

故中奖两次或三次的概率等于 $P = P_1 + P_2 = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. 即

所中奖金数不低于商场提价数的概率等于 $\frac{1}{2}$.

评析 本题考查概率的有关内容, 考查的知识点有组合、等可能性事件的概率、对立事件的概率、相互独立事件的概率、随机变量的期望等. 作为应用题, 本题的背景新颖, 设问独特, 并且贴近生活, 符合高考对应用题命题的特点和要求, 体现了数学知识来源于生活又服务于生活的原则.

20. 解法一 (1) 如右图, 在 C_1A_1 上取点

D , 使 $C_1D = \frac{1}{4} C_1A_1$, 连结 QD , B_1D ,

$\therefore CQ = \frac{1}{4} CA_1$, $\therefore QD \parallel CC_1 \parallel BB_1$.

易知 $BC = 2\sqrt{2}$, 所以 $BB_1 = BC = 2\sqrt{2}$.

又 $\therefore QD = \frac{3}{4} CC_1 = \frac{3}{4} BB_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} = B_1P$,

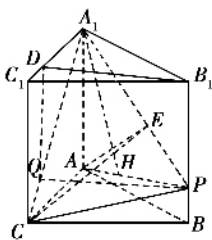
$\therefore$ 四边形 B_1PQD 为平行四边形, $\therefore PQ \parallel B_1D$.

又 $PQ \not\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$, $PQ \not\subset$ 平面 ABC , $B_1D \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$, $\therefore PQ \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$, 从而 $PQ \parallel$ 平面 ABC .

(2) $\therefore$ 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱, $\therefore A_1A \perp AC$, 又 $\angle BAC = 90^\circ$, $\therefore AC \perp$ 平面 A_1ABB_1 .

在平面 A_1ABB_1 中过 A_1 作 $A_1H \perp AP$, 又 $AC \perp A_1H$, $\therefore A_1H$ 为点 A_1 到平面 APC 的距离.

在 $\triangle A_1PA$ 中, $AB = 2$, $A_1A = BB_1 = 2\sqrt{2}$, $AP = \sqrt{AB^2 + PB^2} =$



$$\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle A_1 P} = \frac{1}{2} A_1 H \cdot AP = \frac{1}{2} A_1 A \cdot AB = 2\sqrt{2}, A_1 H = \frac{8}{3}, \text{即 } A_1$$

到平面 APC 的距离为 $\frac{8}{3}$.

(3) 在平面 $A_1 A B B_1$ 中过 A 作 $AE \perp A_1 P$, 交 $A_1 P$ 于点 E , 连结 CE , 则 AE 为 CE 在平面 $A_1 A B B_1$ 内的射影,

$\therefore CE \perp A_1 P$, $\therefore \angle AEC$ 为二面角 $C-A_1 P-B$ 的平面角.

在 $\triangle A_1 P A$ 中, $A_1 P = \sqrt{A_1 B_1^2 + P B_1^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$, $S_{\triangle A A_1 P} = 2\sqrt{2}$, $\therefore$

$$A_1 P \cdot AE = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore AE = \frac{8\sqrt{17}}{17}, \therefore \tan AEC = \frac{AC}{AE} = \frac{\sqrt{17}}{4}.$$

(理) $\therefore \angle AEC = \arctan \frac{\sqrt{17}}{4}$, 即二面角 $C-A_1 P-B$ 的大小为

$$\arctan \frac{\sqrt{17}}{4}.$$

(文) 所以 $\cos AEC = \frac{4\sqrt{33}}{33}$, 即二面角 $C-A_1 P-B$ 的余弦值为

$$\frac{4\sqrt{33}}{33}.$$

解法二 (1) $\because$ 三棱柱 $ABC-A_1 B_1 C_1$ 为直三棱柱, $A_1 A \perp AC$, $A_1 A \perp AB$, 又 $\angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore$ 可以点 A 为坐标原点, 以 AC 、 AB 、 AA_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 由已知得 $A(0,0,0)$ 、 $B_1(0,2,2\sqrt{2})$ 、 $C_1(2,0,2\sqrt{2})$ 、 $C(2,0,0)$ 、 $A_1(0,0,2\sqrt{2})$ 、 $P(0,2,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 、 $Q(\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$, 在 $C_1 A_1$

上取点 D , 使 $C_1 D = \frac{1}{4} C_1 A_1$, 则 D

$$(\frac{3}{2}, 0, 2\sqrt{2}),$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = (\frac{3}{2}, -2, 0), \overrightarrow{B_1 D} = (\frac{3}{2}, -2, 0), \therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{B_1 D},$$

$\therefore PQ \parallel B_1 D$, 又 $PQ \notin$ 平面 $A_1 B_1 C_1$, $PQ \notin$ 平面 ABC , $B_1 D \subset$ 平面 $A_1 B_1 C_1$,

$\therefore PQ \parallel$ 平面 $A_1 B_1 C_1$, 从而 $PQ \parallel$ 平面 ABC .

(2) $\overrightarrow{AP} = (0, 2, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\overrightarrow{CP} = (-2, 2, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 设平面 APC 的一个法向量为 $m = (a, b, 1)$,

$$\text{则} \begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \\ m \cdot \overrightarrow{CP} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} 2b + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ -2a + 2b + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } a = 0, b = -\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore m = (0, -\frac{\sqrt{2}}{4}, 1), \text{又 } \overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 2\sqrt{2}),$$

$$\therefore A_1 \text{ 到平面 } APC \text{ 的距离为 } \frac{\overrightarrow{AA_1} \cdot m}{|m|} = \frac{8}{3}.$$

(3) $\overrightarrow{CA_1} = (-2, 0, 2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{CP} = (-2, 2, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 设平面 $A_1 PC$ 的一个法向量为 $n = (c, d, 1)$, 则 $n \cdot \overrightarrow{CA_1} = 0$, $n \cdot \overrightarrow{CP} = 0$, $\therefore$

$$\begin{cases} -2c + 2\sqrt{2} = 0 \\ -2c + 2d + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}, \text{解得 } c = \sqrt{2}, d = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \therefore n = (\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{4}, 1).$$

又 $\overrightarrow{AC} \perp$ 平面 $A_1 A B B_1$,

$\therefore$ 所求得二面角的大小为 $\langle \overrightarrow{AC}, n \rangle$,

$$\text{而 } \overrightarrow{AC} = (2, 0, 0), \therefore \cos \langle \overrightarrow{AC}, n \rangle = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot n}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |n|} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{66} \times 2} = \frac{4\sqrt{33}}{33}.$$

(理) 所以二面角 $C-A_1 P-B$ 的大小为 $\arccos \frac{4\sqrt{33}}{33}$.

(文) 所以二面角 $C-A_1 P-B$ 的余弦值为 $\frac{4\sqrt{33}}{33}$.

评析 本题是一道立体几何的常规题目, 主要考查空间的线面位置关系的证明、点面距离和二面角的求解等. 高考命题一贯强调重点内容重点考查, 所以对立体几何知识的考查仍会以空间线面位置关系的证明、空间角的求解、空间距离的求解为主. 在这类问题的两种解法中, 仍要加强空间向量方法的训练, 特别是平面法向量的重要应用, 要注意通过典型问题, 强化训练, 熟练掌握用法向量证明和求解各种问题的方法步骤.

21. (1) 设动圆圆心 $P(x, y)$, 由于动圆经过点 $F(2, 0)$, 并且与直线 $x = -2$ 相切, 所以 P 到定点 $F(2, 0)$ 的距离与到定直线 $x = -2$ 的距离相等, 所以 P 点轨迹是一条抛物线, 其焦点为 F , 准线为 $x = -2$, 故轨迹方程为 $y^2 = 2px (p > 0)$, 且 $\frac{p}{2} = 2$, 所以轨

迹 M 的方程为 $y^2 = 8x$.

(2) (理) 如图, 因为 $\overrightarrow{OF} = m \overrightarrow{OA} + n \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OF} = r \overrightarrow{OC} + s \overrightarrow{OD}$, 且 $m + n = r + s = 1$, 所以 F, A, B 共线, F, C, D 也共线, 又 $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$, 所以直线 AB 与 CD 垂直.

依题意, 直线 AB 和 CD 都不能与 x 轴垂直, 可设直线 AB 的斜率为 $k (k \neq 0)$, 则 AB 方程为 $y = k(x - 2)$.

由 $\begin{cases} y = k(x - 2) \\ y^2 = 8x \end{cases}$ 得 $k^2 x^2 - (4k^2 + 8)x + 4k^2 = 0$, 设 $A(x_1, y_1)$, B

$$(x_2, y_2), \text{有} \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 + \frac{8}{k^2} \\ x_1 x_2 = 4 \end{cases}.$$

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(4 + \frac{8}{k^2})^2 - 16} = \frac{8(1 + k^2)}{k^2}.$$

$$\text{用 } -\frac{1}{k} \text{ 代替 } k, \text{ 即得 } |CD| = 8k^2(1 + \frac{1}{k^2}) = 8 + 8k^2.$$

$$\text{于是四边形 } ABCD \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD| = 32(k^2 + \frac{1}{k^2})$$

$$+ 2 \geq 32(2\sqrt{k^2 \cdot \frac{1}{k^2}} + 2) = 128,$$

当且仅当 $k^2 = \frac{1}{k^2}$, 即 $k = \pm 1$ 时取得最小值. 所以四边形 $ABCD$

的面积有最小值, 最小值等于 128.

(文) 由于 $\overrightarrow{FA} = m \overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{FC} = n \overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$, 其中 O 为原点, $m, n \in \mathbb{R}$, 所以 F, A, B 共线, F, C, D 也共线, 又 $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$, 所以直线 AB 与 CD 垂直. 以下同理可.

评析 平面向量与解析几何的交汇是近几年高考命题的热点, 一方面要能够正确地分析用向量表达式给出的条件, 将它们转化为图形中相应的位置关系, 另一方面还要善于运用向量的运算等解决问题.

22. (1) 方程 $f(x) = 0$ 即 $-x^2 + ax = 0$, 它有一个根为 6, 所以得 $a = 6$, 这样 $f(x) = -x^2 + 6x$.

由 $\begin{cases} y = -x^2 + 6x \\ y = x^3 \end{cases}$ 得 $x^3 = -x^2 + 6x$, 解得 $x = 0, 2, -3$. 当 $x = 2$ 时得 $y = 8$, 所以函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象在第一象限内的交点 A 的坐标是 $(2, 8)$.

(2) 依题意得线段 MN 的长度 $|MN| = (-t^2 + 6t) - t^3 = -t^3 - t^2 + 6t$,

$$\text{设 } h(t) = -t^3 - t^2 + 6t, \text{ 则 } h'(t) = -3t^2 - 2t + 6, \text{ 令 } h'(t) = 0, \text{ 得 } t = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{3},$$

由于 $0 < t < 2$, 所以取 $t = \frac{-1 + \sqrt{19}}{3}$, 当 $0 < t < \frac{-1 + \sqrt{19}}{3}$ 时 $h'(t) >$

0, 当 $\frac{-1 + \sqrt{19}}{3} < t < 2$ 时, $h'(t) < 0$, 所以当 $t = \frac{-1 + \sqrt{19}}{3}$ 时函

数 $h(t)$ 取得最大值. 即当 $t = \frac{-1 + \sqrt{19}}{3}$ 时, 线段 MN 的长度取得最大值.

(3) (理) 由于 $M(t, -t^2 + 6t)$, $f'(x) = -2x + 6$, 所以函数 $f(x)$

图象在 M 点处的切线 l_1 的斜率为 $-2t+6$, 于是 l_1 的方程为 $y - (-t^2+6t) = (-2t+6)(x-t)$, 令 $y=0$ 得 $x_p = \frac{t^2-6t}{6-2t} + t = \frac{t^2}{2t-6}$.

同理, $N(t, t^3)$, $g'(x) = 3x^2$, 所以 l_2 的方程为 $y - t^3 = 3t^2(x-t)$, 令 $y=0$ 得 $x_Q = \frac{2t}{3}$. 所以 $|PQ| = x_Q - x_p = \frac{2t}{3} - \frac{t^2}{2t-6} = \frac{t^2-12t}{6(t-3)} = \frac{1}{6} \cdot [(t-3) - \frac{27}{t-3} - 6]$,

因为 $0 < t < 2$, 所以 $-3 < t-3 < -1$, 于是可得 $\frac{1}{6} \cdot [(t-3) - \frac{27}{t-3} - 6] \in (0, \frac{10}{3})$.

(文) 由于 $M(t, -t^2+6t)$, $f'(x) = -2x+6$, 所以函数 $f(x)$ 图象在

M 点处的切线 l_1 的斜率为 $-2t+6$, 于是 l_1 的方程为 $y - (-t^2+6t) = (-2t+6)(x-t)$, 令 $y=0$ 得 $x_p = \frac{t^2-6t}{6-2t} + t = \frac{t^2}{2t-6}$.

同理, $N(t, t^3)$, $g'(x) = 3x^2$, 所以 l_2 的方程为 $y - t^3 = 3t^2(x-t)$, 令 $y=0$ 得 $x_Q = \frac{2t}{3}$.

由于 $0 < t < 2$, 所以有 $x_p = \frac{t^2}{2t-6} < 0$, $x_Q = \frac{2t}{3} > 0$, 故 $x_p < x_Q$, 所以 P 点总在 Q 点的左边.

评析 导数作为新增内容, 它有着非常重要的应用, 已成为众多知识交汇的载体, 如研究函数的单调性问题、最值问题、曲线的切线问题、不等式的证明问题等等, 都与导数有关. 预测今年的高考仍会将导数的应用作为考查的重点, 并与曲线的切线联系. 其实, 解决这类与导数有关问题, 一般有较为明显的特征: 如所给出函数为非常规函数(三次函数、高次函数、复合函数等)或与曲线的切线问题有关等, 因此在解题时要注意抓住这些信息, 合理运用导数求解.

2006 年全国百校联盟高考《考试大纲》调研卷(七)

考纲分析与考向预测 2006 年的考试大纲相对于去年而言, 没有明显的变化. 但是, 仔细揣摩, 也会有所收获. 例如, 在文科和理科的考试大纲中均将原来的“了解正弦函数、余弦函数、正切函数的图象和性质”改为了“理解正弦函数、余弦函数、正切函数的图象和性质”, 这就明显表明, 大纲对于三角函数的图象和性质的要求提高了, 这是一个明显的变换. 事实上, 伴随着新的课程改革, 高考在淡化三角变化的同时, 加强了对三角函数的图象与性质的要求. 从这个角度考虑, 本套试题中的三角解答题(第 17 题)将考查的重点置于 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ 函数的性质.

在国家政治经济形式稳定, 继续提倡构建和谐社会的今年, 高考数学试题必将继续保持稳定的大趋势. 考查学生数学基础知识、基本方法的题目仍将是整个试卷的主体. 以函数为核心的相关内容(包括函数的图象与性质、指、对数函数、数列、不等式、导数)将占到相当大的比例, 新增内容所占比例仍然超过课时比例. 2006 年高考数学命题的亮点将会出现在“基础知识常考常新”方面. 三角的重点在于图象和性质、解析几何将会突出基本方法和基本思想, 以平面几何为背景的向量问题将会出现. 突出理解能力、学习能力以及分析问题、解决问题能力的题目仍将仍然作为难题的命题指导思想, 以递推数列、函数为背景的不等式问题成为压轴题的可能性很大, 理科试题很有可能重视对于数学归纳法的考查.

相关事宜	难度系数	平均分	最高分	140 分以上 人数百分比	130 ~ 140 分 人数百分比	120 ~ 130 分 人数百分比	110 ~ 120 分 人数百分比	100 ~ 110 分 人数百分比
测试学校 黄冈高级中学	0.57	101	143	5%	7%	23%	18%	24%

测试评价与备考策略 本套试题在强调基础的同时, 注重学生综合能力的考查. 例如, 选择题中的 1、3、7、9、12 题等题目尽管是小题, 但是所考查的知识点都在两个以上, 这些问题的解决都需要扎实的基础.

数学思想方法的考查始终是高考命题的重中之重, 本套试题对于数学思想方法的考查也较为深入. 例如, 第 12 题的完成就需要数形结合的思想, 第 19 题、文 21 题的处理则需要分类讨论的思想方法, 至于等价转化的思想方法在本套试题中就更为多见. 第 20 题、21 题对于学生的理解能力要求较高. 其中, 第 20 题的解决必须结合题意构建空间图形, 同时要有机地将空间问题平面化. 而对于理 21 和文 21 而言, 读懂题目就相当于解决了题目的一半.

第 22 题看似简单, 但是算不得往往知烦而退, 事实上此题有着深刻的背景(椭圆的极点和极轴), 惟有灵活的运用“设而不求”的策略, 方可避免繁杂的运算.

1. (理) B $A = \{x | x = \frac{2k+1}{6}, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | x = \frac{k+2}{6}, k \in \mathbb{Z}\}$, 于是 $A \subseteq B$, 所以 $A \cap B = A$. 选 B.

(文) B 集合 A 中的元素为被 4 除余 1 的整数, 而 B 中的元素为奇数, 于是 $A \subseteq B$, 所以 $A \cap B = A$. 选 B.

评析 此题一方面考查了集合的化简, 另外一方面考查了集合之间的关系, 特别是子集的等价表示.

2. A “ $\sin \alpha \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha \neq 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$ ”为真命题; “ $\alpha \neq 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sin \alpha \neq \frac{1}{2}$ ”为假命题. 所以甲为乙的充分不必要条件, 选 A.

评析 本题看上去虽然是一个基本的不等量关系, 但实质上逻辑性很强, 容易选错, 解本题的关键: 一是从反面入手, 利用原命题与逆否命题的等价性, 二是要对逻辑联结词“或”“且”深刻理解与领悟.

3. (理) D 根据诱导公式可知, $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 与 $\frac{\pi}{2} + \alpha$ 为方程 $\sin x = a$ 的两个根, 于是结合正弦线或者正弦曲线可知所求解集为 $[2k\pi + \alpha + \frac{\pi}{2}, 2k\pi - \alpha + \frac{5\pi}{2}]$, $k \in \mathbb{Z}$. 选 D.

(文) D 解法一 根据诱导公式可知, 方程 $\cos x = a$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 有且仅有 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 与 $\alpha - \frac{\pi}{2}$ 这两个根, 于是所求解集应为 $\{x | x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha, \text{或 } x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$.

解法二 显然, 方程 $\cos x = a$ 在一个周期内有二根, 所以, A、B 不对, 而 C 中的元素的终边在同一直线上, 显然不合题意. 故选 D.

评析 关于三角方程尽管高考不做要求, 但是作为对于三角函

数性质与或图象的准确理解, 此题并未超纲. 这也体现了高考命题遵循大纲又不拘泥于大纲的观点.

4. A 由 $f^{-1}(x) = \frac{ax+1}{2x-1} = \frac{x+1}{2x-a}$ 知, a 的值为 1, 所以 $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$, 从而 $f(1) = 2$. 选 A.

评析 本题旨在考查反函数的概念、性质以及求法, 具有一定的灵活性.

5. (理) A 易知 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, 于是有 $|a+2b| = \sqrt{(a+2b)^2} = \sqrt{a^2+4a \cdot b+4b^2} = \sqrt{1+4 \times 1 \times 1 \cdot \cos \alpha + 4} = \frac{\sqrt{57}}{3}$, 从而选 A.

(文) A $|a+2b| = \sqrt{(a+2b)^2} = \sqrt{a^2+4a \cdot b+4b^2} = \sqrt{1+4 \times 1 \times 1 \cdot \cos 60^\circ + 4} = \sqrt{7}$, 从而选 A.

评析 本题旨在考查向量的相关运算, 其间也融入了同角三角函数关系的考查.

6. (理) B 易知直线 AC 和 BC_1 所成角为 60° , 因此, 问题等价于从两条夹角为 60° 的直线的交点处作与它们成 60° 角的直线, 显然有 3 条.

评析 此题根据一道众所周知的高考试题改编, 实际上是为其赋予了一个具体的几何体背景, 从而富有新意. 此题旨在考查空间想象能力以及直线与直线所成角的概念.

(文) B 连接 AD_1 , 则 $\angle D_1AC$ 即为所求角, 由 $\triangle D_1AC$ 为等边三角形知, 所成角为 60° . 选 B.

评析 此题主要考查异面直线成角的概念与计算.

7. (理) A 由 $q = \frac{1-i}{1+i} = -i$ 知, 数列 $\{u_n\}$ 以 4 为周期, 进而知 $S_{2008} = 0$, 选 A.

评析 本题以复数为背景考查了等比数列的有关知识.

(文) D 易知此数列为等比数列,且公比 $q = -\frac{1}{4}$, 于是

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = (a_1 q^2)^5 = q^{10} = 2^{-20}, \text{ 选 D.}$$

评析 本题主要考查等比数列的定义以及通项等知识点.

$$8. (\text{理}) C \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{6 \cos x - 3\sqrt{3}}{12x - 4\pi} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} (-\sin \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 选 C.}$$

评析 本题将导数的定义与导数公式的考查有机地结合,具有一定的灵活性.

$$(\text{文}) C \quad x + \frac{3}{x+1} \geq 2 \Rightarrow x - 2 + \frac{3}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x+1} \geq 0, \text{ 而 } x^2 - x + 1 > 0, \text{ 所以原不等式即为 } x+1 > 0. \text{ 选 C. 也可以借助排除法淘汰 A, B, D.}$$

评析 本题主要考查学生的不等式等价变形能力.

$$9. (\text{理}) B \quad \text{由正态分布的密度函数图象的几何意义以及其对称性知, } P(\xi < 0) = P(\xi > 6) = \frac{1}{2} [1 - P(0 < \xi < 6)] = \frac{1}{2} [1 - 2P(3 < \xi < 6)] = \frac{1}{2} [1 - 2 \times 0.3] = 0.2. \text{ 选 B.}$$

评析 本题主要考查正态分布的有关知识以及计算. 上述解法充分利用正态分布密度曲线的对称性以及几何意义, 简捷明了.

$$(\text{文}) B \quad \text{分层抽样属于等概率抽样, 所以每个个体被抽到的概率均为 } \frac{40}{200} = \frac{1}{5}. \text{ 选 B.}$$

评析 本题主要考查抽样方法以及概率意义. 简单随机抽样、系统抽样与分层抽样都是等概率抽样.

$$10. (\text{理}) D \quad \text{由于 } y = \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1, \text{ 所以, 双曲线 } y = \frac{x}{x-1} \text{ 与双曲线 } y = \frac{1}{x} \text{ 的形状与大小完全相同, 而等轴双曲线 } y = \frac{1}{x} \text{ 的一条对称轴 } y = x \text{ 和它的交点为 } (2, 2), (-2, -2), \text{ 于是实半轴长为 } 2\sqrt{2}, \text{ 由对称性知虚半轴长也为 } 2\sqrt{2}, \text{ 从而焦距为 } 8.$$

评析 本题主要考查学生对于平移、双曲线形状参数等知识点的掌握, 同时问题的解决需要一定的分析问题、解决问题的能力.

$$(\text{文}) D \quad \text{易知此双曲线为等轴双曲线, 其一条对称轴 } y = x \text{ 和它的交点为 } (2, 2), (-2, -2), \text{ 于是实半轴长为 } 2\sqrt{2}, \text{ 由对称性知虚半轴长也为 } 2\sqrt{2}, \text{ 从而焦距为 } 8.$$

评析 本题主要考查学生对于双曲线的形状参数的理解, 同时问题的解决需要一定的分析问题、解决问题的能力.

$$11. A \quad \text{令 } f(x) = -x^2 + 2x, \text{ 则题设等价于 } a < [f(x)]_{\min}, \text{ 而 } [f(x)]_{\min} = f(-2) = -8. \text{ 所以 } a \text{ 的取值范围为 } (-\infty, -8). \text{ 选 A.}$$

评析 本题主要考查学生对于二次函数知识的理解以及分析问题的能力.

$$12. (\text{理}) A \quad \text{设点 } P \text{ 到直线 } l \text{ 的距离为 } d, \text{ 则 } d = \frac{2S_{\triangle ABP}}{|AB|} = \frac{6}{5}. \text{ 当点 } P(4\cos\theta, 3\sin\theta) (0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \text{ 在 } l \text{ 上方时, 则点 } P \text{ 到直线 } l \text{ 的距离为 } d' = \frac{|12\cos\theta + 12\sin\theta - 12|}{5} = \frac{12}{5} (\sin\theta + \cos\theta - 1) = \frac{12}{5} [\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) - 1] \leq \frac{12}{5} (\sqrt{2} - 1) < \frac{6}{5}. \therefore \text{ 在 } l \text{ 上方不存在满足条件的 } P \text{ 点. 选 A.}$$

$$(\text{文}) A \quad \text{设点 } P \text{ 到直线 } l \text{ 的距离为 } d, \text{ 则 } d = \frac{2S_{\triangle ABP}}{|AB|} = \frac{6}{5}, \text{ 又原点 } O \text{ 到直线 } l \text{ 的距离为 } d' = \frac{|OA| \cdot |OB|}{|AB|} = \frac{12}{5} > \frac{6}{5}. \therefore \text{ 在直线 } l \text{ 下方椭圆上有两个点满足条件. 选 A.}$$

评析 竞赛题已经成为了高考命题的一个重要渊源. 此题根据 2002 年高中数学联赛中的一道题目改编而成, 题目主要考查灵活运用所学知识分析问题、解决问题的能力.

$$13. (\text{理}) \frac{1}{3} \quad R_2 \text{ 为正四面体的外接球半径, } R_1 \text{ 为内切球半径. 由体积分割可知, } R_1 \text{ 为正四面体高的 } \frac{1}{4}, \text{ 从而 } R_2 \text{ 为正四面体高的 } \frac{3}{4}. \text{ 所以, } \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{3}.$$

$$(\text{文}) \frac{\sqrt{3}}{3} \quad R_2 \text{ 为正方体的外接球半径, } R_1 \text{ 为内切球半径. 设正}$$

$$\text{方体边长为 } 1, \text{ 于是 } R_1 = \frac{1}{2}, R_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 所以, } \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

评析 本题考查学生的空间想象力以及正方体和球体的组合体的相关计算.

$$14. 21 \quad \text{易知可行域在直线 } x + 2y - 4 = 0 \text{ 的上方, 故 } z = x + 2y - 4, \text{ 进而可知 } (x, y) = (7, 9) \text{ 时, } z_{\max} = 21.$$

$$15. 420 \quad \text{顶点 } S, A, B \text{ 所染颜色各不相同, 它们共有 } 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ 种染色方法. 当顶点 } S, A, B \text{ 所染颜色确定了后, 不妨设其颜色分别为 } 1, 2, 3. \text{ 若 } C \text{ 染颜色 } 2, \text{ 则 } D \text{ 可染 } 3, 4, 5, \text{ 有 } 3 \text{ 种染法. 若 } C \text{ 染颜色 } 4, \text{ 则 } D \text{ 可染 } 3, 5, \text{ 有 } 2 \text{ 种染色方法. 若 } C \text{ 染颜色 } 5, \text{ 则 } D \text{ 可染 } 3, 4, \text{ 有 } 2 \text{ 种染色方法. 可见, 当 } S, A, B \text{ 染色确定了后, } C, D \text{ 还有 } 7 \text{ 种染色方法. 故方法总数为 } 60 \times 7 = 420.$$

评析 本题旨在考查两大原理——分类计数原理与分步计数原理, 其中对于分类讨论要求较高.

$$16. \text{答案应该为 } k(3, -2), \text{ 其中 } k \text{ 为任意一非零常数, 只需填满足题意的任一个就算正确, 答案不惟一.}$$

评析 本题有机地考查了直线和向量的联系, 具有一定的新颖性与开放性.

$$17. (1) f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) + \sin(x - \frac{\pi}{6}) + a \cos x + b = 2 \sin x \cos \frac{\pi}{6} + a \cos x + b = \sqrt{3} \sin x + a \cos x + b = \sqrt{a^2 + 3} \sin(x + \theta) + b,$$

$$(\text{其中 } \theta \text{ 满足 } \sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 3}}, \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3}}), \text{ 于是 } f(x) \text{ 的}$$

$$\text{最小值为 } -\sqrt{a^2 + 3} + b,$$

$$\text{所以, } -\sqrt{a^2 + 3} + b = 2.$$

$$\text{另外, 由 } f(x) \text{ 在区间 } [-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}] \text{ 上单调递增, 可知 } f'(x) \text{ 在}$$

$$\text{区间 } [-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}] \text{ 上的最小值为 } f'(-\frac{\pi}{3}), \text{ 所以 } f'(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{a^2 + 3} + b = 2. \text{ 解之得: } a = -1, b = 4.$$

$$(2) \text{ 由 } (1) \text{ 知 } f(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x + 4 = 2 \sin(x - \frac{\pi}{6}) + 4, \text{ 于是}$$

$$g(x) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3}) + 3.$$

$$\text{所以, 当 } x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}) \text{ 时, } y = g(x) \text{ 取得最大值 } 5.$$

$$18. (1) P = P(\xi \leq 18) = 1 - P(\xi = 19) - P(\xi = 20) = 1 - C_{20}^{19} (\frac{1}{3})^{19} \cdot \frac{2}{3} - C_{20}^{20} (\frac{1}{3})^{20} = 1 - \frac{41}{3^{20}}.$$

$$\text{而 } \frac{41}{3^{20}} < \frac{3^4}{3^{19}} = \frac{1}{3^{15}} < \frac{1}{10^6}, \text{ 所以 } P = 1 - \frac{41}{3^{20}} > 1 - \frac{1}{10^6} = 99.999999\%.$$

$$(2) (\text{理}) \text{ 显然 } \xi \sim B(20, \frac{1}{3}), \text{ 于是 } a_k = P(\xi = k) = C_{20}^k (\frac{1}{3})^k \cdot (\frac{2}{3})^{20-k}.$$

$$\text{从而 } \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{C_{20}^{k+1} (\frac{1}{3})^{k+1} \cdot (\frac{2}{3})^{19-k}}{C_{20}^k (\frac{1}{3})^k \cdot (\frac{2}{3})^{20-k}} = \frac{(20-k) \cdot \frac{1}{3}}{(k+1) \cdot \frac{2}{3}} \geq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq k \leq 6.$$

$$\text{所以, 当 } 0 \leq k < 6 \text{ 时, } a_{k+1} > a_k; \text{ 当 } k = 6 \text{ 时, } a_{k+1} = a_k; \text{ 当 } 6 < k \leq 19 \text{ 时, } a_{k+1} < a_k. \text{ 即, } a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_6 = a_7 > a_8 > \dots > a_{20}. \text{ 所以, 数列 } \{a_n\} \text{ 的最大项为 } a_6 = a_7 = C_{20}^6 (\frac{1}{3})^6 (\frac{2}{3})^{14} =$$

$$\frac{12920 \times 2^{14}}{3^{19}}.$$

评析 本题以二项分布为基础, 综合考查了概率的计算以及数列单调性的研究.

$$(\text{文}) \frac{3^{19}}{2^{17}} P = \frac{3^{19}}{2^{17}} \cdot C_{19}^4 (\frac{1}{3})^4 \cdot (\frac{1}{3}) \cdot (\frac{2}{3})^{15} = \frac{3^{19}}{2^{17}} \cdot \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \cdot \frac{2^{15}}{3^{20}} = 323.$$

$$19. (1) \text{ 当 } -1 \leq x \leq 0 \text{ 时, } 2 \leq 2-x \leq 3, \text{ 由于 } g(x) \text{ 与 } f(x) \text{ 的图象关于直线 } x-1=0 \text{ 对称, 所以 } f(x) = g(2-x) = 2a \cdot (2-x-2) - 4(2-x-2)^3 = 4x^3 - 2ax;$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $-1 \leq -x \leq 0$, 由 $f(x)$ 为偶函数, 可知 $f(x) = f(-x) = 4(-x)^3 - 2a(-x) = -4x^3 + 2ax$.

所以, $f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 2ax & -1 \leq x \leq 0 \\ -4x^3 + 2ax & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

(2) (理) 因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$) 的最大值必等于 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值. 故只需考虑 $0 \leq x \leq 1$ 的情形, 此时 $f(x) = -4x^3 + 2ax$.

由 $f'(x) = -12x^2 + 2a = 0$ 得 $x = \sqrt{\frac{a}{6}}$.

① 当 $a \geq 6$ 时, 由 $f'(x) = -12x^2 + 2a$ 在区间 $(0, 1) \subseteq (0, \sqrt{\frac{a}{6}})$ 上恒为正, $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递增.

所以, $f(x)$ 的最大值为 $f(1) = 2a - 4$.

② 当 $0 < a < 6$ 时, 由 $f'(x) = -12x^2 + 2a$ 在区间 $(0, \sqrt{\frac{a}{6}})$ 上恒为正, 在 $(\sqrt{\frac{a}{6}}, 1) \subseteq (\sqrt{\frac{a}{6}}, +\infty)$ 上恒为负, $f(x)$ 在区间

$[0, \sqrt{\frac{a}{6}}]$ 上单调递增, 在区间 $[\sqrt{\frac{a}{6}}, 1]$ 上单调递减. 所以, $f(x)$ 的最大值为 $f(\sqrt{\frac{a}{6}}) = \frac{2a\sqrt{6a}}{9}$.

综上所述: 当 $0 < a < 6$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $f(\pm\sqrt{\frac{a}{6}}) = \frac{2a\sqrt{6a}}{9}$, 当 $a \geq 6$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $f(\pm 1) = 2a - 4$.

(文) 因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$) 的最大值, 必等于 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值. 故只需考虑 $0 \leq x \leq 1$ 的情形, 此时 $f(x) = -4x^3 + 2ax$.

当 $0 < a < 6$ 时, 由 $f'(x) = -12x^2 + 2a$ 在区间 $(0, \sqrt{\frac{a}{6}})$ 上恒为正, 在 $(\sqrt{\frac{a}{6}}, 1) \subseteq (\sqrt{\frac{a}{6}}, +\infty)$ 上恒为负, $f(x)$ 在区间 $[0, \sqrt{\frac{a}{6}}]$ 上单调递增, 在区间 $[\sqrt{\frac{a}{6}}, 1]$ 上单调递减. 所以, $f(x)$ 的最大值为 $f(\sqrt{\frac{a}{6}}) = \frac{2a\sqrt{6a}}{9}$.

所以, 当 $0 < a < 6$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $f(\pm\sqrt{\frac{a}{6}}) = \frac{2a\sqrt{6a}}{9}$.

评析 本题主要考查了偶函数的概念、性质, 函数图象的对称性、函数性质的研究方法等.

20. (1) $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 135^\circ$, $\angle ACB = 15^\circ$, 由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin 15^\circ}$

$= \frac{BC}{\sin 135^\circ}$, 所以, $AB = \frac{BC \cdot \sin 15^\circ}{\sin 135^\circ} = \frac{400 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 200(\sqrt{3} - 1) \approx 146$ (米).

(2) 如图所示, 作 $AG \perp BC$. 垂足为 G , 则 $\angle AGE = 30^\circ$, 故 $AE = AG \cdot \tan 30^\circ = AB \cdot \sin 30^\circ \tan 30^\circ = 200$

$(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 100 - \frac{100\sqrt{3}}{3} \approx 42$ (米).

评析 本题以实际测量为背景, 综合考查了立体几何、解三角形、三角公式等知识点, 对于分析问题、解决问题的能力有着一定的要求.

21. (理) $f(x+t) \leq x \Rightarrow \frac{1}{4}(x+t)^2 + \frac{1}{2}(x+t) + \frac{1}{4} \leq x \Rightarrow x^2 - 2(1-t)x + (t^2 + 2t + 1) \leq 0 \Rightarrow 1-t-\sqrt{-4t} \leq x \leq 1-t+\sqrt{-4t}$,

于是, 欲使不等式 $f(x+t) \leq x$ 在区间 $[1, M(t)]$ 上恒成立, 且 $M(t)$ 最大, 则需且只需 $\begin{cases} 1-t-\sqrt{-4t} \leq 1 \\ M(t) = 1-t+\sqrt{-4t} \end{cases}$ ① ②

由①得 $-4 \leq t \leq 0$, 而 $M(t) = 1-t+\sqrt{-4t}$ 显然为 t 的减函数, $\therefore M(t)$ 的最大值为 $M(-4) = 1 - (-4) + \sqrt{-4(-4)} = 9$.

评析 本题以二次函数为背景, 综合考查函数的思想、不等式的观点以及分析问题、解决问题的能力.

(文) 记 $x = 10a^2 + 81a + 207$, $y = a + 2$, $z = 26 - 2a$, 则首先由对数的定义知 $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. 由 $\Delta_x = 81^2 - 4 \times 10 \times 207 < 0$ 知 $x > 0$ 恒成立. 又由 $y = a + 2 > 0$, $z = 26 - 2a > 0$ 得 $-2 < a < 13$.

其次, 我们来判断 x, y, z 的大小关系, 由 $x - y = 10a^2 + 80a + 205$, $x - z = 10a^2 + 83a + 181$, 有 $\Delta_{x-y} = 80^2 - 4 \times 10 \times 205 < 0$, $\Delta_{x-z} = 83^2 - 4 \times 10 \times 181 < 0$ 得 $x > y$, $x > z$.

考虑到 $y - z = 3(a - 8)$ 可知需要分为 $-2 < a < 8$ 和 $8 < a < 13$ 两种情况.

(1) 当 $-2 < a < 8$ 时, $y < z$, 此时, 若 $\lg y, \lg z, \lg x$ 依次构成公差为 1 的等差数列, 则有 $\lg z - \lg y = \lg x - \lg z = 1$, 得 $x = 10z$, $z = 10y$. 即 $\begin{cases} 10a^2 + 81a + 207 = 10(26 - 2a) \\ 26 - 2a = 10(a + 2) \end{cases}$, 解之得 $a = \frac{1}{2}$.

(2) 当 $8 < a < 13$ 时, $y > z$, 此时, 若 $\lg z, \lg y, \lg x$ 依次构成公差为 1 的等差数列, 则有 $\lg y - \lg z = \lg x - \lg y = 1$, 得 $x = 10y$, $y = 10z$. 即 $\begin{cases} 10a^2 + 81a + 207 = 10(a + 2) \\ a + 2 = 10(26 - 2a) \end{cases}$, 解之得 a 无解, 故此方程组在 $(8, 13)$ 内无解.

综上所述可知, $\frac{1}{2}$ 为 a 的惟一取值.

评析 该题以集合、数列、对数等知识为载体, 综合考查学生分析问题、解决问题的能力, 其中对于分类讨论考查较为深入.

22. (1) 易求得以 (x_0, y_0) 为切点的 C 的切线方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

设 $B_1(x'_1, y'_1)$, 则直线 $A_1 B_1$ 的方程为 $\frac{x'_1 x}{a^2} + \frac{y'_1 y}{b^2} = 1$, 由 A_1

$(-\frac{a^2}{c}, y_1)$ 在直线 $A_1 B_1$ 上有 $-\frac{a^2}{c} \cdot \frac{x'_1}{a^2} + \frac{y'_1 y_1}{b^2} = 1$, ①

设 $C_1(x'_2, y'_2)$, 则有 $-\frac{a^2}{c} \cdot \frac{x'_2}{a^2} + \frac{y'_2 y_1}{b^2} = 1$, ②

根据①、②即知直线 $B_1 C_1$ 的方程为 $-\frac{a^2}{c} \cdot \frac{x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$.

即 $-\frac{x}{c} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$, ③

在③中令 $y = 0$ 得, $x = -c$. 于是 $k_{A_1 D} = \frac{y_1}{-\frac{a^2}{c} + c} = -\frac{y_1 c}{b^2}$, 而

$k_{B_1 C_1} = \frac{b^2}{y_1 c}$. 所以, $k_{A_1 D} k_{B_1 C_1} = -1$. 从而, $A_1 D \perp B_1 C_1$.

(2) 在③中令 $x = -\frac{a^2}{c}$ 得, $y = -\frac{b^4}{c^2 y_1}$. 所以, $y_2 = -\frac{b^4}{c^2 y_1}$.

重复上述过程, 显然就有 $y_3 = -\frac{b^4}{c^2 y_2} = y_1$, $y_4 = -\frac{b^4}{c^2 y_3} = y_2, \dots$

所以, $y_{2n-1} = y_1 = m$, $y_{2n} = y_2 = -\frac{b^4}{c^2 m}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

评析 本题以相切为着手点考查了直线与圆锥曲线的位置关系. 对于解析几何的处理方法考查得较为深入, 具有相当的难度.

2006 年全国百校联盟高考《考试大纲》调研卷(八)

考纲分析与考向预测 今年高考数学的《考试大纲》与 2005 年《考试大纲》相比较稍有调整, 对三角函数的要求提高了一个层次, 比如, 将过去要求的“了解正弦函数、余弦函数、正切函数的图象和性质”改为了“理解正弦函数、余弦函数、正切函数的图象和性质”, 文科增加了“了解参数方程的概念”, “理解圆的参数方程”. 针对以上调整, 该套试卷中多次出现三角函数问题, 如 7 题、13 题、17 题, 这些题目要求考生比较熟练地绘制三角函数图象, 理解诸性质, 如最值与值域的相依关系. 在大题中, 注重了“向量与三角函数问题交汇在一起的题目”. 对于《考试大纲》要求“了解”的问题不必盲目拔高, 参数方程对文科生而言, 仅是“了解”层次, 只需基本会用, 不必盲目拔高. 对文科生要求“理解圆的参数方程”, 要注意以下 3 点: 会将圆的参数方程变成普通方程; 会选择参数, 将圆的普通方程变成参数

方程 明白圆的参数方程中参数(角)的意义,并能由此展开相关的几何分析.今年高考大纲数学理科将“闭区间上连续函数有最大值和最小值”由“理解”降低为“了解”,考生会用就行,不必追问“为什么”,它的证明不可能在中学完成,而是属于高等数学范畴,考生不必浪费时间.

相关事宜	难度系数	平均分	最高分	140 分以上 人数百分比	130 ~ 140 分 人数百分比	120 ~ 130 分 人数百分比	110 ~ 120 分 人数百分比	100 ~ 110 分 人数百分比
测试学校								
黄冈高级中学	0.56	113.5	148	3.8%	7.1%	9.2%	11.3%	16.2%

测试评价与备考策略 本套试卷难度与 2005 年全国卷相比略有偏高,由上表测试情况可反映出以下问题:①学生面对新颖的试题还较难找到切入点,思维不能快速进入解题状态.②学生构造模型,利用模型的能力不够强,需要在平时的解题训练中有意识地记忆、理解模型的有效价值,这对于不断提升分析问题和解决问题的能力有较大作用的.③学生画图、读图、识图、用图的技能不是很强,具体表现在:画图不准确,读图时的信息翻译常有差错,抓不住问题的关键点.说明了考生由于对一些基本概念不清楚,基本的运算不正确及基本的方法不熟练而失分的现象比较严重.对于以后复习有如下建议,在后期的复习中还应从以下方面进行加强:①复习和训练要立足基础、突出能力,教师在讲解中要注重基础,复习要全面,学生在练习时要注意能力的培养,数学思想方法的训练;②注重加强个性品质的培养,遇易不轻视不粗心,遇难不放弃.建议考生平时学习中要注重基础,突出能力的培养,提高分析问题、解决问题的能力.

1. (理) A $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+bi}{3-4i} = \frac{(1+bi)(3+4i)}{25} = \frac{3-4b+(4+3b)i}{25}$.

∵ $\frac{z_1}{z_2}$ 的实部和虚部互为相反数, ∴ $3-4b = -(4+3b)$, ∴ $b=7$.

∴ 选 A.

评析 复数的考查重点是复数的概念及代数形式的四则运算,在做除法时,把分母实数化是解题的关键.

(文) D “若 $a \in M$, 则 $b \notin M$ ” 的逆否命题是“若 $b \in M$, 则 $a \notin M$ ”, 所以选 D.

评析 简易逻辑是教材中新增内容, 这部分的考查重点是命题和复合命题, 四种命题的关系及真假命题的判定. 试题形式一般为选择题、填空题. 解答这类问题的关键是熟练地掌握基本概念和基本方法.

2. C 由已知得 $f(1-2x) = \frac{1-x}{x} (x \neq 0)$. 设 $t = 1-2x \Rightarrow f(t) = \frac{1+t}{1-t}$
 $\Rightarrow f^{-1}(t) = \frac{t-1}{t+1} \Rightarrow f^{-1}(2006) = \frac{2005}{2007}$, 所以选 C.

评析 已知复合函数 $f[g(x)]$ 的解析式, 求原函数的解析式, 常用的方法是换元法, 求出 $f(t)$ 、 $f^{-1}(t)$ 后, 再把 2006 代入 $f^{-1}(t)$ 即可.

3. A $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (2a+3b) + (-8a-2b) = -6a+b$, 又有 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = -12a-3b = \frac{3}{2}(-8a-2b)$, 即 $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$, ∴

$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 同向, $|\overrightarrow{AD}| > |\overrightarrow{BC}|$.

评析 关于向量的运算, 要熟练掌握向量的模的求法, 向量的坐标运算等. 因为 $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ 中 $\frac{3}{2} > 1$, 所以 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 同向, $|\overrightarrow{AD}| > |\overrightarrow{BC}|$. 所以选 A.

4. (理) C 由 $f(x-1) = x+x^2+x^3+\cdots+x^n = \frac{x(1-x^n)}{1-x} \Rightarrow f(x) = \frac{(x+1)^{n+1} - (x+1)}{x} \Rightarrow A_n = f(1) = 2^{n+1} - 2$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 2}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \frac{2}{2^n}) = 2$, 故选 C.

(文) C 过程见理.

评析 用等比数列求和公式来化简 $f(x-1)$ 的表达式是解决本题的关键, 由 $f(x-1)$ 求出 $f(x)$ 的表达式, 对 $f(x) = \frac{(x+1)^{n+1} - (x+1)}{x}$ 中 x 赋值(令 $x=1$) 即得 A_n , 从而求出

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{2^n}$ 的值.

5. D 分情况讨论: ①若 $M、N$ 中都有 2 个元素, M 有 C_2^4 种构成方式; ②若 $M、N$ 中都有 3 个元素, 则 M 有 C_3^4 种构成方式; ③若 $M、N$ 中都有 4 个元素, 则有 C_4^4 种构成方式, 故共有 $C_2^4 + C_3^4 + C_4^4 = 11$ (种).

评析 本题考查集合的相关概念及运算, 用穷举法解决比较麻烦, 所以采用分情况讨论并结合排列组合知识来解答.

6. C ∵ 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{2}{3}x$, F 点坐标为 $(\sqrt{13}, 0)$, ∴ 设 A 点横坐标为 x 则 $y = \pm \frac{2}{3}x$, 由 $|AF| = 2 \Rightarrow \sqrt{(x-\sqrt{13})^2 + (\pm \frac{2}{3}x)^2} = 2 \Rightarrow x = \pm \frac{6}{\sqrt{13}}$, 代入 $y^2 = 2px$ 得 $p = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, 所以, $y^2 = \frac{4\sqrt{13}}{13}x$, 所以选 C.

评析 本题考查了双曲线的渐近线方程, 两点间距离公式和抛物线等知识.

7. D $f(x) = -\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\sin(x - \frac{\pi}{6}) \in (1, 2]$.

评析 三角函数式的化简、求值是高考的一个热点, 不仅要要求熟练掌握三角函数基本公式, 还要注意恒等变形思想的灵活运用.

8. B 设方程有两根 x_1, x_2 , 则 $\Delta \geq 0$ 且 $x_1 + x_2 = m, x_1x_2 = m+3$,

所以 $\begin{cases} x_1 > 1, \\ x_2 > 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0, \\ (x_1-1)(x_2-1) > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1-1) + (x_2-1) > 0, \end{cases}$

$\begin{cases} m^2 - 4(m+3) \geq 0, \\ m+3-m+1 > 0, \end{cases} \Rightarrow m \geq 6$.

因为 $m \geq 6 \Rightarrow m > 5$, 而 $m > 5 \not\Rightarrow m \geq 6$, 所以“ $m > 5$ ”是“方程两根都大于 1”的必要非充分条件, 故选 B.

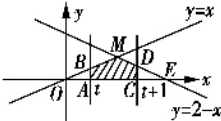
评析 本题把充要条件知识与二次方程在区间上根的分布设计到了一起, 是一道较好的综合型选择题.

9. A 设 $f(x) = a^{-x} - \log_a x$, ∵ $a > 1$, ∴ $f(x)$ 是减函数.

∵ $a^{-m} + \log_a n < a^{-n} + \log_a m$, ∴ $a^{-m} - \log_a m < a^{-n} - \log_a n$. 由 $f(x)$ 是减函数即得 $m > n > 0$.

评析 解答本题的关键是构造函数 $f(x) = a^{-x} - \log_a x (a > 1)$, 再利用函数 $f(x)$ 的单调性来求解.

10. A 如图 $S = f(t) = S_{\triangle OME} - S_{\triangle OAB}$
 $- S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \frac{1}{2} \times t^2$
 $- \frac{1}{2} \times (1-t)^2 = -t^2 + t + \frac{1}{2}$.



评析 《考试大纲》要求了解线性规划的意义, 并会简单的应用. 从高考命题的规律看, 出现在选择题、填空题的位置的可能性较大. 图解法是解决这类问题的常用方法.

11. D 因为 $A > B \Rightarrow a > b \Rightarrow 2R\sin A > 2R\sin B \Rightarrow \sin A > \sin B$, 故①正确;

因为 $\cos A < \cos B \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - A) < \sin(\frac{\pi}{2} - B) \Leftrightarrow A > B$, 故

②正确;

$\cos 2A < \cos 2B \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 A < 1 - 2\sin^2 B \Leftrightarrow \sin A > \sin B$, 故

④正确.

评析 本题考查三角形中的三角函数关系以及应用三角函数公式将三角函数式变形的能力.

12. B 因为正方体的体积是 8, 所以正方体的棱长为 2. 又球的半径 R 与内接正方体棱长 a 的关系为 $2R = \sqrt{3}a$, 所以 $R = \sqrt{3}$, 所以球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3 = 4\sqrt{3}\pi$, 所以选 B.

评析 正方体内接于球, 则由球及正方体都是中心对称图形知, 它们的中心重合, 这样就找到了正方体的对角线与球的直径相等这一重要关系.

13. $-\frac{\pi}{12}, 1$ 函数 $y = 2\sin 2x$ 的图象按向量 $c = (m, n)$ 平移后得到函数 $y = 2\sin 2(x-m) + n$ 的图象, 即函数 $y = f(x) = a \cdot b = 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 1 + 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象.

∴ $|m| < \frac{\pi}{2}$, ∴ $m = -\frac{\pi}{12}, n = 1$.

评析 本题是向量平移与三角函数知识的整合问题. 涉及图形平移, 常见题型有三类: (1) 求平移向量的坐标; (2) 求平移前(后)点的坐标; (3) 求平移前(后)函数的解析式. 主要是应

用坐标平移公式进行分析求解.

14. (理) $D_\varepsilon \leq \frac{1}{4}$ 事件 A 在一次试验中发生的次数 ε 可能的值为 0, 1, 故 ε 的分布列为:

ε	0	1
p	$1-p$	p

$\therefore \varepsilon$ 的期望 $E\varepsilon = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$.

ε 的方差 $D\varepsilon = (0-p)^2 \times (1-p) + (1-p)^2 \times p = p-p^2 = p(1-p) \leq \left(\frac{p+1-p}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 当且仅当 $p=1-p$ 即 $p=\frac{1}{2}$ 时上式取等号.

评析 本题考查了求期望、方差的基本方法,联想到不等式内容,即 $p(1-p) \leq \left(\frac{p+1-p}{2}\right)^2$, 就不难解决本题.

(文) $2^n - 1 = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x^n}\right)(1+x)^n = \frac{1}{x}(1+x)^n + \frac{1}{x^2}(1+x)^n + \cdots + \frac{1}{x^n}(1+x)^n$, 其中常数项为 $\frac{1}{x}C_n^1x + \frac{1}{x^2}C_n^2x^2 + \cdots + \frac{1}{x^n}C_n^n x^n = (C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n)$, 所以 $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x^n}\right)(1+x)^n$ 展开式中常数项 (不含 x 的项) 的和为 $C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n - 1$, 所以答案为 $2^n - 1$.

15. $2\pi \cdot x^2 + y^2 - 12y + 27 = 0$, 即 $x^2 + (y-6)^2 = 9$, $\therefore r=3$, 原点到圆心距离为 6, $\therefore$ 两切线夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 劣弧所对

圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$, 故弧长为 $\frac{2\pi}{3} \cdot 3 = 2\pi$.

评析 本题主要考查直线与圆的相切问题, 解决此类问题时要注意数形结合思想的应用. 关于直线与圆的位置关系的题目在高考题中出现的次数较多, 要特别注意.

16. 4 这个问题实际上是一个简单的迭代问题. 输入 x 第一次输出 $3x-2$, 第二次输出 $3(3x-2)-2=9x-8$; 第三次输出 $3(9x-8)-2=27x-26$; 第四次输出 $3(27x-26)-2=81x-80$; 第五次输出 $3(81x-80)-2=243x-242$; $\therefore$ 所以 $x=5$, 第三次输出的数值是 109, 第四次输出的数值是 325, 所以大于 200, 因此只要运算四次就会停止.

评析 本题设计新颖, 既体现了新课改的精神, 又没有超出考纲的要求. 因为计算量较小, 采用了穷举法来解答. 这个问题也可以看成一个数列问题来解答.

17. (1) $\because |\vec{AC}| = |\vec{BC}|$, $\therefore C$ 在线段 AB 的垂直平分线上,

$\therefore AB$ 的中点为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 斜率为 -1 ,

$\therefore$ 线段 AB 的垂直平分线方程为 $x-y=0$,

$\therefore \cos \alpha = \sin \alpha$,

$\therefore \tan \alpha = 1$. 又 $\because \alpha \in (-\pi, 0)$, $\therefore \alpha = -\frac{3}{4}\pi$.

(2) $\because \vec{AC} = (\cos \alpha - 3, \sin \alpha)$, $\vec{BC} = (\cos \alpha, \sin \alpha - 3)$,

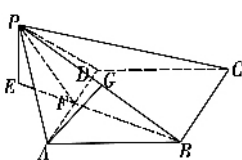
$\therefore \vec{AC} \cdot \vec{BC} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 3\cos \alpha - 3\sin \alpha = 0$,

$\therefore \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$,

$\frac{\sqrt{2}\sin(2\alpha - \frac{\pi}{4}) + 1}{1 + \tan \alpha} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha + 2\sin^2 \alpha}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = 2\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{8}{9}$.

评析 本题是向量与三角函数知识交汇在一起的题目, 是高考的热点题, 一般出现在解答前三题的位置, 对于第(1)问, 要注意条件 $\alpha \in (-\pi, 0)$, 否则就容易取错 α 的值. 对于第(2)问, 要把 $\tan \alpha$ 化成正、余弦函数, 这是做化简、求值等题时常用的方法.

18. (1) 过点 P 作底面 $ABCD$ 的垂线, 垂足为 E . 连结 BE 交 AD 于点 F , 则 BE 是 PB 在底面 $ABCD$ 内的射影. 因为 $PB \perp AD$, 所以由三垂线定理及其逆定理得 $AD \perp BE$, $AD \perp PF$. 于是 $\angle PFB$ 就是侧面 PAD 与底面 $ABCD$ 所成二面角的平面角, 则 $\angle PFB = 120^\circ$, $\angle PFE$



$= 60^\circ$. 因为侧面 PAD 是边长等于 2 的正三角形, $AD \perp PF$, 所以 $AF = 1$, $PF = \sqrt{3}$. 在 $\text{Rt} \triangle PEF$ 中, $PE = PF \sin \angle PFE = \sqrt{3} \sin 60^\circ = \frac{3}{2}$, 即点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{3}{2}$.

(2) 因 $PB \perp AD$, $AD \parallel BC$, 则 $PB \perp BC$. 在等腰三角形 PAB 中, $AP = AB$, 取边 PB 的中点 G , 则 $GA \perp PB$. 向量 $\vec{BC}$ 与 $\vec{GA}$ 所成的角 θ 就等于面 PAB 与面 CPB 所成二面角 (或其补角) 的大小.

以 E 为原点, $\vec{EB}$, $\vec{AD}$, $\vec{EP}$ 分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向建立空间直角坐标系, 则有 $P(0, 0, \frac{3}{2})$, $A(\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, 0)$,

$B(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0, 0)$, $C(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 2, 0)$, $G(\frac{3\sqrt{3}}{4}, 0, \frac{3}{4})$, 于是 $\vec{GA} = (-\frac{\sqrt{3}}{4}, -1, -\frac{3}{4})$, $\vec{BC} = (0, 2, 0)$. $|\vec{GA}| = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $|\vec{BC}| = 2$, $\vec{GA} \cdot \vec{BC} = -1$, $-\frac{3}{4}$.

2. 则 $\cos \theta = \frac{\vec{GA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{GA}| |\vec{BC}|} = -\frac{2\sqrt{7}}{7}$. 所以, 面 PAB 与面 CPB 所成

二面角的大小为 $\pi - \arccos \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

评析 解立体几何问题关键是要分析清楚立体图形中的点、线、面之间的相对位置关系. 掌握常见的求距离、求角的方法. 本题第(2)问采用了将二面角的大小化归为分别与两个半平面共面且垂直于棱的两个向量所成的角来解决. 使用此法解题时要注意所选的两个向量所成的角与二面角的关系.

19. (1) 令 $n=1$, 得 $2a_1 = a_1 + \frac{1}{a_1}$, 即 $a_1 = \frac{1}{a_1}$, $\because a_1 > 0$, $\therefore a_1 = 1$.

当 $n \geq 2$ 时,

$$\begin{cases} 2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n) = a_n + \frac{1}{a_n}, & \text{①} \\ 2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}) = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}, & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } a_n - \frac{1}{a_n} = -(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}), \text{③}$$

$$\text{③式两边平方得 } a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} - 2 = a_{n-1}^2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} + 2,$$

$$\text{即 } (a_n^2 + \frac{1}{a_n^2}) - (a_{n-1}^2 + \frac{1}{a_{n-1}^2}) = 4,$$

故 $\{a_n^2 + \frac{1}{a_n^2}\}$ 是以 2 为首项, 4 为公差的等差数列.

$$\therefore \text{得 } a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} = 2 + 4(n-1) = 4n - 2.$$

$$(2) \because c_n = 4n - 2,$$

$$\therefore b_n = \frac{c_n^2 + c_{n+1}^2}{2c_n c_{n+1}} = \frac{(4n-2)^2 + (4n+2)^2}{2(4n-2)(4n+2)} = \frac{4n^2 + 1}{4n^2 - 1} = 1 + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1},$$

故数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = n + (1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{7}) + \cdots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}) = n + 1 - \frac{1}{2n+1}$.

评析 在利用关系式 $a_n = \begin{cases} S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \\ S_1, & n = 1 \end{cases}$ 时, 特别要注意分 $n=1$ 和 $n \geq 2$ 两种情况来讨论. 第(2)问中求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和时利用到了裂项相消的技巧.

20. (1) $p(\xi)$ 是 ξ 个正面向上, $4-\xi$ 个背面向上的概率. 其中 ξ 可能取值为 0, 1, 2, 3, 4.

$$\therefore p(\xi=0) = C_4^0 (1 - \frac{1}{2})^2 C_2^0 (1-a)^2 = \frac{1}{4} (1-a)^2.$$

$$p(\xi=1) = C_2^1 \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) C_2^0 (1-a)^2 + C_2^0 (1 - \frac{1}{2})^2 \cdot C_2^1 a (1-a) = \frac{1}{2} (1-a).$$

$$p(\xi=2) = C_2^2 (\frac{1}{2})^2 C_2^0 (1-a)^2 + C_2^1 \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) C_2^1 a (1-a) + C_2^0 (1 - \frac{1}{2})^2 C_2^2 a^2 = \frac{1}{4} (1+2a-2a^2).$$

$$p(\xi=3) = C_2^2 (\frac{1}{2})^2 C_2^1 a (1-a) + C_2^1 \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) C_2^2 a^2 = \frac{a}{2}.$$

$$p(\xi=4) = C_2^2 (\frac{1}{2})^2 C_2^2 a^2 = \frac{1}{4} a^2.$$

$$(2) \because 0 < a < 1, \therefore p(\xi=0) < p(\xi=1), p(\xi=4) < p(\xi=3),$$

$$\text{则 } p(\xi=2) - p(\xi=1) = \frac{1+2a-2a^2}{4} - \frac{1-a}{2} =$$

$$-\frac{2a^2-4a+1}{4} \geq 0.$$

$$p(\xi=2) - p(\xi=3) = \frac{1}{4}(1+2a-2a^2) - \frac{a}{2} = -\frac{1}{4}(2a^2-1) \geq 0.$$

$$\text{由 } \begin{cases} 2a^2-4a+1 \leq 0 \\ 2a^2-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2-\sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{2+\sqrt{2}}{2}, \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

$$\therefore \frac{2-\sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ 即 } a \in \left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

(3) (只理科做) 由(1)知 ξ 的数学期望为

$$E\xi = 0 \times \frac{1}{4}(1-a)^2 + 1 \times \frac{1}{2}(1-a) + 2 \times \frac{1}{4}(1+2a-2a^2) + 3 \times \frac{a}{2} + 4 \times \frac{a^2}{4} = 2a+1.$$

评析 有关期望与方差的解答试题一般在理科卷中出现,理科考试的重点是统计部分的知识,文科考试的重点是概率部分的知识.在实际问题中建立概率模型并准确地运用公式求其概率是解答本题的关键.

$$21. (1) \text{ 设 } P \text{ 点坐标为 } (x, y) \text{ 则由 } (\overrightarrow{PQ} + 2\overrightarrow{PC}) \cdot (\overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{PC}) = 0 \Rightarrow |\overrightarrow{PQ}|^2 = 4|\overrightarrow{PC}|^2 \Rightarrow 1+x+4y^2 = 4[(x+1)^2 + y^2] \Rightarrow 3x^2 + 4y^2 = 12 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \text{ 即所求轨迹为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 由于 $\angle MDN$ 的角平分线垂直于 AO (即垂直于 x 轴), 所以设 $k_{DM} = k$, 则 $k_{DN} = -k$, $\therefore DM$ 的方程为 $y - \frac{3}{2} = k(x+1)$

$$), \text{ 代入 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow 3x^2 + 4[k(x+1) + \frac{3}{2}]^2 = 12 \Rightarrow (3+4k^2)x^2 + 8k^2x + 4k^2 + 12kx + 12k - 3 = 0 \Rightarrow (3+4k^2)x^2 + (8k^2+12k)x + 4k^2 + 12k - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_D x_M = \frac{4k^2 + 12k - 3}{3 + 4k^2}, \text{ 又因为 } x_D = -1, \text{ 所以 } x_M = \frac{-4k^2 - 12k + 3}{3 + 4k^2}, y_M = k\left(\frac{-4k^2 - 12k + 3}{3 + 4k^2} + 1\right) + \frac{3}{2} = \frac{-4k^3 - 12k^2 + 3k}{3 + 4k^2} + k + \frac{3}{2}.$$

$$\text{同理得 } x_N = \frac{-4k^2 + 12k + 3}{3 + 4k^2}, y_N = \frac{4k^3 - 12k^2 - 3k}{3 + 4k^2} - k + \frac{3}{2}$$

$$\therefore k_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{\frac{-12k}{3 + 4k^2}}{\frac{24k}{3 + 4k^2}} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } \because A(-2, 0), B(1, -\frac{3}{2}), \therefore k_{AB} = -\frac{\frac{3}{2}}{1+2} = -\frac{1}{2} = k_{MN},$$

$\therefore$ 存在实数 λ , 使 $\overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{AB}$ 成立

评析 解析几何解答题是每年必考之题. 本题主要考查向量的运算、圆锥曲线的轨迹方程以及直线与圆锥曲线的交点问题. 在第(1)问中找出动点 P 满足的几何条件是解题的关键. 对于第(2)问利用韦达求解 M, N 两点的坐标是减少计算量提高解题速度的关键.

$$22. (理) \because g(x) + g(2-x) = 4,$$

$$\therefore x^3 - ax^2 + bx + c + (2-x)^3 - a(2-x)^2 + b(2-x) + c = 4,$$

$$(6-2a)x^2 + (4a-12)x + 8-4a+2b+2c = 4, \text{ 取 } x=0, 1 \text{ 可得}$$

$$a=3, b+c=4,$$

$$\therefore g(x) = x^3 - 3x^2 + bx + 4 - b.$$

$$\therefore f(x) \text{ 对一切 } m \in (0, 3), n \in (0, 3) \text{ 且 } m \neq n \text{ 都有 } \frac{f(m) - f(n)}{m - n}$$

> 0 成立,

$\therefore$ 当 $m > n$ 时, $f(m) > f(n)$, $\therefore f(x)$ 在 $(0, 3)$ 上为增函数,

所以 $f'(x) = \log_3 e \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) \geq 0$ 对一切 $x \in (0, 3)$ 恒成立,

因此 $g'(x) \geq 0$ 对一切 $x \in (0, 3)$ 恒成立,

所以 $3x^2 - 6x + b \geq 0$ 对一切 $x \in (0, 3)$ 恒成立, $\therefore b \geq 3$,

因为 $g(x)$ 在 $x \in (0, 3)$ 上为增函数, 所以 $g(x) > g(0) = 4 - b \geq 0$,

$$\therefore b \leq 4, \therefore 3 \leq b \leq 4.$$

(文) (1) 当 $x \in [-1, 0]$ 时, $2-x \in [2, 3]$,

$$f(x) = g(2-x) = 2a(-x) - 4(-x)^3 = 4x^3 - 2ax,$$

$$\text{得 } f(x) = 4x^3 - 2ax \quad (x \in [-1, 0]).$$

$\therefore y = f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是偶函数,

$$\therefore \text{当 } x \in [0, 1] \text{ 时, } f(x) = f(-x) = -4x^3 + 2ax.$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 2ax & -1 \leq x < 0 \\ -4x^3 + 2ax & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(2) 原命题条件等价于 $[f(x)]_{\max} = 12$, 因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以只需考虑 $0 \leq x \leq 1$ 的情况.

$$\text{求导 } f'(x) = -12x^2 + 2a \quad (0 \leq x \leq 1, a > 6),$$

$$\text{由 } f'(x) = 0 \text{ 得 } x = \sqrt{\frac{a}{6}} \text{ 或 } x = -\sqrt{\frac{a}{6}} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{a}{6}} > 1, \text{ 当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时, } f'(x) > 0, f(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上单调递增,}$$

$$\therefore [f(x)]_{\max} = f(1) = 12, \therefore a = 8.$$

综上, 存在 $a = 8$ 使得 $f(x)$ 的图象的最高点在直线 $y = 12$ 上.

评析 导数的应用非常广泛, 为我们解决函数问题提供了有力的工具. 用导数可以解决函数中的最值问题、不等式问题或与解析几何相联系的问题, 在这些知识、方法网络的交汇点上的问题是近年命题的热点.

2006 年全国百校联盟高考《考试大纲》调研卷(九)

考纲分析与考向预测 根据 2006 年考纲的变化作如下预测:

- 基本的传统题仍是试题的主力军.
- 新课程增加的内容(向量、概率、与统计、导数、线性规划)难度不会太大.
- (1) 在小题中要特别注意集合、抽象函数、向量、排列组合创新题, 适当关注即时定义的新型小题.
- (2) 在解答题中, 概率题关注取胜策略或几何计算问题.
- (3) 立体几何关注与平面几何综合问题, 特别注意三角形的内心、外心、垂心、等的几何性质的运用.
- (4) 数列问题有可能与坐标系相结合或与不等式的放缩相结合, 或把数列的离散性构造造成连续的函数, 再用求导法解决问题.
- (5) 导数问题可能是常规的题目, 考查导数的性质的几何意义, 也可能用它的单调性来证明不等式.
- (6) 在解答题中, 三角函数和立体几何可能是最容易的题.
- 整卷运算量不会太大, 注重思想方法, 从不同的层次考查学生的思维水平, 但一些基本的数式化简、字符运算、分类讨论不会少.
- 关注体现数学能力水平的一些变化技巧, 或利用数式结构、图形结构产生联想直至问题解决.

相关事宜	难度系数	平均分	最高分	140 分以上人数百分比	130 ~ 140 分人数百分比	120 ~ 130 分人数百分比	110 ~ 120 分人数百分比	100 ~ 110 分人数百分比
测试学校 西工大附中	0.51	112	148	3.2%	6.1%	9.2%	11.3%	16.2%

测试评价与备考策略 本套试卷难度与 2005 年全国卷相比略有提高. 本试卷具有较高的区分度, 能反映学生对基础知识、基本解题思想和解题方法的掌握情况. 但也反映了考生存在的问题. ①计算准确度不高, 导致部分同学失分较多, ②基础知识不是很扎实, 特别对于一些较新颖的题目不能灵活作答. ③对于中学数学主要思想方法不能灵活运用, 如函数与方程思想, 数形结合思想, 分类讨论思想, 转化化归思想. 要求在二轮复习上, 夯实基础, 掌握重点、热点、难点, 把准 2006 年考纲新要求, 克服不足, 争创佳绩.

$$1. D \text{ 由 } A = \{x | x^2 - 5x - 6 > 0\} \text{ 得 } x > 6 \text{ 或 } x < -1, \text{ 由 } B = \{x | |x - 5| <$$

$$a\} \text{ 得 } 5 - a < x < a + 5, \text{ 又 } 11 \in B, \therefore a > 6,$$

$$\therefore A \cup B = \mathbf{R}, \text{ 故选 } D.$$

评析 本题考查一元二次不等式,绝对值不等式的解法集合间关系的考查.

2. D 由函数 $f(x) = x^2 - 2ax + a$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上有最小值得 a 的范围应为 $a < 1$, $\therefore g(x) = \frac{f(x)}{x} = x + \frac{a}{x} - 2a, g'(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$, 易知在 $x \in (1, +\infty)$ 上 $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 为增函数, 故选 D.

评析 本题考查二次函数的单调性运用, 由一阶导数的正负判断函数的单调性.

3. A 由 $y = \cos(3x - \frac{\pi}{6}) \cos(x - \frac{\pi}{6}) - \cos(3x + \frac{\pi}{3}) \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \sin(3x + \frac{\pi}{3}) \cos(x - \frac{\pi}{6}) + \cos(3x + \frac{\pi}{3}) \sin(x - \frac{\pi}{6}) = \sin(4x + \frac{\pi}{6})$, 其对称轴经过函数的最值点, 得 $x = \frac{\pi}{12}$ 是其中的一条对称轴.

评析 本题考查三角函数变换公式的运用, 先化成一个三角函数表达式, 再使函数取最值即可求得三角函数的对称轴方程.

4. (理) D $z = \frac{[(1+i)^2]^{1002}}{2^{1002}} + \frac{[(1-i)^2]^{1002}}{2^{1002}} = i^{1002} + i^{1002} = -2$,

选 D.

评析 本题考查复数的基本运算.

(文) A 由 $f(n+1) - f(n) = \frac{3}{2}$ 得, 数列 $\{f(n)\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 是首

项为 $f(1) = \frac{3}{2} + f(0) = \frac{5}{2}$, 公差为 $\frac{3}{2}$ 的等差数列, $\therefore S_{20} = 20 \times \frac{5}{2} + \frac{20 \times 19}{2} \times \frac{3}{2} = 335$, 故选 A.

评析 由抽象函数递推关系, 构造新数列再求和.

5. D 由双曲线定义及点 $P(m, n)$ 到原点的距离为 $\sqrt{m^2 + n^2}$ 可得:

$e = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{\lambda \sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{1}{\lambda} > 1, \therefore 0 < \lambda < 1$, 故选 D. (也可直接用解析法推导)

评析 本题考查对双曲线几何意义的理解, 以及双曲线的第一定义.

6. C p 真 $\Rightarrow y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x + a)$ 的值域为 $\mathbb{R} \Rightarrow x^2 + 2x + a$ 可取到

一切正实数 $\Delta = 2^2 - 4a \geq 0 \Rightarrow a \leq 1$;

q 真 $\Rightarrow$ 函数 $y = -(5-2a)^x$ 是减函数 $\Rightarrow (5-2a)^x$ 是增函数 $\Rightarrow 5-2a > 1 \Rightarrow a < 2$.

由于 p 或 q 为真命题, $\therefore p$ 和 q 一真一假, 若 p 真 q 假, 则 a 不存在, 若 p 假 q 真, 则 $1 < a < 2$.

所以所求范围为 $1 < a < 2$.
评析 对数的值域为 $\mathbb{R}$, 则二次函数的判断式大于或等于 0, 运用指数函数单调性注意前面负号.

7. D $a = (1, 2), b = (3, 4),$ ①为假命题; ②为假命题; ③为真命题. 排除 A、B、C 选项. (可验证④真)

评析 本题利用新定义关系式, 考查向量的坐标运算.

8. D 先求出直线 AB 到桌面的距离, 点 A 到桌面的距离就是直线 AB 到桌面的距离. 而 AC 的中点 D 到桌面的距离就是点 A 到桌面距离的一半.

如图, A_1B_1 为 AB 在桌面上的射影, $CD \perp AB, D_1$ 为 D 在 A_1B_1 上的射影.

$\therefore$ 面 ABC 与桌面所成锐二面

角为 45° , 又点 C 到 AB 的距离 CD 为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$\therefore DD_1 = CD_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{6}}{4}a$, 所以 AB 到桌面的距离

为 $\frac{\sqrt{6}}{4}a$, 则 AC 中点到桌面的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{8}a$, 故选 D.

评析 本题借助“三角板”作为背景, 考查线面位置关系、二面角、及有关距离计算.

9. B 逆用二项式定理得 $f(x) = (x-1)^5 + 2, f^{-1}(x) = 1 +$

$$\sqrt[5]{x-2}.$$

- 评析 本题考查二项式定理展开式的逆运算及反函数的求法. 因为 P 为抛物线上的点, 所以 P 到其焦点 F_2 的距离 $|PF_2|$ 与其到准线 l 的距离 d 相等, 因为 P 也是椭圆上的点, P 到其准线 l 的距离也是 d ,

由椭圆第二定义, 得 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|PF_1|}{d} = \frac{c}{a},$ ①

再由椭圆第一定义, 得 $|PF_1| + |PF_2| = 2a,$ ②

由①②两式解得 $|PF_1| = \frac{2ac}{a+c}, |PF_2| = \frac{2a^2}{a+c},$

故 $\frac{|F_1F_2|}{|PF_1|} - \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{2c}{\frac{2ac}{a+c}} - \frac{c}{a} = \frac{a+c}{a} - \frac{c}{a} = 1.$

评析 本题考查抛物线定义, 椭圆的两个定义. 用最基本的知识解决问题, 是考生容易忽视的.

11. D 从 10 点中取 4 点有 $C_{10}^4 = 210$ 种方法, 其中 4 点共面的情形有三种:

① 4 点在四面体的一个面内 (如 $AHGC$ 在面 ACD 内), 这样的取法有 $4C_6^4$ 种;

② 4 点所在平面与四面体的一组对棱平行 (如 $EFGH$ 与 AC, BD 平行), 这种取法有 3 种;

③ 4 点是一条棱上的三点及对棱中点 (如 $AEBG$), 这样的取法共 6 种. 故 4 点不共面的取法有 $C_{10}^4 - (4C_6^4 + 3 + 6) = 141$

种. 所求概率 $\frac{141}{210} = \frac{47}{70}.$

评析 考查空间四个点不共面、概率的概念和计算, 以及分类讨论的数学思想. 属中等问题, 易错题.

12. B $\frac{2^{2005}}{\sqrt[2006]{\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_{2005}}} = 2^{2006} \cdot \sqrt[2006]{\pi_1' \pi_2' \cdots \pi_{2005}'} = 2^{2006} \sqrt[2006]{2 \cdot 2 \pi_1 \cdots 2 \pi_{2004} \cdot 2 \pi_{2005}} = 2^{2006} \sqrt[2006]{\pi_1 \cdot \pi_2 \cdots \pi_{2004} \cdot \pi_{2005}} = 2^{2006} \sqrt[2006]{2^{2005} \times 2^{2006}} = 2^{2006}.$

评析 本题是数列新定义题型, 注意仔细分析题意, 找出递推关系, 分析解决问题.

13. 256 $a_9 = 2^{9-1} = 2^8 = 256$;

$S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 = (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8) = (2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8) + (3 + 7 + 11 + 15) = 341 + 36 = 377.$

评析 本题注意 a_n 的分段要求, 在求和中巧妙构造等差、等比数列, 再求和.

14. 6 如图画出可行域 (阴影部分), 记 $z = x + y$, 化为 $y = -x + z$, 将其视为直线在可行域内移动, 移到图中 A 点 (直线与圆在第一象限的交点) 时, 纵截距最大, 即 $x + y$ 最大.

解 $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \\ y = 2x \end{cases}$ 得 A 的坐标为 $(2, 4)$, 故 $(x + y)_{\max} = 2 + 4 = 6.$

评析 本题是线性规划问题, 先作出可行域, 再通过平移目标函数求出其最大值.

15. 26 因 $e = \log_p q > 1$, 且 $1 \leq p \leq 9, 1 \leq q \leq 9$, 所以 $1 < p < q \leq 9$.

又 $p, q \in \mathbb{N}^*$, 故当 $p = 2$ 时, q 可取 $3, 4, 5, \dots, 9$ 共 7 个值, 当 $p = 3$ 时, q 可取 $4, 5, 6, \dots, 9$ 共 6 个值, $\dots$, 当 $p = 8$ 时, q 可取 9 共 1 个值. 可构成 $\log_p q$ 个数为 $1 + 2 + 3 + \cdots + 7 = 28$ 个.

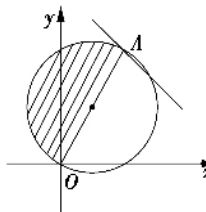
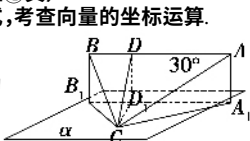
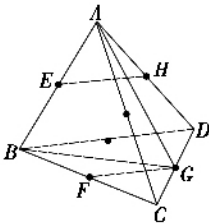
去掉相等的 2 个 $\log_4 2 = \log_3 9, \log_2 3 = \log_4 9$, 共有 26 个不同形状的双曲线.

评析 结合双曲线离心率的范围, 由对数式意义限定 p, q 范围, 再分类讨论出双曲线的个数.

16. ③④ 由 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数, 可得 $x - 1 < [x] \leq x$, 即①正确;

又 $(x+1) - [x+1] = x - [x]$, 即 $x - [x]$ 是周期函数, 即②正确; 而 $2.2 - [2.2] = 0.2, -2.2 - [-2.2] = -2.2 - (-2) = -0.2$, 即 $x - [x]$ 不是偶函数, ③不正确. 由 $x = [x] + \{x\}$ 即 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数, 可得 $0 \leq \{x\} < 1$, 即④不正确. 故应填③④.

评析 本题考查新定义数学概念的应用及性质研究, 此题源于数学竞赛, 而又不拘泥于数学竞赛的难度考查, 适合高考的考查要求.



17. (1) $\therefore$ 向量 $a \cdot b = (m, n) \cdot (\sin x, 1) = m \sin x + n \in [-7, 1]$,
 $\therefore$ 当 $m > 0$ 时, 有 $\begin{cases} m+n=1 \\ -m+n=-7 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m=4 \\ n=-3 \end{cases}$, 此时 $a \cdot c = (m, n) \cdot (\cos x, \sin x) = m \cos x + n \sin x = 4 \cos x - 3 \sin x = 5 \cos(x + \varphi)$ ($\tan \varphi = \frac{3}{4}$), $\therefore (a \cdot c)_{\max} = 5$.
 当 $m < 0$ 时, 有 $\begin{cases} m+n=-7 \\ -m+n=1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m=-4 \\ n=-3 \end{cases}$,
 此时 $a \cdot c = (m, n) \cdot (\cos x, \sin x) = m \cos x + n \sin x = -4 \cos x - 3 \sin x = -5 \cos(x - \varphi)$ ($\tan \varphi = \frac{3}{4}$), $\therefore (a \cdot c)_{\max} = 5$.
 综上所述可得 $(a \cdot c)_{\max} = 5$.

- (2) 由 (1) 若 $m > 0$, 可得 $\begin{cases} m=4 \\ n=-3 \end{cases}$,
 此时 $\vec{OP} = a + c = (4, -3) + (\cos x, \sin x) = (4 + \cos x, \sin x - 3)$,
 可得点 $P(x, y)$ 的轨迹方程为 $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 1$.
 $|a+c| = |\vec{OP}| = \sqrt{(4+\cos x)^2 + (\sin x-3)^2}$
 $= \sqrt{26+2(4\cos x-3\sin x)} = \sqrt{26+10\cos(x+\varphi)} \leq 6$,
 即 $|a+c|_{\max} = 6$.

评析 本题考查了向量的坐标运算, 以及分类讨论的数学思想方法.

18. (1) 这位同学卷面上的正确答案不少于 8 个'等价于'靠猜测做 3 题中正确答案的个数不少于 1 个', 这个事件是 3 次独立重复试验, 在每次试验中选中正确答案的概率是 $\frac{1}{4}$, 所以, $C_3^1 \times (\frac{1}{4})^1 \times (\frac{3}{4})^2 + C_3^2 \times (\frac{1}{4})^2 \times (\frac{3}{4}) + C_3^3 \times (\frac{1}{4})^3 \times (\frac{3}{4})^0 = \frac{37}{64}$.

另解 运用对立事件求法. 所求事件的概率为 $1 - C_3^0 \times (\frac{1}{4})^0 \times (\frac{3}{4})^3 = \frac{37}{64}$.

(2) (理) ξ 可能的取值分别为 35, 40, 45, 50. 由 (1) 知

$$P(\xi=35) = C_3^0 \times (\frac{1}{4})^0 \times (\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64};$$

$$P(\xi=40) = C_3^1 \times (\frac{1}{4})^1 \times (\frac{3}{4})^2 = \frac{27}{64};$$

$$P(\xi=45) = C_3^2 \times (\frac{1}{4})^2 \times (\frac{3}{4})^1 = \frac{9}{64};$$

$$P(\xi=50) = C_3^3 \times (\frac{1}{4})^3 \times (\frac{3}{4})^0 = \frac{1}{64}.$$

$$E\xi = 35 \times \frac{27}{64} + 40 \times \frac{27}{64} + 45 \times \frac{9}{64} + 50 \times \frac{1}{64} = 38.75$$

$$(文) P(\xi=45) + P(\xi=50) = \frac{9}{64} + \frac{1}{64} = \frac{5}{32}.$$

评析 本题考查独立重复事件发生的概率问题, 求概率问题有时从正面不好求, 可从反面求解.

19. 解法一 (1) 取 AD 的中点为 G , 连结 BG , 则 $BG \parallel ED$, $\therefore BG \parallel$ 平面 PDE .

在 $\triangle PAD$ 中, F, G 分别为所在边中点,

$\therefore FG \parallel PD$, $\therefore FG \parallel$ 平面 PDE

$\therefore$ 平面 $BFG \parallel$ 平面 PDE ,

$\therefore BF \parallel$ 平面 PDE .

(2) 菱形 $ABCD$, 且 $\angle BAD = 60^\circ \Rightarrow$

$\triangle BCD$ 是正三角形 $\Rightarrow DE \perp BC \Rightarrow DE \perp AD$.

又 $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore DE \perp PD$,

$\therefore \angle PDA$ 为二面角 $P-DE-A$ 的平面角,

在 $Rt\triangle PAD$ 中, $\tan \angle PDA = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ 所求二面角的大小为 $\arctan \frac{1}{2}$.

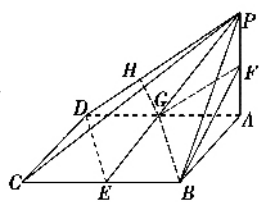
(3) $\because BE = CE, BG \parallel$ 平面 PDE ,

$\therefore$ 点 C 到平面 PDE 的距离等于点 B 、点 G 到平面 PDE 的距离.

过点 G 作 $GH \perp PD$ 于 H ,

$\therefore \begin{cases} DE \perp AD \\ DE \perp PD \end{cases} \Rightarrow DE \perp$ 平面 $PAD \Rightarrow DE \perp GH \Rightarrow GH \perp$ 平面 PDE .

$\therefore GH$ 的长即为点 C 到平面 PED 的距离.



$$\text{在 } \triangle PAD \text{ 中 } GH = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \times 2}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$\therefore$ 点 C 到平面 PDE 的距离是 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

解法二 (1) 同解法一.

(2) 以 A 为原点, 过点 A 且平行于 DE 的直线为 x 轴, AD, AP 所在直线分别为 y, z 轴, 建立空间直角坐标系 $A-xyz$

$$\Rightarrow E(\sqrt{3}, 2, 0), \vec{PD} = (0, 2, -1), \vec{DE} = (\sqrt{3}, 0, 0),$$

设平面 PDE 的法向量 $n_1 = (x, y, z) \Rightarrow \begin{cases} 2y-z=0 \\ \sqrt{3}x=0 \end{cases}$, 得 $n_1 = (0, 1, 2)$.

又 $\because$ 平面 $ABCD$ 的法向量 $n_2 = (0, 0, 1)$,

$$\therefore \cos(n_1, n_2) = \frac{2}{1 \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$\therefore$ 二面角 $A-DE-P$ 的大小为 $\arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(3) 又 $E(\sqrt{3}, 3, 0), \vec{CE} = (0, -1, 0)$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 到平面 } PDE \text{ 的距离 } d = \frac{|n_1 \cdot \vec{CE}|}{|n_1|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

评析 本题考查立体几何线面平行、二面角、点面距离等相关知识. 第(2)问利用空间向量求解, 利用平面向量的法向量证明线面垂直, 利用向量的数量积求二面角, 利用单位向量帮助求距离.

20. (1) 设 $P(x, y)$ 为 $y = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$ 上任意一点, $P'(x', y')$ 为平移后的对应点,

$$\text{则 } \begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y-1 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x = x'-1 \\ y = y'+1 \end{cases}.$$

$$\text{所以 } y'+1 = \frac{2(x'-1)+2}{(x'-1)^2+2(x'-1)+2}, \text{ 即 } y' = \frac{-x'^2+2x'-1}{x'^2+1}.$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{-x^2+2x-1}{x^2+1}.$$

$$(2) y = \frac{-x^2+2x-1}{x^2+1}, \text{ 所以 } (y+1)x^2-2x+y+1=0,$$

$y = -1$ 时, $x=0$, 所以 $y = -1$ 在 $f(x)$ 值域内,

$y \neq -1$ 时, $\Delta = 4 - 4(y+1)^2 \geq 0$, 解得 $y \in [-2, -1) \cup (-1, 0]$.

综上, $f(x)$ 的值域为 $[-2, 0]$, 即 $f(x)$ 最小值为 -2 .

$\therefore$ 不等式 $f(x) \geq m^2 - 2bm - 3$ 对 $b \in [-1, 1]$ 及 $x \in [-1, 1]$ 时恒成立 $\Rightarrow m^2 - 2bm - 3 \leq -2$ 对 $b \in [-1, 1]$ 时恒成立.

即 $m^2 - 2bm - 1 \leq 0$ 对 $b \in [-1, 1]$ 恒成立. 令 $h(b) = m^2 - 2bm - 1$, 则

$$\begin{cases} h(1) = m^2 - 2m - 1 \leq 0 \\ h(-1) = m^2 + 2m - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{2} \leq m \leq 1 + \sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} \leq m \leq -1 + \sqrt{2} \end{cases}.$$

因此, $1 - \sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2} - 1$, 故 m 的取值范围为 $[1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1]$.

评析 本题考查函数按向量平移的解析式的求法, 第二问转化成关于 m 的二次函数, 利用恒成立条件求解.

21. (1) $\because f(\frac{\pi}{3}) + f(\frac{\pi}{3}) = 2f(\frac{\pi}{3}) = f(0)$, 且 $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$,

$$\therefore f(0) = 1.$$

$$\text{又 } f(x) + f(-x) = 2f(0)f(x), \therefore f(x) = f(-x).$$

$$\therefore f(x) + f(\pi - x) = 2f(\frac{\pi}{2})f(x - \frac{\pi}{2}), \text{ 且 } f(\frac{\pi}{2}) = 0,$$

$$\therefore f(x) = -f(\pi - x),$$

$$\text{故有 } f(-x) = f(x) = -f(\pi - x).$$

$$(2) \because f(-x) = f(x) \text{ 且 } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ 时, } f(x) > 0,$$

$$\therefore \text{当 } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ 时, } f(x) > 0.$$

设 $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) + f(\pi - x_2) = 2f(\frac{x_1 + \pi - x_2}{2})$$

$$f(\frac{x_1 + x_2 - \pi}{2}).$$

$$\therefore 0 \leq \frac{x_1 - x_2 + \pi}{2} < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2 - \pi}{2} < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore f(\frac{x_1 + \pi - x_2}{2}) > 0, f(\frac{x_1 + x_2 - \pi}{2}) > 0,$$

从而 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递减.
 (3) 由 (1) 知 $f(-x) = -f(\pi - x)$,
 $\therefore f(x) = -f(\pi + x)$, $g(\pi + x) = -f(2\pi + x)$,
 从而 $f(2\pi + x) = f(x)$, 即 2π 是函数 $f(x)$ 的一个周期.
 评析 考查抽象函数的单调性及周期性, 需紧扣定义证明和求角.

22. (1) $\because a < a + b < ab < a + 2b, a, b \in \mathbb{N}^*$,

$$\therefore \begin{cases} a + b < ab, \\ ab < a + 2b. \end{cases} \therefore \begin{cases} a > \frac{b}{b-1}, \\ a < \frac{2b}{b-1}. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a > 1 + \frac{1}{b-1}, \\ a < 2 + \frac{2}{b-1}. \end{cases} \therefore \begin{cases} a > 1, \\ a < 4. \end{cases}$$

$\therefore a = 2$ 或 $a = 3$ ($a = 3$ 时不合题意, 舍去) $\therefore a = 2$.

(2) $a_m = 2 + (m-1)b, b_n = b \cdot 2^{n-1}$, 由 $a_m + 3 = b_n$ 可得

$$b + (m-1)b = b \cdot 2^{n-1}, \therefore b(2^{n-1} - m + 1) = 5.$$

$$\therefore b = 5.$$

$$(3) \text{ 由 (2) 知 } a_n = 5n - 3, b_n = 5 \cdot 2^{n-1}, \therefore a_m = b_n - 3 = 5 \cdot 2^{n-1} - 3.$$

$$\therefore c_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 3. \therefore S_n = 5(2^n - 1) - 3n, T_n = \frac{1}{2}n(5n - 1).$$

$$\therefore S_1 = T_1 = 2, S_2 = T_2 = 9.$$

当 $n \geq 3$ 时,

$$S_n - T_n = 5[2^n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1] = 5[(1+1)^n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1] = 5[(1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots) - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1] > 5[1 + n + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1] = 0.$$

$$\therefore S_n > T_n. \text{ 综上得 } S_n \geq T_n, n \in \mathbb{N}^*.$$

评析 函数与数列结合是高考命题的热点. 本题考查了数列通项公式以及和的求法, 函数的单调性以及存在性问题.

2006 全国百校联盟高考《考试大纲》调研卷(十)

考纲分析与考向预测 2006 年高考数学文、理科考纲稍有调整变化不大, 大部分调整只是在表述上进一步规范, 使之更贴近考试的要求.

考纲的变化仅是对个别内容的要求有所提高, 这几处对考生的要求本来就不高, 难度也不会太大.

本套试卷较好地反映了新考纲的变化. 具体体现在下面几处:

1. 试题第 17 题中考查了三角函数基本形式 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的变形过程, 还考查了它的性质, 能很好反映新考纲对三角函数的要求. 为适应文理考纲对三角函数要求的增强, 试题还增设了 6、9 两题, 加大对三角函数知识的考查;

2. 试题第 12、19 题一改往年借助导数处理函数的最值的惯例, 而是处理了函数的极值和单调性, 也很好反映了理科新考纲的变化;

3. 试题第 15 题中求参数 k 的范围, 考查了参数思想.

相关事宜 测试学校	难度系数	平均分	最高分	140 分以上人数百分比	130 ~ 140 分人数百分比	120 ~ 130 分人数百分比	110 ~ 120 分人数百分比	110 分以下人数百分比
北大附中	0.54	106	142	1.67%	5.25%	9.8%	21.8%	61.47%

测试评价与备考策略 本套试卷难度与 2005 年全国卷(I、III)相比略有偏高, 由上表测试情况可反映出以下问题. 本试卷加大实际应用题和知识交汇点的综合题的量, 目的是贯彻数学教育的宗旨. 学数学用数学. 但这正是学生的一大弱点.

在测试过程表现出考生对实际问题的背景知识欠缺, 无法理清问题情景中量与量之间的对应关系. 此处不单书本知识的应用, 还要求考生灵活的运用现有知识, 根据问题情景, 建立数学模型, 再应用数学知识来处理问题.

知识交汇题是近几年高考的热点, 是数学内部知识的交融. 体会类似导数在处理函数单调性最值中的工具作用、向量在解决平面几何图形、空间几何图形中边长、夹角、的工具作用.

考生思维定势严重, 选择、填空题不敢用新型解法. 这说明了对于新增内容复习不够, 理解题意不深、识图能力差. 在后期的复习中还应从以下方面进行加强. 考生应研究高考题型、研究分值的分配、重思维轻运算.

1. (理) B 根据复数的运算法则, $\bar{z} \cdot i = (\frac{1}{2} + \frac{i}{2}) \cdot i = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, 故复数 z 对应的点处于第二象限.

评析 该题是考查复数的运算、复数的几何性质. 解题思路是借助复数的运算法则先对因式进行化简, 将复杂形式的复数表示成代数形式.

(文) A 该题采用分类讨论的方式来处理. 第一种情况 $1 \in C, 3 \in C$ 第二种情况 $1 \notin C, 3 \in C$ 第三种情况 $1 \in C, 3 \notin C$ 第四种情况 $1 \notin C, 3 \notin C$. 此时, 只需借助文氏图把元素 2、4、5 分配到合适(除 $A \cap B \cap C$ 和 $A \cap B$ 外)的位置中去, 每种情况都是 $5^3 = 125$ 种. 故总数为 $4 \times 125 = 500$.

评析 该题是一个典型的知识交汇题, 运用到集合的运算和排列、组合的知识. 解题过程采用分类讨论的思想, 将比较复杂的问题简单化.

2. B 解不等式 $\frac{1}{x} - 1 > 0$, 得 $0 < x < 1$. 且由于 $(0, 1)$ 真包含于 $\mathbb{R}^+$, 可得选项 B 为正确答案.

评析 该题属于不等式、简易逻辑交汇的综合题. 同时又兼顾到了集合间的包含关系.

3. C 设 $a \cdot b = f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$, 则 $f'(x) = x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$, 显然当 $x \in [-4, -3]$ 时, $f'(x) > 0$, 函数为增函数; 当 $x \in (-3, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数为减函数; 又 $f(-4) = \frac{20}{3}$, $f(1) = -\frac{5}{3}$, 所以当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 有最小值, 即 $a \cdot b$

的值最小, 此时, $a = (\frac{1}{3}, 1)$, $b = (1, -2)$, $\cos \langle a, b \rangle =$

$$\frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以 } \langle a, b \rangle = \frac{3}{4}\pi.$$

评析 本题考查了平面向量、函数和导数的综合运用. 解题思路是: 以平面向量的运算为载体, 通过将向量的内积表达成函数解析式, 变求内积的最小值为求函数的最小值问题, 同时又利用导数求得了函数的最小值, 进而求出了向量夹角的最大值.

4. D 令 $y = 1$, 可得 $f(x+1) = f(x) + f(1) + 2(x+1) = f(x) + 2x + 3$, 同时 $x = 1, 2, 3, 4, \dots$ 也就是 $a_{n+1} = a_n + (2n+3)$ 的函数形式, 将前面的所有关系式都写出, 再将 $n-1$ 个等式相加, 可得 $a_n = a_1 + 2[1+2+3+\dots+(n-1)] + 3(n-1) = 1 + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} + 3(n-1) = n^2 + 2n - 2$.

$$\text{即 } f(x) = x^2 + 2x - 2.$$

评析 该题看似考查函数, 但问题的解决思路受困于不知函数的解析式, 属于抽象函数问题. 该题的突破口在 $x \in \mathbb{N}^*$ 上, 实质上是应用数列的知识解题.

5. B 由二项式定理得 $(x+1+\frac{1}{x})^7 = [1+(x+\frac{1}{x})]^7$
 $= C_7^0 + C_7^1(x+\frac{1}{x}) + C_7^2(x+\frac{1}{x})^2 + \dots + C_7^r(x+\frac{1}{x})^r + \dots + C_7^7(x+\frac{1}{x})^7, \text{ ①}$

其中第 $r+1$ ($0 \leq r \leq 7$) 项为 $T_{r+1} = C_7^r(x+\frac{1}{x})^r, \text{ ②}$

在 $(x+\frac{1}{x})^r$ 的展开式中, 设第 $k+1$ 项为常数项, 记为 T_{k+1} ,

$$\text{则 } T_{k+1} = C_r^k x^{r-k} (\frac{1}{x})^k = C_r^k x^{r-2k}, (0 \leq k \leq r), \text{ ③}$$

由③得 $r-2k=0$, 即 $r=2k$, r 为偶数, 再根据①、②知所求常数项为

$$C_6^0 + C_7^2 C_1^1 + C_4^4 C_2^2 + C_5^5 C_6^3 = 393.$$

评析 处理多项式问题,我们自然会想到二项式定理.但因式中含有三项,处理方法是变三项为两项(组合两项),再进一步处理即可.解题思路是变形转化.

$$6. C \quad (\sin \sqrt{2} - \sin \sqrt{3})(\cos \sqrt{2} - \cos \sqrt{3}) = \sin(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot [\cos(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 1].$$

因为 $\pi < \sqrt{2} + \sqrt{3} < \frac{3}{2}\pi$, 所以 $\sin(\sqrt{2} + \sqrt{3}) < 0$,

$$0 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \cos(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 1 < 0, \text{ 有 } (\sin \sqrt{2} - \sin \sqrt{3})(\cos \sqrt{2} - \cos \sqrt{3}) > 0,$$

又因为 $0 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \pi$, 所以 $\cos \sqrt{2} - \cos \sqrt{3} > 0$,

所以 $\sin \sqrt{2} - \sin \sqrt{3} > 0$.

$$\text{同时 } (\sin \sqrt{2} - \sin \sqrt{3}) - (\cos \sqrt{2} - \cos \sqrt{3}) = \sqrt{2} [\sin(\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}) - \sin(\sqrt{3} - \frac{\pi}{4})]$$

$$\text{由 } 0 < \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} < \sqrt{3} - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}, \text{ 得 } \sin(\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}) < \sin(\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}),$$

所以 $\sin \sqrt{2} - \sin \sqrt{3} < \cos \sqrt{2} - \cos \sqrt{3}$, 故曲线表示焦点在 y 轴上的椭圆.

评析 该题是以圆锥曲线为载体,考查了三角和不等式知识,是将对三角知识的考查融会在圆锥曲线问题中.其中对三角函数值大小和范围的判断用到了三角变形知识.解题思路是先判断分母的正负,再判断大小.

$$7. B \quad \text{即求 } v_0 = a_n, v_1 = v_0 x + a_{n-1}, v_2 = v_1 x + a_{n-2}, v_3 = v_2 x + a_{n-3}, \dots, v_n = v_{n-1} x + a_0,$$

乘法运算的次数最多可到达 $\frac{(n+1)n}{2}$, 秦九韶算法通过转化把乘法运算的次数减少到最多 n 次.

评析 该题是一个信息给予题,我们先阅读题意,将实际问题中的递推关系还原成表达式,再通过解答的步骤次数来归纳乘法的次数.该题对学生的思维能力要求较高.

$$8. A \quad \text{由椭圆定义知, } |PF_1| + |PF_2| = 10, \text{ 又 } |F_1 F_2| = 6, \text{ 内切圆半径为 } 1,$$

$$\therefore S_{\triangle PF_1 F_2} = \frac{1}{2} (10 + 6) \cdot 1 = 8, \text{ 设 } P \text{ 为 } (x, y),$$

$$\text{又 } S_{\triangle PF_1 F_2} = \frac{1}{2} |F_1 F_2| \cdot y = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot y, \therefore y = \frac{8}{3}.$$

评析 该题是一个数形结合的题目,借形言数是解决问题的根本.解题思路是先应用椭圆的第一定义以及三角形的面积公式,又将要求的纵坐标转成了三角形的高.

$$9. A \quad \text{解法一 由余弦定理,得 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

所以 $a^2 + c^2 - ac = ac$,

整理得 $(a-c)^2 = 0$, 因此 $a = c$.

故 $\triangle ABC$ 为正三角形.

解法二 设 a, b, c 三边依次为 a, aq, aq^2 , 由余弦定理有

$$\cos B = \frac{a^2 + (aq)^2 - (aq^2)^2}{2 \cdot a \cdot aq^2} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \text{ 整理得 } a^2(1 - q^4) = 0, \text{ 解得 } q = 1, q = -1 \text{ (舍去)}.$$

所以 $a = b = c$, 故此 $\triangle ABC$ 为正三角形.

评析 该题融合了数列、三角的知识,属于三角和数列的知识交汇题.即可借助于边的关系,又可借助于角的关系、边的关系的思路已经给出,角的关系考生可以自己尝试.

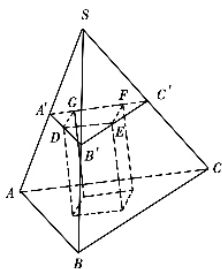
$$10. B \quad \text{设四棱柱的高为 } x, \text{ 底面边长为}$$

$$b, \text{ 则 } \frac{A'B'}{h-x} = \frac{a}{h}.$$

$$\text{在 } \triangle A'B'C' \text{ 中, } \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2} A'B'} = \frac{A'B' - b}{A'B'}$$

$$\text{得 } b = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})a(h-x)}{h},$$

$$\therefore V = b^2 x = \frac{3(7-4\sqrt{3})a^2}{2h^2} (h -$$



$$x)^2 \cdot 2x \leq \frac{3(7-4\sqrt{3})a^2}{2h^2} \cdot (\frac{2h}{3})^3,$$

$$\therefore \text{体积最大值为 } \frac{4(7-4\sqrt{3})}{9} a^2 h.$$

评析 高考近几年把立体几何图形间的切、接状况下对应的体积、面积关系始终作为重点.题意中棱锥的高并不通过四棱柱上下底面中心,因此过棱锥的高作截面不能充分反映两个几何体的关系.应过棱柱上底面作截面,此截面是正三角形,四棱柱上底面是这个正三角形的内接正方形.

$$11. A \quad \text{以正方体的6个面为底面的四棱锥共 } 6 \times 4 = 24 \text{ 个, 6个对} \\ \text{角面为底面的四棱锥共 } 6 \times 4 = 24 \text{ 个, 共 } 48 \text{ 个. 对于三棱锥则} \\ \text{转化为对立事件来处理 } \mathcal{C}_8^4 - 12 = 58. \text{ 显然 } 58 - 48 = 10, \text{ 可} \\ \text{得选项.}$$

$$12. D \quad \text{函数的导函数为 } f'(x) = x^2 + ax + 2b, \text{ 当 } x \in (0, 1) \text{ 时取得} \\ \text{极大值, 当 } x \in (1, 2) \text{ 时取得极小值, 则方程 } x^2 + ax + 2b = 0 \\ \text{在区间 } (0, 1), (1, 2) \text{ 内各有一根,}$$

$$\text{则 } \begin{cases} f'(0) > 0 \\ f'(1) < 0, \text{ 即 } \begin{cases} b > 0 \\ a + 2b + 1 < 0. \end{cases} \\ f'(2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + 2 > 0 \end{cases}$$

在 aOb 平面内所有点 (a, b) 构成区域为一个三角形, 顶点坐标为 $A(-3, 1), B(-1, 0), C(-2, 0)$, 点 (a, b) 与点 $D(1, 2)$ 连线的斜率为 $\frac{b-2}{a-1}$, 显然 $\frac{b-2}{a-1} \in (k_{AD}, k_{BD}) = (\frac{1}{4}, 1)$.

评析 该题层次性强, 先借助导数处理了极值, 进而表达成了二元一次不等式组, 并将其与线性规划知识联系, 转化成了平面区域, 通过数形结合利用斜率公式求得结果. 解题中应用了数形结合思想和等价转化的思想.

$$13. 2 \quad \text{因为 } -1 = \log_3 \frac{1}{3} < \log_3 \frac{1}{2} < 0, \text{ 所以 } f(\log_3 \frac{1}{2}) = \\ (\frac{1}{3})^{\log_3 \frac{1}{2}} = 3^{-\log_3 \frac{1}{2}} = 3^{\log_3 2} = 2.$$

评析 分段函数一直是考试的重点, 不同的自变量取值对应不同解析式. 该题又复合了对数函数, 应用函数的单调性求函数值.

$$14. 2x - y + 2 = 0 \quad \text{要求的直线与已知直线垂直, 可将直线方程待} \\ \text{定为 } 2x - y + c = 0, \text{ 同时兼顾到旋转后的直线与已知直线到原} \\ \text{点距离相等, 故建立等式 } \frac{|2|}{\sqrt{5}} = \frac{|c|}{\sqrt{5}}, \text{ 得 } c = \pm 2, \text{ 结合逆时针旋转}$$

后的图形关系横截距为负, 纵截距为正, 此时 $c = 2$.

评析 几何图形的变化转嫁了对直线位置关系的考查, 待定方程, 建立等式, 最终求得结果.

$$15. -\frac{1}{2} < k < 4 \quad \text{首先由 } f(x) \text{ 恒大于 } 0, \text{ 得 } x^4 + kx^2 + 1 > 0,$$

$$\text{所以 } k \geq 0 \text{ 或 } \begin{cases} k < 0 \\ \Delta = k^2 - 4 < 0 \end{cases}, \text{ 得 } k > -2.$$

其次, 当 $k = 1$ 时, $f(x) = 1$, 满足要求;

$$\text{当 } k > 1 \text{ 时, } f(x) = 1 + \frac{(k-1)x^2}{x^4 + x^2 + 1} \leq 1 + \frac{(k-1)x^2}{2x^2 + x^2} = \frac{k+2}{3}.$$

$$\text{又 } f(x) \geq 1, \text{ 所以 } f(x)_{\min} = 1, f(x)_{\max} = \frac{k+2}{3},$$

$$\text{故只需 } 2 \times 1 > \frac{k+2}{3}, \text{ 得 } k < 4.$$

于是, $1 < k < 4$ 满足要求.

当 $-2 < k < 1$ 时, 与上面相同,

$$\text{得 } f(x)_{\min} = \frac{k+2}{3}, f(x)_{\max} = 1,$$

$$\text{由 } 2 \times \frac{k+2}{3} > 1, \text{ 得 } k > -\frac{1}{2}.$$

$$\text{则 } -\frac{1}{2} < k < 1. \text{ 综上所述得 } -\frac{1}{2} < k < 4.$$

评析 这是一道函数、不等式以及平面几何知识交汇的题目, 以函数、三角形为载体考查了不等式的求解. 该题中涉及到不等式的恒成立问题, 恒成立问题不同于不等式的求解, 而是结合函数的性质将其转化成“等价”的不等式或不等式组来处理. 解题过程用到了分类讨论的思想.

$$16. 60^\circ \quad \text{记点 } D \text{ 折起来前的点为 } D', \text{ 显然 } AB \parallel CD', \text{ 所以 } \angle DCD' \\ \text{就是异面直线 } AB \text{ 和 } CD \text{ 所成的角. 此时, 不难算得, } \angle DCD' = \\ 60^\circ.$$

评析 该题用到回归还原的思想, 你知道吗?

$$17. (1) \because f(x) = 2[1 - \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)] - 2\sqrt{3}\cos 2x - 1 = 4\sin(2x -$$

$$\frac{\pi}{3} + 1,$$

$$\text{又} \because \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \therefore \frac{\pi}{6} \leq 2x -$$

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{即 } 3 \leq 4 \sin(2x - \frac{\pi}{3}) + 1 \leq 5,$$

$$\therefore f(x)_{\max} = 5, f(x)_{\min} = 3,$$

$$(2) \because |f(x) - m| < 2, \therefore m - 2$$

$$< f(x) < m + 2,$$

又 $\because p$ 为 q 的充分条件,

$$\therefore \begin{cases} m - 2 \leq 3 \\ m + 2 \geq 5 \end{cases}$$

$$\text{解得 } 3 \leq m \leq 5.$$

评析 该题在三角知识中复合了简易逻辑的知识. 第一问是将三角函数恒等变形到最简, 再通过“基本”三角函数的性质与公式解决问题, 应用了转化思想. 第二问结合简易逻辑知识将问题转化成三角不等式, 再来处理.

18. (理) (1) 不放回抽样, 抽到的次品数为 0, 1, 2, 并且有

$$P(\xi=0) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}, P(\xi=1) = \frac{C_2^1 C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}, P(\xi=2) = \frac{C_2^2 C_8^1}{C_{10}^3}$$

$$= \frac{1}{15},$$

$$\text{从而有 } E\xi = 0 \times \frac{7}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{3}{5},$$

$$D\xi = (0 - \frac{3}{5})^2 \times \frac{7}{15} + (1 - \frac{3}{5})^2 \times \frac{7}{15} + (2 - \frac{3}{5})^2 \times \frac{1}{15} = \frac{28}{75}.$$

$$(2) \text{有放回抽样时, 抽到的次品数 } \eta \sim B(3, \frac{1}{5}),$$

$$\text{从而有 } E\eta = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}, D\eta = 3 \times \frac{1}{5} \times (1 - \frac{1}{5}) = \frac{12}{25}.$$

评析 典型的离散型随机变量的分布列问题, 通过公式求解数学期望和方差即可.

(文) 记“打一场球获胜”为事件 A , 打 3 场球相当于 3 次独立重复试验, 由 n 次独立重复试验中事件 A 发生 k 次的概率公式, 得对乙队而言各出 3 人比赛中获胜的概率为

$$P_1 = P_3(2) + P_3(3) = C_3^2 \times 0.6^2 \times 0.4 + C_3^3 \times 0.6^3 = 0.648.$$

同理对乙队而言各出 5 人比赛中获胜的概率为

$$P_2 = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 \times 0.6^3 \times 0.4^2 + C_5^4 \times 0.6^4 \times 0.4 + C_5^5 \times 0.6^5 \times 0.4^0 = 0.68256,$$

$$\therefore P_2 > P_1,$$

从而对乙队而言, 采用方案②获胜的可能性要大一些.

$$19. (1) \text{因为 } f'(x) = \frac{1}{x}, \text{ 所以 } x \in (0, 1) \text{ 时, } f'(x) > 1 \Rightarrow |f'(x)| > 1,$$

$$\text{即 } \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| > 1,$$

故当 $x_1, x_2 \in (0, 1)$ 时, $y = \ln x \notin M_D$;

$$(2) \text{由 } f(x) = x^3 + ax + b \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + a,$$

$$\text{当 } x \in (0, \frac{\sqrt{3}}{3}) \text{ 时, } a < f'(x) < 1 + a,$$

因为 $f(x) \in M_D$, 所以 $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$,

$$\text{即 } \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| < 1;$$

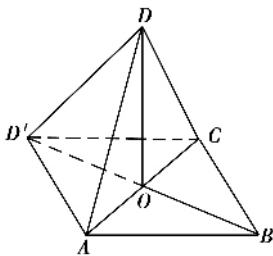
$$\text{所以 } \begin{cases} a \geq -1 \\ 1 + a \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq a \leq 0. \text{ 即为所求.}$$

20. (1) 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A(a, 0, 0), B(a, a, 0), C(0, a, 0), P(0, 0, a), E(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$,

$$\therefore \overrightarrow{AE} = (-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}), \overrightarrow{DP} = (0, 0, a),$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DP} = -\frac{a}{2} \times 0 + \frac{a}{2} \times 0 +$$

$$\frac{a}{2} \times a = \frac{a^2}{2},$$



$$\text{又} \because |\overrightarrow{DP}| = a, |\overrightarrow{AE}| = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DP} \rangle = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{DP}|} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故异面直线 AE, DP 所成角为 $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) $\because F \in$ 平面 PAD , 故设 $F(x, 0, z)$,

$$\text{则有 } \overrightarrow{EF} = (x - \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, z - \frac{a}{2}).$$

$$\because EF \perp \text{平面 } PBC, \therefore EF \perp BC \text{ 且 } EF \perp PC,$$

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{PC} = 0. \end{cases}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{BC} = (-a, 0, 0), \overrightarrow{PC} = (0, a, -a),$$

$$\therefore \begin{cases} (-a)(x - \frac{a}{2}) = 0 \\ (-\frac{a}{2}) \cdot a + (-a) \cdot (z - \frac{a}{2}) = 0 \end{cases} \quad \text{从而 } \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ z = 0. \end{cases}$$

$$\therefore F(\frac{a}{2}, 0, 0), \text{ 取 } AD \text{ 的中点即为 } F \text{ 点.}$$

(3) $\because PD \perp$ 平面 $ABCD, \therefore CD$ 是 PC 在平面 $ABCD$ 上的射影.

又 $\because CD \perp BC$, 由三垂线定理, 有 $PC \perp BC$,

取 PC 的中点 G , 连结 EG , 则 $EG \parallel BC$.

$\therefore EG \perp PC$.

连结 FG .

$\because EF \perp$ 平面 PBC , EG 是 FG 在平面 PBC 上的射影, 且 $PC \perp EG$,

$\therefore FG \perp PC$.

$\therefore \angle FGE$ 为二面角 $F-PC-E$ 的平面角.

$$\therefore G(0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}), \therefore |\overrightarrow{GF}| = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$\therefore \cos FGE = \frac{EG}{FG} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{二面角 } F-PC-E \text{ 的大小为 } \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

21. (理) (1) 令 $x = y = 0$, 得 $f(0) = 0$.

又当 $x = 0$ 时, $f(0) - f(y) = f(-y)$, 即 $f(-y) = -f(y)$.

$\therefore$ 对任意 $x \in (-1, 1)$ 时, 都有 $f(-x) = -f(x)$.

$\therefore f(x)$ 为奇函数.

$$(2) \because \{x_n\} \text{ 满足 } x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{2x_n}{1+x_n^2} = \frac{2}{\frac{1}{x_n} + x_n} < \frac{2}{2} = 1,$$

$$\therefore 0 < x_n < 1.$$

$$\therefore f(x_{n+1}) = f(\frac{2x_n}{1+x_n^2}) = f[\frac{x_n - (-x_n)}{1+x_n \cdot (-x_n)}]$$

$$= f(x_n) - f(-x_n).$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } (-1, 1) \text{ 上是奇函数, } \therefore f(-x_n) = -f(x_n)$$

$$\therefore f(x_{n+1}) = 2f(x_n), \text{ 即 } \frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)} = 2.$$

$\therefore \{f(x_n)\}$ 是以 $f(x_1) = f(\frac{1}{2}) = 1$ 为首项, 以 2 为公比的等比数列.

$$\therefore f(x_n) = 2^{n-1}.$$

$$(3) T_n = \frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \cdots + \frac{1}{f(x_n)}$$

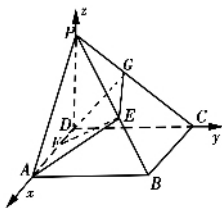
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

假设存在正整数 m , 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 有 $T_n < \frac{m-4}{3}$.

$$\text{即 } 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{m-4}{3} \text{ 对 } n \in \mathbb{N}^* \text{ 成立, 只需 } \frac{m-4}{3} \geq 2, \text{ 即 } m \geq 10.$$

故存在正整数 m , 使得对 $n \in \mathbb{N}^*$, 有 $T_n < \frac{m-4}{3}$ 成立.

此时 m 的最小值为 10.



评析 本题以函数为载体,考查了数列知识,解题过程应用了数学归纳法和反证法.

(文) (1) 依题意有 $-2 < a < 13$,
 $\therefore M - P = 10a^2 + 80a + 205 > 0, M - Q = 10a^2 + 83a + 181 > 0$,
 $\therefore M$ 最大. 又 $P - Q = -24 + 3a$,
 当 $-2 < a < 8$ 时, $P < Q, \lg P + 1 = \lg Q, \therefore 10P = Q, \therefore a = \frac{1}{2}$.

满足 $\lg M = 1 + \lg Q, \therefore a = \frac{1}{2}$ 符合题意.

当 $8 < a < 13$ 时, $P > Q, \lg P = 1 + \lg Q, \therefore 10Q = P, \therefore a = \frac{86}{7}$.

但此时不满足 $\lg M = 1 + \lg P, \therefore a \neq \frac{86}{7}$.

$\therefore \{a_n\}$ 的前三项为 $\lg P, \lg Q, \lg M$, 此时 $a = \frac{1}{2}, \therefore a_n = \lg P + (n-1) \times 1 = n - 2\lg 2$.

(2) $\therefore 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}, \therefore f(x) = 0$ 时, $(x+1)(a_n x + a_{n+2}) = 0$,

$\therefore b_n = |x_1 - x_2| = \left| \frac{a_{n+2}}{a_n} - 1 \right| = \left| \frac{2}{a_n} \right|$,

又 $\therefore a_n = n - 2\lg 2 > 0, \therefore b_n = \frac{2}{a_n}, \therefore b_{n-1} b_n = \frac{2}{a_{n-1}} \times \frac{2}{a_n} = 4 \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right)$.

$\therefore T_n = \frac{1}{4} (b_1 b_2 + b_2 b_3 + \cdots + b_{n-1} b_n) = \frac{1}{4} \times 4$

$\left[\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) \right]$
 $= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1-2\lg 2} - \frac{1}{n-2\lg 2} = \frac{(1-2\lg 2)(n-2\lg 2)}{(n-2\lg 2)(1-2\lg 2)}$.

22. (1) 依题意四边形 OF_1PM 为菱形, 设 $P(x, y)$, 则 $F_1(-c, 0)$,
 $M\left(\frac{a^2}{c}, y\right)$,

$$\begin{cases} |\overrightarrow{F_1O}| = |\overrightarrow{OM}| \Rightarrow \left(\frac{a^2}{c}\right)^2 + y^2 = c^2 \\ \overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{OP} = 0 \Rightarrow \left(\frac{a^2}{c} + c\right)x + y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{b^2}{c} \\ y^2 = \frac{b^2(a^2 + c^2)}{c^2} \end{cases}, \text{代入}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 得 } \frac{b^4}{a^2 c^2} - \frac{(a^2 + c^2)}{c^2} = 1 \text{ 化简得 } e = 2.$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ \frac{c}{a} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{3}, \therefore \text{双曲线 } C \text{ 的方程为 } x^2 - \frac{y^2}{3} = 1. \\ \frac{2}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1 \end{cases}$$

由题意知过 B_2 的直线交曲线 C 于 A, B 两点, 且 $\overrightarrow{B_1A} \perp \overrightarrow{B_1B}$.

设直线 $AB: y = kx - \sqrt{3}$ 代入 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 得 $(3 - k^2)x^2 + 2\sqrt{3}kx - 6 = 0$,

$\begin{cases} 3 - k^2 \neq 0 \\ \Delta = (2\sqrt{3}k)^2 + 24(3 - k^2) > 0 \end{cases} \Rightarrow k \in (-\sqrt{6}, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \sqrt{6})$,

设 $B_1(x_1, y_1), B_2(x_2, y_2)$, 由 $\overrightarrow{B_1A} \perp \overrightarrow{B_1B}$

$\Rightarrow x_1 x_2 + (kx_1 - \sqrt{3} - \sqrt{3})(kx_2 - \sqrt{3} - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow (1 + k^2)x_1 x_1 - 2\sqrt{3}k(x_1 + x_2) + 12 = 0$,

$\Rightarrow (1 + k^2) \frac{6}{k^2 - 3} - 2\sqrt{3}k \frac{2\sqrt{3}k}{k^2 - 3} + 12 = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{5}$,

$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $y = \pm\sqrt{5}x - \sqrt{3}$.

评析 圆锥曲线知识始终是历年高考的重点, 该题借助于平面向量知识来表达椭圆的几何性质. 最终通过向量的运算以及待定直线方程与圆锥曲线方程联立求解即可, 这正好体现了向量的工具作用.

2006 年全国百校联盟高考《考试大纲》调研卷(十一)

考纲分析与考向预测 针对 06 年新考纲本套试题主要体现在以下特点:

1. 重点内容, 重点考. 有关函数、不等式、数列、空间图形中直线与平面的位置关系、直线与圆锥曲线等内容是支撑中学数学学科知识体系的主要内容, 在数学试卷中占有较大比例, 并达到了一定的深度和广度. 如“函数不仅是高中数学重要知识, 而且是学习其它内容的基础, 是历年高考的热点、重点, 本套题 2、5(理)、9、12、13、16、18、21(文) 对函数的性质、函数思想及方法进行了考查. 又如“数列也是高中的重点内容, 高考常常考, 在 2、20、21、22 重点考查了数列的基础知识, 基本思想、基本方法.

2. 新增内容起点逐渐提高, 难度逐渐加大, 17(理)、18 题比 05 年高要求有所提高, 以向量、概率、导数为纽带的知识交网络汇点应是 06 年高考数学热点, 如 19 题重点通过向量与立体几何的整合, 体现了运算的简便, 合理而灵活, 同时通过条件和结论的开放, 考查了学生的创新能力. 22(理) 以导数工具, 将数列、解几、不等式、极限等融为一体, 重点考查学生运算能力、推理能力、综合运用知识和解决问题的能力.

3. 内容设计新颖, 体现了新课改, 符合 06 年数学考纲要求. 如 5、7、8、12、15、17、18、19、20、22 题.

4. “以能力立意”是高考特点, 11、13(理)、16、20、22 题都有不同程度考查了阅读能力、理解能力、观察能力、分析能力、推理能力, 而这些又是数学能力的重要组成部分.

5. 体现 06 年考纲“稳中有变”精神, 如 5、6、15(理) 21、22.

相关事宜	难度系数	平均分	最高分	140 分以上人数百分比	130 ~ 140 分人数百分比	120 ~ 130 分人数百分比	110 ~ 120 分人数百分比	110 分以下人数百分比
测试学校								
清华附中	0.51	98	148	3.2%	6.1%	9.2%	11.3%	16.2%

测试评价与备考策略 1. 对基本概念、基本定理等理解不深, 导致失误. 如 1、2、3、4、7、14、15 等, 因此第二轮复习应回归课本, 重视基础, 透彻理解概念, 弄清公式、定理、法则使用的范围、条件, 同时注意用数学思想指导基础复习, 反过来在基础复习中培养思想方法.

2. 受题海“束缚”, 易定向思维. 如 20 题分期付款问题, 学生易照教材、资料不假思索, 构造等比数学模型, 从而出错. 平时复习, 应多思考、多比较、多总结.

3. 运算能力是高考中考查数学能力的一个方面, 选择合理的方法、灵活运用数学思想方法是数学运算能力的重要体现, 如果算法选择不当, 或者运算能力差, 试题在规定题量内难以完成, 如 8、20、21、22 对学生运算能力要求较高, 复习过程中重视算法的选择, 重视典型题反思、小结以达到举一反三三作用.

4. 高考试题重在考查对知识理解的准确性、深刻性, 重在考查知识的综合灵活运用, 数学思想方法、数学能力的考查, 而本试题对综合能力要求较高, 如 12、16、17、18、22 题, 知识面广, 方法活, 思维量、运算量都较大, 本三、本二等学生完成这类题效果不好, 因此平时复习时应准确把握知识点, 打好基础, 切实提高能力, 努力培养创新意识和实践能力, 全面提高解题能力.

5. 对数学思想方法重视不够, 导致做题效率不高. 复习基础知识的同时, 重视函数与方程的思想方法、数形结合的思想方法、分类讨论的思想方法、转化与化归的思想方法、运动与变换的思想方法等渗透在复习过程中, 提高复习效率.

1. C $A = \mathbf{R}, B = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right), \therefore A \cap B = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$, 故选 C.

2. (理) C 由 $f(x-1) = 1 + f(x) (x \in \mathbf{R}), f(0) = 1$ 得 $f(1) = 0, f(n) - f(n-1) = -1, \therefore$ 数列 $\{f(n)\}$ 是以 0 为首项, -1 为公差的等差数列, $\therefore S_{20} = -190$, 故选 C.

(文) D $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*, a_n = n^2 + \lambda n > 0$ 恒成立, $\therefore$ 当 $n = 1$ 时不等式恒成立, 即 $1 + \lambda > 0$, 故 $\lambda > -1$, $\therefore$ 选 D.

3. C 由球面距得 $\frac{2\pi R}{360}(60 + 40) = \frac{5}{9}\pi R$, $\therefore$ 选 C.

4. C $\therefore m = 3$ 时, 两直线方程为 $3x + 2y + 9 = 0, 3x + 2y + 4 = 0$, 显然两直线平行; 当两直线平行时有 $\frac{m}{3} = \frac{2}{m-1} \neq \frac{3m}{7-m}$, 从而 $m = 3$, $\therefore$ 选 C.

5. (理) B $\therefore y' = \cos x - 2 < 0, \therefore$ 函数在 $(0, 2\pi)$ 是减函数, $\therefore$ 选 B.

评析 考查运用导数求函数的单调性.

(文) B 曲线过点 $(\sqrt{a}, 3)$, $\therefore 3 = 2a^2 + 1 (a > 0)$, 故 $a = 1$, 又 $y' = 4x$, $\therefore$ 斜率 $k = 4$, 由点斜式得直线方程为 $y = 4x - 1$, $\therefore$ 选 B.

评析 考查导数几何意义, 及直线方程.

6. B 设 AB 的中点 $M(x_0, y_0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由作法得

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{ax_0}{by_0} = -1, \therefore \frac{ax_0}{by_0} = 1, \text{ 又 } \frac{y_0}{x_0} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 故选 B.}$$

评析 运用“作差法”解决有关弦的中点问题.

7. C 由图可知, 函数为周期函数, 且周期为 8, 根据三角函数的对称性有 $f(1) + f(2) + \dots + f(8) = 0$,
 $\therefore f(1) + f(2) + \dots + f(2006) = f(1) + f(2) + \dots + f(250 \times 8 + 6) = f(1) + f(2) + \dots + f(6)$,
 又 $f(2) + f(6) = 0, f(3) = f(1) = -f(5), f(4) = 0, \therefore f(1) + f(2) + \dots + f(2006) = f(1)$,
 $\therefore A = 2, \omega = \frac{\pi}{4}, \varphi = 0, \therefore f(1) = \sqrt{2}, \therefore$ 选 C.

评析 考查三角函数的图象及性质, 周期函数的性质.

8. B $\because D$ 在直线 OM 上, $\therefore$ 设 $OD = \lambda \cdot OM = (2\lambda, \lambda)$,
 $\frac{DP}{DQ} \cdot \frac{DQ}{DQ} = (1 - 2\lambda, 7 - \lambda) \cdot (5 - 2\lambda, 1 - \lambda) = 5\lambda^2 - 20\lambda + 12 \geq -8, \therefore$ 选 B.

评析 考查向量有关知识, 函数最值的一般求法.

9. D $\because$ 原函数过点 $(2, 0)$, $\therefore$ 反函数过点 $(0, 2)$, 故可排除 A、B, 又原函数是减函数, $\therefore$ 反函数也是减函数, $\therefore$ 选 D.

评析 考查原函数与反函数的关系, “赋值法”是求解选择题常用方法.

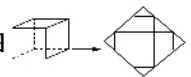
10. (理) B $E\eta = E(12\xi - 1) = 12E\xi - 1 = 12\left[\frac{1}{3} \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot (-1)\right] - 1 = 1$.

(文) C 设等腰三角形腰 $AC = AB = 1$, 则底 $CB = \sqrt{2}$, 如图:

折后 $CD = BD = \frac{\sqrt{2}}{2}, BD \perp CD, \therefore BC^2 = CD^2 + BD^2 = 1$, 即 $AB = BC = AC, \therefore \angle ABC = 60^\circ, \therefore$ 选 C.

评析 二面角是立体几何中最重要的角, 是高考的重点、热点, 对折问题要分清折前折后哪些量变了, 哪些量没变.

11. C 三位正整数共有 $9 \times 10 \times 10$ 恰好是无重复数字的三位数共有 $A_9^3 + A_8^2 + A_7^1 + \dots + A_2^2 = 240, \therefore$ 任取一个三位正整数恰好是无重复数字的三位数的概率是 $\frac{240}{9 \times 10 \times 10} = \frac{4}{15}, \therefore$ 选 A.

12. (理) B 将正方体展开如图  要使所用纸

面积最小, 易计算出面积为 8, $\therefore$ 选 B.

评析 本题难度较大, 先将正方体展开, 然后“围成”正方形, 计算面积最小. 培养学生的空间想象能力.

(文) D $\because f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, $\therefore f(0) = 0, f(-x) = -f(x)$, 由 $f(x+4) = f(x) + f(4)$ 得 $f(0) = f(2) = f(4) = f(6) = \dots = f(2006) = 0$, 故选 D.

13. (理) 2 $(1+i) \cdot (-i) + \frac{2i}{1+i} = (1-i) + (1-i)i = 2$.

(文) -12 $f(\lg 50 - \lg 5) = f(\lg 10) = f(1) = -12$.

评析 考查常用对数的运算性质, 分段函数的概念及分段函数值的求法, 分段函数是高中数学重要内容, 是高考的热点之一.

14. (理) $\frac{3}{7}$ 二项式 $(2+3x)^{2n}$ 的展开式二项式系数和为 $a_n = 2^{2n} = 4^n$; 二项式 $(7+3x)^n$ 的展开式各项系数之和 $b_n = 10^n$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 3b_n}{2a_n - 7b_n} = \frac{3}{7}$.

评析 二项式展开式系数与二项式各项的系数易混, 需多加注意.

(文) 95.5 样本的平均成绩为 $\frac{1}{100} (60 \times 15 + 50 \times 92 + 25 \times 110 + 10 \times 130) = 95.5$ (分),
 $\therefore$ 平均成绩为 95.5 分.

评析 求一组数据的平均数是考查统计知识的主要方式之一.

15. (理) 0 $\because$ ①③不正确, $\therefore$ 构成的三个复合“且”命题均为假, $\therefore$ 真命题的个数为 0.

(文) 8 可行域如图, 当 $x = 4, y = 0$ 时 $z = 2x + y$ 有最大值 8.

评析 线性规划问题是新增内容, 是高考考查点之一.

16. $[0, 1]$ 如果 x 是整数, 则 x 为 0; 若 x 不是整数, 则由 $\{x\} = x - [x]$ 得, $\{x\} \in (0, 1), \therefore \{x\}$ 的取值范围是 $[0, 1]$.

评析 本题主要考查阅读能力, 理解能力, 分析和推理能力.

17. (理) (1) 记事件“3 秒后, 质点 M 到 $x = 1$ 处”为 A , 3 秒后因为质点 M 到 $x = 1$ 处, 必须经过两次向右, 一次向左移动.

$$\therefore P(A) = C_3^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

(2) 记事件“2 秒后, 质点 M, N 同时在点 $x = 2$ 处”为 B ; 事件“2 秒后, 质点 M 在点 $x = 2$ 处”为 C ; 事件“2 秒后, 质点 N 在点 $x = 2$ 处”为 D . 事件 C 发生必须质点 M 两次向右, 事件 D 发生必须质点 N 一次向右, 一次向左.

$$\therefore P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

$$P(D) = C_2^1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9},$$

$\therefore$ 事件 C, D 是相互独立的,

$$\therefore P(B) = P(C \cdot D) = P(C) \cdot P(D) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81}.$$

评析 等可能事件, 互斥事件、对立事件、相互独立事件、 n 次重复试验都是概率中必须掌握的内容, 是高考的重点之一, 本题考查了 n 次重复试验恰好发生 k 次的概率及相互独立事件发生的概率.

(文) (1) $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2} \sin A = 2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2} \sin A = \sin^2 A \leq 1$,

$\therefore 0 < A < \pi, \therefore$ 当且仅当 $A = \frac{\pi}{2}$ 时, S 有最大值 1.

(2) 由余弦定理得: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A = 4 - 4 \sin A \cos A = 4 - 2 \sin 2A \geq 2$,

$\therefore 0 < A < \pi, \therefore$ 当且仅当 $A = \frac{\pi}{4}$ 时, a 有最小值 $\sqrt{2}$.

评析 主要考查三角常用知识及正弦定理的应用.

18. (1) 第一小组做了 3 次发芽实验, 至少有 2 次发芽的概率为:
 $C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + C_3^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{20}{27}.$

(3) 实验次数为 3 次的概率为 $C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}.$

评析 本题考查概率问题, 等可能事件、互斥事件、对立事件, 相互独立事件发生的概率, n 次重复试验的概率都是高考的热点.

19. 设 $C_1 A_1 = a, C_1 B_1 = b, C_1 C_1 = c$,
 由 $A_1 B \perp AC_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1 B} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0 \Leftrightarrow (b - a + c) \cdot (-c - a) = 0$,
 $\therefore a \cdot b = |a|^2 - |c|^2$ ①
 由 $A_1 B \perp B_1 C \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1 B} \cdot \overrightarrow{B_1 C} = 0 \Leftrightarrow (b - a + c) \cdot (c - b) = 0$,
 $\therefore a \cdot b = |b|^2 - |c|^2$ ②
 由 $B_1 C_1 = A_1 C_1$ 得 $|a|^2 = |b|^2$ ③
 由①②③不难看出①、② $\Rightarrow$ ③; ①、③ $\Rightarrow$ ②;
 ②、③ $\Rightarrow$ ①.

评析 本题是运用向量工具解决动态立几题, 是新教材特点之一, 也是高考的热点, 由于是开放性问题, 对逻辑推理能力、整体观察能力等都有一定的要求.

20. (1) 购买时付了 34 000 元, 欠款 100 000 元. 每年付 5 000 元, 分 20 次付清, 设每年付款数顺次组成数列 $\{t_n\}$, 则
 $a_1 = 5 000 + 100 000 \times 0.06 = 11 000$,
 $a_2 = 5 000 + (100 000 - 5 000) \times 0.06 = 107 000$,
 $a_3 = 5 000 + (100 000 - 5 000 \times 2) \times 0.06 = 104 000$,
 类推, 得数列 $\{t_n\}$ 以 11 000 为首项, 公差为 -300 的等差数列.
 $a_n = 11 000 - 300(n - 1) (1 \leq n \leq 20)$.
 $\therefore$ 付款数 $\{t_n\}$ 组成等差数列, 公差 $d = -300$, 全部贷款付清后, 付款总数为 $S_{20} + 34 000 = \frac{20(a_1 + a_{20})}{2} + 34 000 = 197 000$

(元).

(2) 调息后每年多付利息的数组成数列 $\{t_n\}$, 则

$$b_1 = 100 000 \times (6\% - 5.8\%) = 100 \times 2 = 200,$$

$$b_2 = (100 000 - 5 000) \times 0.2\% = 200 - 5 \times 2 = 190,$$

$$b_3 = (100 000 - 5 000 \times 2) \times 0.2\% = 200 - 5 \times 2 \times 2 = 180,$$

类推,得数列 $\{b_n\}$ 以 200 为首项,公差为 -10 的等差数列.

$$\therefore b_{20} = 200 + (20 - 1) \times (-10) = 10,$$

$$\therefore \text{多付利息和为 } \frac{20(b_1 + b_{20})}{2} = 2100 \text{ (元)}.$$

答 全部贷款付清后,买这套住房实际花了 197 000 元,比提高利率前多付 2 100 元利息.

评析 数列与生活联系紧密,购房分期付款的方式多种多样,按教材中“分期付款”等比数列知识解决.重点考查阅读理解能力,分析能力以及等差数列的有关知识.

21. (理) (1) $\because \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MP}$, 故 P 为 MN 中点.

又 $\because \overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{PF}$, P 在 y 轴上, F 为 $(1, 0)$, 故 M 在 x 轴的负方向上, 设 $N(x, y)$, 则 $M(-x, 0)$, $P(0, \frac{y}{2})$, $(x > 0)$,

$$\therefore \overrightarrow{PM} = \left(-x, -\frac{y}{2}\right), \overrightarrow{PF} = \left(1, -\frac{y}{2}\right),$$

$$\text{又 } \because \overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{PF}, \text{ 故 } \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PF} = 0,$$

$$\text{即 } -x + \frac{y^2}{4} = 0, \therefore y^2 = 4x (x > 0) \text{ 是轨迹 } C \text{ 的方程}.$$

(2) 抛物线 C 的准线方程是 $x = -1$,

由抛物线定义知 $|\overrightarrow{AF}| = x_1 + 1$, $|\overrightarrow{BF}| = x_2 + 1$, $|\overrightarrow{DF}| = x_3 + 1$,

$\because |\overrightarrow{AF}|, |\overrightarrow{BF}|, |\overrightarrow{DF}|$ 成等差数列, $\therefore x_1 + 1 + x_3 + 1 = 2(x_2 + 1)$,

$$\therefore x_1 + x_3 = 2x_2,$$

又 $y_1^2 = 4x_1$, $y_2^2 = 4x_2$, $y_3^2 = 4x_3$, 故 $y_1^2 - y_2^2 = (y_1 + y_3)(y_1 - y_3)$

$$= 4(x_1 - x_3), \therefore k_{AD} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} = \frac{4}{y_1 + y_3},$$

$$\therefore AD \text{ 的中垂线为 } y = -\frac{y_1 + y_3}{4}(x - 3),$$

而 AD 中点 $(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2})$ 在其中垂线上,

$$\therefore \frac{y_1 + y_3}{2} = -\frac{y_1 + y_3}{4}(\frac{x_1 + x_3}{2} - 3), \text{ 即 } 1 = -\frac{1}{2}(x_2 - 3), \therefore x_2 = 1,$$

$$\text{由 } y_2^2 = 4x_2, \therefore y_2 = \pm 2,$$

$\therefore B$ 点坐标为 $(1, 2)$ 或 $(1, -2)$.

评析 本题综合性较强,考查了向量、等差数列、点的轨迹和方程、抛物线与直线的位置关系.

(文) (1) $\because f(0) = 0, \therefore a = 0$,

$$\therefore f(2) = 2, \therefore 2b = 2 + c, \text{ ①}$$

$$\text{又 } f(-2) < -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{4}{-2b - c} < -\frac{1}{2}. \text{ ②}$$

$$\text{①代入②得 } 0 < c < 3,$$

$$\therefore b, c \in \mathbb{N}^*, \therefore c = 2, b = 2,$$

$$\therefore f(x) = \frac{x^2}{2(x-1)} (x \neq 1).$$

(2) 假设存在满足条件的数列 $\{a_n\}$,

$$\therefore \text{由题设得 } 4S_n \cdot \frac{(\frac{1}{a_n})^2}{2(\frac{1}{a_n} - 1)} = 1 \text{ 得 } 2S_n = a_n - a_n^2, \text{ ③}$$

$$\text{且 } a_n \neq 1, \text{ 以 } n-1 \text{ 代 } n \text{ 得 } 2S_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-1}^2, \text{ ④}$$

由③与④两式相减得:

$$2a_n = (a_n - a_{n-1}) - (a_n^2 - a_{n-1}^2), \text{ 即 } (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} + 1) = 0,$$

$$\therefore a_n < 0, \therefore a_n - a_{n-1} = -1,$$

$$\text{以 } n=1 \text{ 代入③得 } 2a_1 = a_1 - a_1^2,$$

$$\text{解得 } a_1 = 0 \text{ (舍去) 或 } a_1 = -1,$$

$$a_1 = -1, \therefore a_n - a_{n-1} = -1, \text{ 即 } \{a_n\} \text{ 是以 } -1 \text{ 为首项, } -1 \text{ 为公差的等差数列, } \therefore a_n = -n,$$

$\therefore$ 存在满足条件的数列 $\{a_n\}$, 此时 $a_n = -n$.

22. (理) (1) 由曲线 C 上的点 $P_n(x_n, y_n)$ 处的切线 l_n 的斜率中 $k_n = y'|_{x=x_n} = 3x_n^2$, $\therefore l_n$ 的方程为 $y - y_n = 3x_n^2(x - x_n)$, ①

$$\text{曲线 } C: y = x^3, \text{ ② } y_n = x_n^3, \text{ ③}$$

$$\text{由①②③消去 } y \text{ 得 } x^3 - 3x_n^2x + 2x_n^3 = 0,$$

$$\text{即 } (x - x_n)^2(x + 2x_n) = 0, \therefore x = x_n \text{ 或 } x = -2x_n,$$

$$\text{由 } x = x_n \text{ 得到 } P_n(x_n, x_n^3), \text{ 由 } x = -2x_n \text{ 得到 } P_{n+1}(-2x_n, (-2x_n)^3),$$

$$\therefore x_{n+1} = -2x_n, y_{n+1} = (-2x_n)^3,$$

故数列 $\{x_n\}$, 其首项为 1, 公比为 -2, $x_n = (-2)^{n-1}$, $y_n = (-8)^{n-1}$.

(2) 由(1)知 $P_{n+1}((-2)^n, (-8)^n)$, $P_{n+2}((-2)^{n+1}, (-8)^{n+1})$,

则 l_{n+1} 的方程为 $y - (-8)^n = 3(-2)^{2n}[x - (-2)^n]$ 化简为 $3 \cdot 4^n x - y - 2 \cdot (-8)^n = 0$.

$$d_n = \frac{|3 \cdot 4^n \cdot (-2)^{n-1} - (-8)^{n-1} - 2 \cdot (-8)^{n-1}|}{\sqrt{(3 \cdot 4^n)^2 + (-1)^2}} =$$

$$\frac{27 \cdot 8^{n-1}}{\sqrt{9 \cdot 4^{2n} + 1}} < \frac{27 \cdot 8^{n-1}}{3 \cdot 2^{2n}} = 9 \cdot 2^{n-3},$$

$$\therefore \frac{1}{d_n} > \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3},$$

$$\text{故 } \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + \cdots + \frac{1}{d_n} > \frac{1}{9} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \right] = \frac{8}{9} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

$$(3) |P_{n+1} P_{n+2}| = \sqrt{[(-2)^n - (-2)^{n+1}]^2 + [(-8)^n - (-8)^{n+1}]^2} = 3 \cdot 2^n \sqrt{1 + 9 \cdot 4^{2n}},$$

$$S_n = \frac{1}{2} |P_{n+1} P_{n+2}| \cdot d_n = \frac{1}{2} 3 \cdot 2^n \sqrt{1 + 9 \cdot 4^{2n}} \cdot$$

$$\frac{27 \cdot 8^{n-1}}{\sqrt{9 \cdot 4^{2n} + 1}} = 81 \cdot 2^{4n-4}.$$

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \cdots + \frac{1}{S_n} = \frac{1}{81} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{4n-4} \right] = \frac{1}{81} \cdot \frac{16}{15} \left(1 - \frac{1}{2^{4n}}\right),$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \cdots + \frac{1}{S_n} \right) = \frac{1}{81} \cdot \frac{16}{15} = \frac{16}{1215}.$$

评析 本题考查了导数、数列、不等式、极限、解析几何等知识、方法,知识面宽,综合大,对理解能力、推理能力、综合运用知识解决问题能力要求较高.

(文) (1) 如图, 设 $A(x_1, y_1)$, $\therefore y' = \frac{x}{p}$, $\therefore k_{AC} = \frac{x_1}{p}$,

$$\text{直线 } AC \text{ 的方程为 } y - y_1 = \frac{x_1}{p}(x - x_1),$$

$$\text{设 } x = 0 \text{ 得 } y = -y_1, \therefore C(0, -y_1), \text{ 由定义得 } |AF| = y_1 + \frac{p}{2},$$

$$|CF| = \frac{p}{2} - (-y_1) = y_1 + \frac{p}{2},$$

$$\therefore |AF| = |CF|.$$

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $P(x, y)$, 由 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + p^2 = 0$ 得 $x_1 x_2 + y_1 y_2 + p^2 = 0$, $\therefore x_1 x_2 = -2p^2$,

$$\text{直线 } OB \text{ 的方程为 } y = \frac{y_2}{x_2} x = \frac{x_2}{2p} x, \text{ ①}$$

$$\text{直线 } m \text{ 的方程为 } x = x_1, \text{ ②}$$

由①②得 $y = -p$,

$\therefore P$ 点的轨迹方程为 $y = -p$.

(3) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $T(x_0, y_0)$,

$$\therefore k_{AT} = \frac{x_1}{p}, k_{BT} = \frac{x_2}{p},$$

$$\therefore AB \text{ 是焦点弦, } \therefore \text{设 } AB \text{ 的方程为 } y = kx + \frac{p}{2}, \text{ 代入方程 } x^2 =$$

$$2py \text{ 得 } x^2 - 2pkx - p^2 = 0, \therefore x_1 x_2 = -p^2,$$

$$k_{AT} \cdot k_{BT} = \frac{x_1 x_2}{p^2} = -1, \therefore AT \perp BT,$$

$$\text{由(1)知 } AT \text{ 的方程为 } y = \frac{x_1}{p}x - y_1, \therefore y_0 = \frac{x_1}{p}x_0 - y_1 \text{ 即 } x_0 x_1 -$$

$$py_1 = py_0,$$

$$\text{同理 } x_0 x_2 - py_2 = py_0,$$

$$\therefore AB \text{ 的方程为 } x_0 x - py = py_0, \text{ 又 } AB \text{ 过焦点 } F,$$

$$\text{故 } -\frac{p^2}{2} = py_0 \text{ 即 } y_0 = -\frac{p}{2},$$

$\therefore T$ 在准线 l 上.

评析 本题考查了导数的意义, 抛物线的定义, 抛物线与直线的关系, 向量的坐标运算, 轨迹方程的求法, 及化归转化的思想, 对运算能力有一定的要求.

考纲分析与考向预测 由于 2006 年的最新的考试大纲中对三角函数部分的要求不管是文科还是理科都有明显的提高,而且文科将考试要求中“同角三角函数基本关系式” $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\sin \alpha / \cos \alpha = \tan \alpha$, $\cot \alpha = 1 / \tan \alpha = 1$ “移到了“考试内容”中.在本份试卷当中对考试大纲中的这个明显的变化体现得很好,如试卷中的第 4 题和第 19 题两个题目都是对这个变化的很好地诠释.由于 2005 年有好多的省份是自主命题的第一年,试题多数呈现平移过渡的态势,没有过分的创新.然而 2006 年的全国高考以及各省市的自主命题都将在“新”上下功夫,不会再那么中规中矩了,选择题会在“小、巧、活”上大做文章,估计各地都会有脱俗的试题出现.三角题目会崭露头角,并且会在平淡中出奇,同时在新增内容及各知识点的交汇点处命题的可能性会增大.

相关事宜	难度系数	平均分	最高分	130 分以上 人数百分比	120 ~ 130 分 人数百分比	110 ~ 120 分 人数百分比	100 ~ 110 分 人数百分比
测试学校							
黄冈高级中学	0.59	124	142	13.1%	16.8%	26.7%	14.1%

测试评价与备考策略 本份试卷考查的知识全面详尽,紧扣考试大纲,并且认真地比对了 2006 年考试大纲和 2005 年考试大纲的不同点和相同点,对细微的变化也用试题进行了体现.整份试卷结构严谨,重点突出,层次分明,具有较好的区分度和选拔功能,试卷对各种数学思想和数学方法的考查细致到位.从学生们的答题情况来看,易出错的题目是第 4 题、第 7 题、第 10 题和第 17 题.其中第 4 题是一个与三角函数相关的求值判断问题,此题在求解的过程中多数的考生容易忽略对点 P 的位置的判断而导致错选 A.第 7 题是一道新信息给予题,但是多数的考生不能灵活地把握题目中所给的四个图形的特点,不能分析 O、P 两点连线的距离与点 P 所走过的路程间的关系,导致错选.第 17 题是一道从全新的角度考查线性规划的题目,首先要正确地根据方程的根的所在区间,给出 m、n 所满足的条件,然后进行求解.

1. B 因为 $Q = \{x \in \mathbf{R} | \sqrt{x+1} < \frac{\pi}{2}\}$, 所以 $x < \frac{\pi^2}{4} - 1$, 则 $x \in \mathbf{Z}$ 时可取 $-1, 0, 1$, 故 $P \cap Q = \{-1, 0, 1\}$, 选 B.
评析 本题考查集合的基本交集运算.并考查简单的无理不等式的解法.

2. D 因为 α 是第三象限角, 所以 $2k\pi + \pi < \alpha < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, 所以 $k\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < k\pi + \frac{3\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$, 又因为 $|\cos \alpha| = m$, 所以 $\cos \alpha = -m$, 又因为 $\cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$, 所以 $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1-m}{2}}$, 又因为 $\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} > 0$, 所以 $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$, 所以 $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-m}{2}}$, 选 D.

评析 本题考查三角函数的倍半角公式及分类讨论的数学思想.此题涉及到三角函数中的很多知识,如符号规律,半角公式中的正负号的选取,三角公式中灵活变形等.这类问题,能够考查学生对三角公式的记忆,三角公式的应用技巧等.

3. C (理) 因为 $\frac{2-bi}{1+2i} = \frac{(1-2i)(2-bi)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{(2-2b)-(4+b)i}{5}$, 又因为 $\frac{2-bi}{1+2i}$ 的实部和虚部互为相反数, 所以 $\frac{2b-2}{3} = -\frac{4+b}{5}$, 所以 $b = -\frac{2}{3}$, 选 C.

评析 复数部分,在《考试大纲》中已经没有了三角形式了,从而如果考查复数,则代数运算就是重点了,它包括复数代数形式的加、减、乘、除.而除法的考查,能同时考到复数代数形式部分的各种知识.

(文) B 由 $\frac{1}{x} - 1 > 0$ 可得 $\frac{1-x}{x} > 0$ 即 $x(x-1) < 0$, 解得 $0 < x < 1$. 而由 $0 < x < 1$ 一定能推知 $x > 0$, 但是当 $x > 0$ 时, 不一定有 $0 < x < 1$. 也就是说 $x > 0$ 是 $\frac{1}{x} - 1 > 0$ 的必要而非充分条件.

评析 此题主要考查分式不等式的解法以及充要条件的判断,此题虽然是一个基础题,但是多数考生在求解的过程中容易产生麻痹思想,草率地错选为 A,还应当引起足够的重视.

4. B 首先判断出点 P 所在的象限. 显然 $\cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{5\pi}{12} > 0$, 而易判断 $\cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12} < 0$, $\therefore$ 点 P 是第四象限内的点, 故而 θ 的终边经过第四象限, 据此排除 C 和 D. 再通过斜率来进一步确定角 θ 的大小.

$\therefore \tan \theta = \frac{\cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12}}{\cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{5\pi}{12}} = \frac{1 - \tan \frac{5\pi}{12}}{1 + \tan \frac{5\pi}{12}}$

$$= \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{5\pi}{12}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{5\pi}{12}} = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{12} \right) = \tan \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{5\pi}{6}, \text{选 B.}$$

评析 本题考查三角函数的定义及直线斜率的计算、三角函数式的化简、三角函数值的大小的比较等知识,看起来题目平淡无奇,但是内涵颇丰,从不同的角度考查了多个知识点,真正体现了在知识的交汇点处命题的原则,这也是新高考的一个命题方向.

5. C 根据向量平移的规律,可得解析式为 $y = a^{x-1} + 2$, 选 C.
评析 本题考查函数的图象平移及向量的简单知识.

6. D 4 引擎飞机要成功飞行, 需至少 3 个引擎正常运行, 故其概率为 $P_1 = P^4 + C_4^3 P^3 (1-P)$, 2 引擎飞机要成功飞行, 需 2 个引擎都正常运行, 故其概率为 $P_2 = P^2$, 所以 $P_1 - P_2 = P^4 + C_4^3 P^3 (1-P) - P^2 = [P^4 + 4(1-P)P^3 - P^2]$, 即 $P_1 - P_2 = -P^2(3P^2 - 4P + 1)$, 要使 4 引擎飞机比 2 引擎飞机更安全, 则需 $P_1 - P_2 < 0$, 即 $3P^2 - 4P + 1 > 0$, 解得 $0 < P < \frac{1}{3}$ 或 $P > 1$ (舍去), 选 D.

评析 本题考查相互独立事件的概率中至多至少问题. 由对称性可知, 点 P 走过的图形应当是圆. 如果是前面 A、B、C 中的一个的话, 开始运动的一段时间内的 O、P 连线的距离与点 P 走过的路程间的函数关系都可能是线段, 而对于圆来说, 不管起点从何处开始, 都会是对称的, 因此选 D.

评析 本题考查阅读理解能力和遇到新问题时的应急能力以及分析问题、解决问题的综合能力, 对考生的临场发挥及读图能力有较高的要求.

8. C 根据前两个运算式子可看出下一个是应该为 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdots a_{14} = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \cdots \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \cdots \cdot \log_{14} 15 \cdot \log_{15} 16 = 4$, 由前三个式子可看出 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_k = 2^{008}$ 中的 k 应为 $2^{008} - 2$, 选 C.

评析 本题考查审题能力, 以及对数的运算性质及分析问题、解决问题的能力.

9. B $y' = \frac{a-x^2}{(x^2+a)^2}$, 当 $0 < x < 1$ 时, 函数递增, 即 $\frac{a-x^2}{(x^2+a)^2} > 0$, 故 $x^2 < a$, 解得 $0 < a < 1$, 排除 A、D. 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $y = \frac{x}{x^2+a} > \frac{1}{2}$, 解得 $a < \frac{3}{4}$, 排除 C. 故选 B.

10. A 首先确定以正方体的顶点为顶点的三棱锥的个数: 从 8 个顶点中任取 4 个, 有 C_8^4 种不同的取法, 而这样取出的四个点中有共面的情况, 共有 6 个面, 6 个对角面, 故可以构成三棱锥的个数是 $C_8^4 - 6 - 6 = 58$ 个. 再确定四棱锥的个数: 此时先确定出四棱锥的底面, 仍然是 6 个面和 6 个对角面. 而每一个面与此面同一侧的另外 4 个顶点就可以构成 4 个四棱锥, 有 $6 \times 4 = 24$ 个. 因为每个对角面的两侧各有两个顶点, 所以以每个对角面为底面的四棱锥共有 $6 \times 4 = 24$ 个, 所以四棱锥的个数是 $24 + 24 = 48$ 个, 故而两个数值之差为 10, 选 A.

评析 本题巧妙地将排列组合知识与立体几何联系起来,

打破常规考查的思路与角度,将常见的两个题目合并在一起,新颖独到,焕然一新.

11. C 取 M 点为短轴的端点,则 $\frac{|MI|}{a} = \frac{|IN|}{c}$, 所以 $\frac{|MI|}{|IN|} = \frac{a}{c} =$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \text{选 C.}$$

12. B 评析 本题考查椭圆的简单知识,本题最好用特殊值法. 令 $y = f^{-1}(\log_2 x)$, 求不等式 $|f^{-1}(\log_2 x)| < 1$ 的解集, 即 $-1 < y < 1$, 而点 $A(1, 3)$, $B(-1, 1)$ 在 $y = f(x)$ 上, 且为增函数, 则其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 对应于 $y = f^{-1}(\log_2 x)$, 将 x, y 互换, 则 $y = f^{-1}(\log_2 x)$ 中 $1 < y < 3$, 所以不等式 $|f^{-1}(\log_2 x)| < 1$ 的解集是 $(2, 8)$, 选 B.

评析 本题考查抽象函数的反函数及对应的对数函数及不等式的解法.

13. $\{x | x > \frac{1}{2}\}$ 因为 $|2 - x| < x + 1$, 所以去绝对值得

$$\begin{cases} 2 - x < x + 1 \\ x - 2 < x + 1 \end{cases}, \text{解不等式组得 } x > \frac{1}{2}, \text{答案 } \{x | x > \frac{1}{2}\}.$$

评析 本题目的在于考查求绝对值不等式的方法, 应该化为不等式组来解, 注意这一知识点, 高考中往往将此知识点与综合题相结合.

14. (3) (4) 因为 $f'(x) = 3x^2 - 6x$, 令 $3x^2 - 6x = 0$ 解得 $x = 0$ 或 $x = 2$, 容易判断 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 上分别是单调递增的, $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上是单调递减的, 且 $f(0) = 0$ 是极大值, $f(2) = -4$ 是极小值, 答案: (3) (4).

评析 本题型是高考常考的题型, 应用函数的导数求函数的单调性、极值是最近几年高考中常考的, 应熟练掌握.

15. 底面是菱形且 DC_1 垂直底面 底面 $A_1B_1C_1D_1$ 为菱形, 则 $A_1C_1 \perp B_1D_1$, 又 $DC_1 \perp$ 底面 $A_1B_1C_1D_1$, 所以 $DC_1 \perp$ 面 $ABCD$, $DC_1 \perp A_1C_1$, $EF \subset$ 面 $ABCD$, 所以 $DC_1 \perp EF$, 又 $EF \parallel BD$, 所以 $A_1C_1 \perp EF$, 所以 $EF \perp$ 平面 DA_1C_1 . (或填 $AB = BC, AD = CD, DA \perp$ 底面, 或填底面是正方形, $DA_1 \perp A_1B_1, DA_1 \perp A_1D_1$ 等等).

评析 本题是一种新颖的考查立几的题型, 应注意空间中的垂直及有关的几何体所具有的特征.

16. $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ 圆的圆心为 $(1, 0)$, 则点 $(1, 0)$ 到直线的距离为 $d = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 所以圆的方程为 $(x - 1)^2 + y^2 = 2$, 即 $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$, 答案 $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$.

评析 本题考查了直线与二次曲线相交这类题型的解法, 是二次曲线(圆)中考查的重点, 在复习中应注重方法和题型的掌握和总结, 它是高考必考的内容.

17. (1) 由题意知, $f(x)$ 有一根大于 1, 另一根大于 0 而小于 1,

$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ f(1) < 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} m + n + 1 > 0, \\ 2m + n + 3 < 0. \end{cases}$$

∴ 点 (m, n) 所表示的平面区域如图阴影部分(不含边界), 其中 A 点坐标为 $(-2, 1)$.

(2) 设 $m - n = k$, 则 $n = m - k$, 又直线 $n = m - k$ 的截距 $(-k)$, 在该直线经过 A 点时最小,

$$\therefore -k \geq 3, \therefore k \leq -3$$

即 $m - n$ 的最大值为 -3 .

评析 此题以一元二次函数为载体, 结合二次方程根的分布, 用圆锥曲线中椭圆和双曲线的离心率的取值范围来限定了方程的两根的取值范围, 再通过线性规划来解决所要问的问题. 题目的角度新颖, 用一种全新的方式来考查了线性规划这一新增内容, 具有较强的创新性, 是对 2006 年高考的一个大胆预测.

18. (1) $b_n = \frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{a_{n-1} - 1}} = \frac{a_{n-1} - 1}{a_{n-1} - 1 - 1},$

$$\text{而 } b_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1} - 1},$$

$$\therefore b_n - b_{n-1} = \frac{a_{n-1} - 1}{a_{n-1} - 1} - \frac{1}{a_{n-1} - 1} = 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

$$\therefore \{b_n\} \text{ 是首项为 } b_1 = \frac{1}{a_1 - 1} = -\frac{5}{2}, \text{ 公差为 } 1 \text{ 的等差数列.}$$

(2) 依题意有 $a_n - 1 = \frac{1}{b_n}$, 而 $b_n = -\frac{5}{2} + (n - 1) \cdot 1 = n - 3.5,$

$$\therefore a_n - 1 = \frac{1}{n - 3.5}.$$

对于函数 $y = \frac{1}{x - 3.5}$, 在 $x > 3.5$ 时, $y > 0, y' < 0$, 在 $(3.5, +\infty)$ 上为减函数.

故当 $n = 4$ 时, $a_n = 1 + \frac{1}{n - 3.5}$ 取最大值 3.

而函数 $y = \frac{1}{x - 3.5}$ 在 $x < 3.5$ 时, $y < 0, y' = -\frac{1}{(x - 3.5)^2} < 0$, 在 $(-\infty, 3.5)$ 上也为减函数.

故当 $n = 3$ 时, 取最小值, $a_3 = -1$.

$$(3) \text{ (只理科做)} S_{n+1} = \frac{(n+1) \left(-\frac{5}{2} + \frac{2n-5}{2} \right)}{2} =$$

$$\frac{(n+1)(n-5)}{2}, b_n = n - 3.5, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)b_n}{S_{n+1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-1)(n-3.5)}{(n+1)(n-5)} = 2.$$

评析 极限思想提供了从变量的无限变化中研究其变化趋势的数学方法, 使我们从有限中认识无限、从近似中认识精确, 从量变中认识质变, 因而在解决数学问题时得到了广泛的应用.

19. (1) 由已知 $\tan A$ 是方程 $x^2 - 2x \sec A + 1 = 0$ 的较小根, 得 $\cot A$ 是方程的较大根,

$$\therefore \tan A + \cot A = 2 \sec A, \therefore \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{2}{\cos A},$$

$$\therefore \frac{1}{\sin A \cos A} = \frac{2}{\cos A}, \therefore \sin A = \frac{1}{2},$$

$$\therefore A = 30^\circ \text{ 或 } A = 150^\circ, \text{ 当 } A = 150^\circ \text{ 时,}$$

$$\therefore \tan A > \cot A, \text{ 不合题意舍去;}$$

$$\text{而当 } A = 30^\circ \text{ 时, } \tan A = \frac{\sqrt{3}}{3} < \cot A = \sqrt{3},$$

$$\therefore A = 30^\circ.$$

$$(2) \because \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - 1}{2bc},$$

$$\therefore b^2 + c^2 = \sqrt{3}bc + 1. \text{ 又 } \because b^2 + c^2 \geq 2bc, \therefore \sqrt{3}bc + 1 \geq 2bc,$$

$$\therefore (2 - \sqrt{3})bc \leq 1,$$

$$\therefore bc \leq \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{ 当且仅当 } b = c \text{ 时, } bc \text{ 取最大值, 最大值为 } 2 + \sqrt{3}.$$

评析 本题将三角函数的求值及最值的求解与一元二次方程的根与系数的关系结合起来, 综合考查了三角求值、不等式求最值、余弦定理等知识, 是一个具有较强综合性的试题. 此题在求解的过程中容易忽视题目中给出的 $\tan A$ 为所给方程的较小根这一条件, 而误认为 $\angle A$ 的两个值均满足题意, 而产生增根.

20. (1) $\because$ 在 $\triangle PDA$ 中, $AD = a, PD =$

$$a, PA = \sqrt{2}a,$$

$$\therefore AD^2 + PD^2 = PA^2,$$

$$\text{即 } PD \perp AD.$$

$$\text{同理 } PD \perp CD.$$

$$\text{又 } AD, CD \subset \text{平面 } ABCD, AD \cap CD = D,$$

$$\therefore \text{直线 } PD \perp \text{平面 } ABCD.$$

(2) 如图, 连结 AC 和 BD , 设 $AC \cap BD = O$. 由(1)知 $AC \perp PD$.

$$\text{又 } AC \perp BD, \text{ 且 } PD, BD \subset \text{平面 } PBD, PD \cap BD = D,$$

$$\therefore \text{直线 } AC \perp \text{平面 } PBD.$$

$$\text{过点 } O \text{ 作 } OE \perp PB, E \text{ 为垂足, 连结 } AE.$$

$$\text{由三垂线定理知 } AE \perp PB,$$

$$\therefore \angle AEO \text{ 为二面角 } A - PB - D \text{ 的平面角.}$$

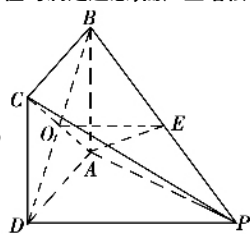
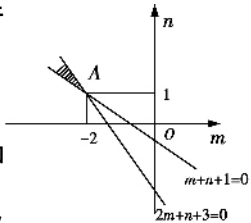
$$\therefore AB \perp AD, \text{ 由三垂线定理知 } AB \perp PA,$$

$$\therefore \text{在 } \triangle PAB \text{ 中, } AE = \frac{PA \cdot AB}{PB} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a},$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, } OA = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

$$\text{在 } \triangle AOE \text{ 中, } \sin AEO = \frac{OA}{AE} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 即 } \angle AEO = 60^\circ,$$

$$\therefore \text{二面角 } A - PB - D \text{ 的大小为 } 60^\circ.$$



评析 在立体几何试题中,一条直线与一个平面垂直的几何模型,是高考的常见题型.这样的问题也可以应用空间向量的知识来解决.

21. (1) 因为 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 为奇函数,所以 $f(-x) = -f(x)$, 即 $f(-x) = a(-x)^3 + bx^2 - cx + d = -f(x) = -ax^3 - bx^2 - cx - d$, 所以 $b = d = 0$. 又因为当 $x = -1$ 时 $f(x)$ 取最小值 -4 , 所以 $f'(-1) = 0, f(-1) = -4$. 所以 $a = -2, c = 6$. 所以 $f(x) = -2x^3 + 6x$.

(2) 当 $f'(x) = -6x^2 + 6 < 0$ 时, 即 $x \in (1, +\infty)$, $f(x)$ 为减函数, 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f(x)$ 为减函数, 当 $f'(x) = -6x^2 + 6 > 0$ 时, $x \in (-1, 1)$, $f(x)$ 为增函数. 所以函数 $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$, 增区间为 $(-1, 1)$.

(3) 假设存在这样的点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $f'(x) = -6x^2 + 6$ 所以 $k_1 = -6(x_1^2 - 1), k_2 = -6(x_2^2 - 1)$. 所以 $36(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) = -1$, 又因为 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 所以 $x_1^2 - 1 \leq 0, x_2^2 - 1 \leq 0$, 所以 $(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) \geq 0$, 此式与 $36(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) = -1$ 矛盾, 所以不存在两点使之满足条件.

评析 本题主要在于考查导数在研究函数的有关问题时的应用, 本题在求函数的单调性时, 不容易解决, 通过导数, 很容易就可解决, 通过这一问题的解决, 可看出导数在解决函数的单调性时, 很是重要.

22. (1) 由已知 $\begin{cases} \frac{a^2}{c} = \frac{25}{4} \\ \frac{b}{a} = \frac{3}{5} \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases}$, 解之得: $\begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \\ c = 4 \end{cases}$.

∴ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, 双曲线的方程 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$.

又 $c' = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$,

∴ 双曲线的离心率 $e_2 = \frac{\sqrt{34}}{5}$.

(2) 由 (1) $A(-5, 0), B(5, 0)$,

设 $M(x_0, y_0)$ 则由 $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MP}$ 得 M 为 BP 的中点, ∴ P 点坐标为 $(2x_0 - 5, 2y_0)$.

将 M, P 坐标代入 C_1, C_2 方程得:

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} = 1, \\ \frac{(2x_0 - 5)^2}{25} - \frac{4y_0^2}{9} = 1. \end{cases}$$

消去 y_0 得 $2x_0^2 - 5x_0 - 25 = 0$,

解之得 $x_0 = -\frac{5}{2}$ 或 $x_0 = 5$ (舍去).

由此可得 $P(-10, 3\sqrt{3})$.

当 P 为 $(-10, 3\sqrt{3})$ 时, $PA \cdot y = \frac{3\sqrt{3}}{-10 + 5}(x + 5)$.

即 $y = -\frac{3\sqrt{3}}{5}(x + 5)$.

代入 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, 得 $2x^2 + 15x + 25 = 0$.

$x = -\frac{5}{2}$ 或 $x = -5$ (舍去).

∴ $x_N = -\frac{5}{2}, \therefore x_N = x_M$,

$MN \perp x$ 轴, 即 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

评析 本题是一道圆锥曲线函数的综合性题目, 它涵盖了圆锥曲线解析式的求法、圆锥曲线的性质: 离心率, 渐近线, 焦点坐标, 长短半轴长度及有关的知识, 与向量的知识结合. 这也是高考压轴题的基本构成, 越是综合性强的题目, 所涉及到的知识越浅显, 由浅显的小题目逐渐渗透成一个复杂的难度较大的综合题. 在解答这类压轴题时, 应当把握好解题的策略, 不求面面俱到, 但求一点提高, 仍然应用“分步得分”的得分策略把步骤分尽可能的多得, 提高总成绩.

2006 年全国百校联盟高考《考试大纲》调研卷(十三)

考纲分析与考向预测 在新教材中, 增加了分段函数的研究, 因此分段函数是一个重点. 例如本试卷中的 8, 10, 12 题; 几何分布列入了高三教材, 例如 15 题; 导数在高三教学中应给予充分的重视, 例如 19 题.

根据大纲可以估测高考的方向, 如向量与三角的结合, 分段函数的解析式及应用, 立体几何中线面垂直关系, 应用题要注重建模, 要与增长率有关, 解析几何与向量的联系仍是考试重点.

相关事宜	难度系数	平均分	最高分	130 分以上 人数百分比	120 ~ 130 分 人数百分比	110 ~ 120 分 人数百分比	100 ~ 110 分 人数百分比
测试学校 北京四中	0.56	112	143	8.9%	12%	14%	23%

测试评价与备考策略 本套试卷难度与 2006 年全国卷相当, 但由上表显示, 试卷的区分度较为理想, 试题的测试效果比较明显, 达到了预期的测试效果. 本次测试反映了考生前一阶段的复习效果较为显著, 基础知识尤其是高考的主干知识掌握较为扎实, 但也暴露了若干问题: ①推理及运算中出错较多; ②应用所学的数学知识分析问题、解决问题的综合能力还有待提高; ③数学思想与方法的灵活运用需要加强. 建议考生应在掌握语言基础知识、基本技能、基本方法的基础上, 通过适当题量的模拟训练, 努力提高综合分析能力, 同时尽可能避免粗心导致的失误. 多想想的少考算是高考的又一特点, 因此在备考中不要急于运算, 要从概念入手, 抓住概念的本质, 结合数与形、方程与曲线、函数与图象等方面进行针对性练习.

1. D $A = \{x | 0 < x < 2\}, B = \{x | 1 < x < 3\}, A - B = \{x | x \in A, \text{且 } x \notin B\} = \{x | 0 < x \leq 1\}$, 故选 D.

评析 本题以差集为背景考查不等式的解集以及集合的有关知识.

2. D $\because S_{10} = 2, S_{20} = 6, \therefore S_{20} - S_{10} = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{18} + a_{19} + a_{20} = 4$,

$a_1 + a_2 + \dots + a_8 + a_9 + a_{10}, a_{11} + a_{12} + \dots + a_{18} + a_{19} + a_{20}$, $a_{21} + a_{22} + \dots + a_{28} + a_{29} + a_{30}, \dots$ 成等比数列, 公比是 2, $\therefore$

$a_{41} + a_{42} + \dots + a_{48} + a_{49} + a_{50} = 32$.

评析 等比数列、等差数列连续的不同项和仍然成等差数列和等比数列. 部分同学容易犯前 10 项和, 前 20 项和, 前 30 项和成等比数列的错误.

3. B $\because A, B, D$ 三点共线, $\therefore \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BD} = \lambda [3e_1 + 8e_2 - (2e_1 + 4e_2)] = e_1 - ke_2, \therefore k = -4$, 选 B.

4. C 利用数形结合易得切线的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{2\pi}{3}$, 所以倾斜角的范围是 $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$.

评析 数形结合是高考的一个亮点, 应引起注意, 本题应注意倾斜角是 $\frac{\pi}{2}$ 也满足条件.

5. C 考查数列的递推性质, 当 $n \times n = k$ 时, 由于 $(n+1) \times n = k -$

2, 所以 $(n+1) \times (n+1) = (k-2) + 3 = k+1$, 于是由 $1 \times 1 = 1$ 得 $2 \ 005 \times 2 \ 005 = 2 \ 005$, 所以 $2 \ 005 \times 2 \ 006 = 2 \ 005 + 3 = 2 \ 008$.

评析 注意构造递推等式和所给条件的相互关系.

6. (理) B 由于函数 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$ ($0 < a < 1$) 是减函数,

所以 $f(f^{-1}(x)) < f(1) = \frac{a^2 - 1}{2a}$.

而 $f(f^{-1}(x)) = x$. 故答案为 B.

评析 反函数与原函数的定义域与值域之间关系是考试的一个热点.

(文) C 函数 $y = 4\sin(2x + \varphi)$ 是 R 上的偶函数的条件是 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$, 又 $0 \leq \varphi \leq \pi$, 所以选 C.

7. C 由于 $\triangle MF_1 F_2$ 为直角三角形, 则 F_1 到直线 MF_2 的距离为 $\frac{MF_1 \cdot F_1 F_2}{MF_2}$,

$$MF_1^2 = \frac{3}{2}, F_1 F_2 = 6, MF_2 = \sqrt{MF_1^2 + F_1 F_2^2} = \sqrt{\frac{75}{2}},$$

$$\frac{MF_1 \cdot F_1 F_2}{MF_2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 6 = \frac{6}{5}.$$

8. C 由于 $25 < 95 < 175$, 所以小王的工资在 2 800 元以内, 总额为 $800 + 500 + 70 \div 10\% = 2\,000$ 元, 起征点提高后他交的全月应纳税所得额在 500 元以内, 故交税为 $400 \times 5\% = 20$. 故选 C.

评析 分段函数是考点, 本题注意 500 元之内的交税 5%, 500—2 000 元部分要上交税 10%, 易出错的是超出的部分都按 10% 上交税.

9. D $y = 3\cos 2x = 3\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = 3\sin[2(x + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{6}]$, 所以

由函数 $y = 3\sin(2x - \frac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 即可得到 $y = 3\cos 2x$ 的图象.

10. B 本题相当于求函数 $f(x) = \begin{cases} 2x + 15 & (x \leq -3) \\ x^2 & (-3 \leq x \leq 2) \\ 6 - x & (x \geq 2) \end{cases}$ 的最大值. 当

$x = -3$ 时, 最大值为 9.

评析 本题仍然是分段函数, 要读懂题, 简单的计算方法是先求交点, 再代入计算比较.

11. C 由定义可知 $x = 0$ 时 $f(x) = 0$, 且满足 $\frac{f(x)}{x} \leq M$, 因此满足条件的是 $2x, x \sin x$ 两个.

评析 用筛选法进行排除是本题的一个最佳选择, 体现了高考命题的指导思想, 多想少算.

12. (理) A 函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x+4)$, 所以函数的图象关于点 $(2, 0)$ 对称, $f(4-x) = -f(x)$. 由于 $x_1 + x_2 < 4$ 且 $(x_1 - 2)(x_2 - 2) < 0$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 所以 $x_1 < 2 < x_2$ 且 $2 < x_2 < 4 - x_1$, 当 $x > 2$ 时, $f(x)$ 单调递增. $f(x_1) + f(x_2) < f(x_1) + f(4 - x_1) = 0$, 答案为 A.

(文) A 由于 $f(x+2) = 3f(x)$, 故当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = x^2 - 2x$ 取最小值时 $x = 1$, 那么 $x \in [-4, -2]$ 时, $x+4 \in [0, 2]$,

所以令 $x+4 = 1$ 时有最小值, 即 $f(-3) = \frac{1}{3}f(-3+2) =$

$$\frac{1}{3}f(-1) = \frac{1}{9}f(1) = -\frac{1}{9}.$$

评析 本题以周期函数的思维方式为背景, 解题的关键是抓住函数值与自变量的变化规律, 但要注意周期函数是函数值周期变化, 而本题是最小值呈周期性变化.

13. $[0, 4]$ 因为 $\frac{2y+6}{x+6} = 2 \cdot \frac{y-(-3)}{x-(-6)}$, 所以 $\frac{2y+6}{x+6}$ 可以看成是点 $P(-6, -3)$ 与区域上的各点连线的斜率的 2 倍.

评析 使用数形结合构造直线的斜率是解本题的关键.

14. 3 由题意 $\cos \theta = -4 \div (1 \times 5) = -0.8$. 所以 $\sin \theta = 0.6$, 因此 $|a \times b| = 1 \times 5 \times 0.6 = 3$.

评析 这是一道以向量作为条件的三角题, 要读懂题的含义.

15. (理) $\frac{1}{3^9}$ 因为 ξ 的分布列为 $P(\xi = k) = \frac{a}{3^k} = \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{3^{k-1}}$, ($k = 1, 2, 3, \dots$), 表示的是一个几何分布, 所以 $a = 2$. 则 $P(\xi \geq 10)$ 表示的是 10 次以后发生的概率, 即前 9 次未发生的概率 $\frac{1}{3^9}$.

评析 本题以几何分布为背景, 可以用等比数列前 n 项和的极限来求, 但是最简单的方法就是理解几何分布的含义.

(文) $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ 依题意 $\frac{x}{x-1}$ 与 x 异号或同为负.

16. $\frac{\pi}{3}$ 延长 CB 交 DA

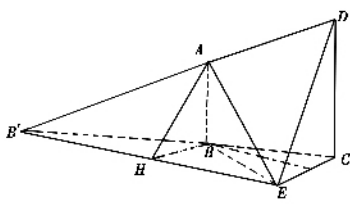
于 B' , 连结 EB' , 设 $BC = a$, $\therefore AB = \frac{1}{2}$

DC , $\therefore BB' = BE = a$, 取 $B'E$ 的中点为 H , 连结 AH, BH , 则 $BH \perp B'E$, 由三垂线

定理知, $AH \perp B'E$, $\therefore \angle AHB$ 为平面 EAD 与平面 EBC 所成锐二面角的平面角.

在 $Rt\triangle AHB$ 中, $AB = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $AH = a$, $\therefore \sin \angle AHB = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle AHB =$

$\frac{\pi}{3}$, $\therefore$ 平面 EAD 与平面 EBC 所成锐二面角为 $\frac{\pi}{3}$.



评析 无交线的二面角的求法是作交线法即先找交线, 再找角或用射影法解决这类问题.

17. (1) $\because |\vec{AC}| = |\vec{BC}|$, $\therefore$ 点 C 在线段 AB 的垂直平分线上, 即在直线 $y = x$ 上, 又 $\because \alpha \in (-\pi, 0)$,

$$\therefore \alpha = -\frac{3\pi}{4}.$$

$$(2) \because \vec{AC} = (\cos \alpha - 2, \sin \alpha), \vec{BC} = (\cos \alpha, \sin \alpha - 2),$$

$$\therefore \vec{AC} \cdot \vec{BC} = (\cos \alpha - 2) \cos \alpha + \sin \alpha (\sin \alpha - 2)$$

$$= \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha = 0,$$

$$\therefore \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\frac{2 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = 2 \sin \alpha \cos \alpha = (\sin \alpha +$$

$$\cos \alpha)^2 - 1 = -\frac{3}{4}.$$

评析 考查向量与三角函数的关系是近年来的一个热点. 抓住向量的几何意义是解决第一问的关键, 第二问是利用向量给出一个三角关系式, 化简求解.

18. $\because$ 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle DAB = 60^\circ$, G 为 AD 中点, $\therefore BG \perp AD$, 又面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$, AD 为交线, $\therefore BG \perp$ 平面 PAD .

(2) 连结 PG , 则 $PG \perp AD$, 又面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$, AD 为交线, $\therefore PG \perp$ 面 $ABCD$, $\therefore BG$ 为 PB 在面 $ABCD$ 内的射影, 又 $BG \perp AD$, $\therefore PB \perp AD$.

(3) $\because PG \perp$ 面 $ABCD$, $BG \perp AD$, 又 $BC \parallel AD$, $\therefore BG \perp BC$, 则 $PB \perp BC$, $\therefore \angle PGB$ 为二面角 $A-BC-P$ 的平面角,

在 $\triangle PAD$ 中, $PG = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $BG = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle PGB$ 中, $\angle PGB = 45^\circ$, 即二面角 $A-BC-P$ 为 45° .

(4) 当 F 为 PC 的中点时, 满足平面 $DEF \perp$ 平面 $ABCD$, 证明如下:

取 PC 的中点 F , 连 DE, EF, DF , 则 $EF \parallel PB$, 又在菱形 $ABCD$ 中 $DE \parallel BG$,

又 $PB \subset$ 面 PBG , $BG \subset$ 面 PBG , 且 $EF, DE \not\subset$ 面 PBG ,

$\therefore EF \parallel$ 面 $PBG, DE \parallel$ 面 PBG 且 $EF \cap DE = E$,

$\therefore$ 面 $EFD \parallel$ 面 PBG ,

又 $PG \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PG \subset$ 面 PBG ,

$\therefore$ 面 $PBG \perp$ 面 $ABCD$,

$\therefore$ 面 $EFD \perp$ 面 $ABCD$.

评析 本题考查空间想象力, 在立体几何中线面垂直是高考的必考知识点, 它是连接三个角、两个距离的纽带, 也是进一步利用三垂线定理的一个重要的条件.

19. $\because g(x) + g(2-x) = x^3 - ax^2 + bx + c + [(2-x)^3 - a(2-x)^2 + b(2-x) + c] = 4$,

$\therefore (6-2a)x^2 + (4a-12)x + (2b+2c+4-4a) = 0$, 对任意 x 均成立.

$$\therefore a = 3, b + c = 4,$$

$$\text{又} \because \frac{g(m) - g(n)}{m - n} > 0, \therefore g'(x) > 0, \text{即} g'(x) = 3x^2 - 2ax + b >$$

0 对 $x \in (0, 3)$ 恒成立.

即 $b > 6x - 3x^2$ 对 $x \in (0, 3)$ 恒成立.

$\therefore b$ 不小于 $6x - 3x^2$ 的最大值, 由于 $6x - 3x^2$ 的最大值是 3.

所以 b 的取值范围是 $[3, +\infty)$.

评析 本题以导数的定义为背景, 构建了一个导数牵动, 函数性质为主, 最值为研究对象的一体化的数模构建题型. 这是最近几年的题型特点, 要引起注意.

20. (理) 依题意可知, A, B, C, D 四个容器的容积分别为 x^3, x^2y, xy^2, y^3 , 按照游戏规则, 甲先取 A , 则只有三种不同的取法:

①取 A, B ②取 A, C ③取 A, D . 问题的实质是比较两个容积和的大小.

①若先取 A, B , 则后者只能取 C, D .

$$\therefore (x^3 + x^2y) - (xy^2 + y^3) = x^2(x+y) - y^2(x+y) = (x-y)(x+y)^2,$$

显然 $(x+y)^2 > 0$, $\therefore$ 当 $x > y$ 时, $(x-y)(x+y)^2 > 0$, 这时甲才胜.

②若先取 A, C , 则后者只能取 B, D .

$$\therefore (x^3 + xy^2) - (x^2y + y^3) = x(x^2 + y^2) - y(x^2 + y^2) = (x-y)(x^2 + y^2),$$

$\therefore$ 当 $x > y$ 时, $(x-y)(x+y)^2 > 0$, 这时甲才胜.

③若先取 A, D , 则后者只能取 B, C .

$$\therefore (x^3 + y^3) - (x^2y + xy^2) = (x+y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x+y)$$

$= (x+y)(x^2-2xy+y^2) = (x+y)(x-y)^2$,
又 $x \neq y, x > 0, y > 0, \therefore (x+y)(x-y)^2 > 0$, 即 $x^3 + y^3 > x^2y + xy^2$.

故先取 A、D 时甲必胜.

甲先取 A 再取 B 或 C 的事件发生的概率为 $\frac{C_2^1}{C_4^2} = \frac{1}{3}$, 且 $x > y$ 的概率为 $1 - 0.6 = 0.4$,

此时甲胜的概率为 $\frac{1}{3} \times 0.4 = \frac{2}{15}$.

同样, 若甲先取 A 再取 D 的事件发生的概率为 $\frac{1}{6}$, 此时甲取胜的概率为 $\frac{1}{6}$,

所以, 甲取胜的概率为 $P = \frac{1}{6} + \frac{2}{15} = \frac{3}{10}$.

评析 本题是一个构造不等式的证明题, 是典型的用比较法证明不等式, 同时又和概率相联系. 注意取到 D 时甲必然胜. 取到 B 或 C 时可能胜.

(文) 依题意, 公寓 2004 年底建成, 2005 年开始使用.

(1) 设公寓投入使用后 n 年可偿还全部贷款, 则公寓每年收费总额为 $1\,000 \times 800$ (元) = 800 000 (元) = 80 万元, 扣除 18 万元, 可偿还贷款 62 万元.

依题意有 $62[1 + (1+5\%) + (1+5\%)^2 + \cdots + (1+5\%)^{n-1}] \geq 500(1+5\%)^{n+1}$.

化简得 $62(1.05^n - 1) \geq 25 \times 1.05^{n+1}$. $\therefore 1.05^n \geq 1.7343$.

两边取对数整理得 $n \geq \frac{\lg 1.7343}{\lg 1.05} = \frac{0.2391}{0.0212} \approx 11.28$.

$\therefore$ 取 $n = 12$ (年).

$\therefore$ 到 2016 年底可全部还清贷款.

(2) 设每生每年的最低收费标准为 x 元, 因到 2012 年底公寓共使用了 8 年,

依题意有 $(\frac{1\,000x}{10\,000} - 18)[1 + (1+5\%) + (1+5\%)^2 + \cdots + (1+5\%)^7] \geq 500(1+5\%)^9$.

化简得 $(0.1x - 18) \frac{10 \cdot 5^8 - 1}{1.05 - 1} \geq 500 \times 1.05^9$.

$\therefore x \geq 10(18 + \frac{25 \times 1.05^9}{1.05^8 - 1}) = 10(18 + \frac{25 \times 1.05 \times 1.4774}{1.4774 - 1}) \approx 10 \times (18 + 81.2) = 992$ (元).

故每生每年的最低收费标准为 992 元.

评析 建模解决增长率问题是近年的热点. 关键要读懂题意, 建立一个数学模型然后用数列、函数等知识解决. 要注意其实际意义.

21. (1) 由题知不等式表示的平面区域中的整点分别为 $(0,0), (0,1), \cdots, (0,4n), (1,0), \cdots, (1,3n), (2,0), \cdots, (2,2n), (3,0), \cdots, (3,n), (4,0)$.

所以 $a_n = (4n+1) + (3n+1) + (2n+1) + (n+1) + 1 = 10n+5$.

(2) 假设存在正实数 k , 使 $(1 + \frac{1}{a_1})(1 + \frac{1}{a_2}) \cdots (1 + \frac{1}{a_n}) \leq k \sqrt{10n+15}$ 对 $n \in \mathbb{N}^*$ 均成立.

则 $k \geq \frac{1}{\sqrt{10n+15}}(1 + \frac{1}{a_1})(1 + \frac{1}{a_2}) \cdots (1 + \frac{1}{a_n})$.

记 $F(n) = \frac{1}{\sqrt{10n+15}}(1 + \frac{1}{a_1})(1 + \frac{1}{a_2}) \cdots (1 + \frac{1}{a_n})$.

那么使 $(1 + \frac{1}{a_1})(1 + \frac{1}{a_2}) \cdots (1 + \frac{1}{a_n}) \leq k \sqrt{10n+15}$ 对 $n \in \mathbb{N}^*$ 均成立的 k , 就是使 k 不小于 $F(n)$ 的最大值,

由于 $\frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{10n+16}{\sqrt{(10n+15)(10n+25)}} =$

$\frac{10n+16}{\sqrt{100n^2+400n+375}} < 1$,

$\therefore F(n+1) < F(n)$, $\therefore F(n)$ 随 n 增大而减小, $F(n)$ 的最大值为 $F(1) = \frac{16}{75}$.

$\therefore k \geq \frac{16}{75}$, 即 k 的最小值为 $\frac{16}{75}$.

评析 本题以线性规划为背景给出数列的通项公式, 判断函数的增减性最后求最大值, 这样的题要学会使用比较两项大小的方法来确定数列的增减.

22. (理) (1) 设点 P 的坐标为 (x, y) , 记 $|F_1P| = r_1, |F_2P| = r_2$, 则 $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.
由 $r_1 + r_2 = 2a, r_1^2 - r_2^2 = 4cx$,
得 $|F_1P| = r_1 = a + \frac{c}{a}x$.

(2) 设点 T 的坐标为 (x, y) .

当 $|PT| = 0$ 时, 点 $(a, 0)$ 和点 $(-a, 0)$ 在轨迹 C 上.

当 $|PT| \neq 0$ 且 $|TF_2| \neq 0$ 时, 由 $|PT| \cdot |TF_2| = 0$, 得 $|PT| \perp |TF_2|$.

又 $|PQ| = |PF_2|$, 所以 T 为线段 F_2Q 的中点.

在 $\triangle QF_1F_2$ 中, $|\overrightarrow{OT}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{F_1Q}|$

$= a$, 所以有 $x^2 + y^2 = a^2$.

综上所述, 点 T 的轨迹 C 的方程是 $x^2 + y^2 = a^2$.

(3) C 上存在点 $M(x_0, y_0)$ 使 $S = b^2$ 的充要条件是

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = a^2, & ① \\ \frac{1}{2} \cdot 2c|y_0| = b^2. & ② \end{cases}$$

由①得 $|y_0| \leq a$, 由②得 $|y_0| = \frac{b^2}{c}$. 所以, 当 $a \geq \frac{b^2}{c}$ 时, 存在点 M , 使 $S = b^2$;

当 $a < \frac{b^2}{c}$ 时, 不存在满足条件的点 M .

当 $a \geq \frac{b^2}{c}$ 时, $\overrightarrow{MF_1} = (-c - x_0, -y_0), \overrightarrow{MF_2} = (c - x_0, -y_0)$,

由 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = x_0^2 - c^2 + y_0^2 = a^2 - c^2 = b^2$,

$\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = |\overrightarrow{MF_1}| \cdot |\overrightarrow{MF_2}| \cos F_1MF_2$,

$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{MF_1}| \cdot |\overrightarrow{MF_2}| \sin F_1MF_2 = b^2$, 得 $\tan F_1MF_2 = 2$.

评析 用向量将中点、垂直、平行综合在一起是近几年高考的又一个考点, 本题 $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PF_2}|$ 是线段垂直平分线的又一个说法, 由 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = |\overrightarrow{MF_1}| \cdot |\overrightarrow{MF_2}| \cos F_1MF_2$, 体现了数与形的结合, 同时要学会利用方程变形求解.

(文) (1) 由题意有 $\begin{cases} \frac{x+2}{x-2} > 0 \\ x-2 > 0 \\ p-x > 0 \end{cases} \Rightarrow 2 < x < p$,

$\therefore$ 使 $f(x), g(x)$ 同时有意义的 x 的取值范围是 $(2, p)$.

(2) $F(x) = \log_2 \frac{x+2}{x-2} + \log_2 (x-2) + \log_2 (p-x) = \log_2 [(x+2)(p-x)]$ $x \in (2, p)$,

令 $y = \log_2 t, t = (x+2)(p-x) = -x^2 + (p-2)x + 2p = -(x - \frac{p-2}{2})^2 + \frac{(p+2)^2}{4}$,

若 $\frac{p-2}{2} \leq 2$ 即 $2 < p \leq 6$ 时, t 在 $(2, p)$ 上单调递减.

因为 $F(x)$ 的定义域是开区间, 故 $f(x)$ 此时无最大值也无最小值.

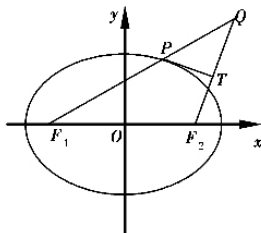
若 $\frac{p-2}{2} \geq p$ 即 $p \leq -2$, 此种情况不合题意, 舍去.

若 $2 < \frac{p-2}{2} < p$, 即 $p > 6$, 则 $0 < t \leq \frac{(p+2)^2}{4}$,

$\therefore y \leq \log_2 \frac{(p+2)^2}{4} = 2\log_2 (p+2) - 2$.

综上知, 当 $2 < p \leq 6$ 时, $F(x)$ 无最大值也无最小值; 当 $p > 6$ 时, $F(x)$ 的最大值为 $2\log_2 (p+2) - 2$, 没有最小值.

评析 文科题中定义域问题, 求反函数, 求简单的最值是高考的主要考点, 定义域使 $f(x), g(x)$ 同时有意义, 值域问题以二次函数的对称轴与区间的关系为考点, 又结合对数函数的性质, 是一道较难的综合题.



考纲分析与考向预测 06 年高考数学考试大纲与 05 年相比考试内容与考试要求基本保持连续性,只对个别考点作调整,要求变化不大,只是表述更准确.

在“理解圆的参数方程”之前增加“了解参数方程的概念”,只是加强前后的必然逻辑联系,应该没对“参数方程的概念”有拔高的要求.文科新考纲对三角公式灵活运用的提出更高要求,新考纲对“三角函数图象”要求从“了解”提升“理解”,应适度注意.在备战 06 年高考中,应熟练地运用“五点作图法”“函数图象变换法”等画出三角函数图象,解决三角函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性、对称性、最大值、最小值(极值)等问题,同时注意三角恒等式化简.

相关事宜	难度系数	平均分	最高分	140 分以上 人数百分比	130 ~ 140 分 人数百分比	120 ~ 130 分 人数百分比	110 ~ 120 分 人数百分比	100 ~ 110 分 人数百分比
测试学校								
北大附中	0.53	109	148	3.2%	6.1%	9.2%	11.3%	16.2%

测试评价与备考策略 本套试卷与 2005 年全国高考试卷难度相当,不刻意追求知识的覆盖面,突出重点知识重点考查,题型新颖,解法较为灵活,探索性较强.

从测试的情况来看,考生知识间的联系能力比较差,尤其是面对一些新颖背景的题不知如何下手,存在畏惧心理,不主动审题,存在主动放弃现象.针对考生所犯错误及考纲的新要求,建议考生复习过程中注意知识的系统化,加强数学思想与方法的归纳与总结,适度做些综合训练.

1. D 对于 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 有 $|A|$ 为振幅, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 为周期, $\omega x + \varphi$ 为相位.

评析 本题属于基础题,在高一教材中有相关知识的描述.熟悉教材是夯实基础的必要环节.

2. (理) B (文) C 本题属于基础题,主要考查“对于 $\xi \sim B(n, p)$ 得 $E\xi = np$ ”“ $E(a\xi + b) = aE\xi + b$ ”“ $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$ ”等常用结论.

评析 在备战 06 年高考中,识记一些常见公式、定理、结论,可以提高解题的速度与准确度.

3. B 由 $a \perp b$ 知 $a \cdot b = 1 \times (-2) + 2a + 3 \times 2 = 0$ 得 $a = -2$,

$$\therefore |b| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}.$$

评析 在平时练习时多以平面向量为模型,本题考查迁移能力.

4. C 由三垂线定理及其逆定理可知,直线 $OP \perp$ 直线 $a \Leftrightarrow$ 直线 $AP \perp$ 直线 a ,再由“互为逆否命题的真假性一致”可得答案.

评析 本题逆向考查三垂线定理,“反弹琵琶式”提问是高考命题的常见手段.

5. B $\because a_2, a_{48}$ 是方程 $2x^2 - 7x + 6 = 0$ 的两个根, $\therefore a_2 \cdot a_{48} = a_1 \cdot a_{49} = a_{25}^2 = 3$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是正项等比数列,则 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_{25} \cdot a_{48} \cdot a_{49} = 9\sqrt{3}$.

6. (理) C 含 x^3 的项为 $2 \cdot C_6^3 (-x)^3 + (-x) \cdot C_6^2 (-x)^2 = -55x^3$.

(文) D 含 x^3 的项为 $C_6^3 (-2x)^3 = -160x^3$.

评析 本题是常规题,属于基础题,只需识记二项式展开式通项的基本公式即可.

7. C 由题意易得 $x + y + 1 = 0$ 或 $x^2 + y^2 - 4 = 0$,易忽略定义域 $x + y + 1 \geq 0$ 而错选 A.

评析 不少同学审题能力比较差,同时缺少“定义域优先意识”而导致错选.

8. (理) A 一个水分子(H_2O)由 2 个氢原子和 1 个氧原子组成.
①若 2 个氢原子相同,则有 $C_3^1 C_3^1$ 种不同的水分子;②若 2 个氢原子不同,则有 $C_3^2 C_3^1$ 种不同的水分子.故共有 $C_3^1 C_3^1 + C_3^2 C_3^1 = 18$ 种不同的水分子.

(文) A $\frac{40}{50\,000} = \frac{1}{1\,250}$.

9. A 由题有 $b = 1, a = 2, c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$,椭圆的中心到其准线的距离 $d = \frac{a^2}{c} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

评析 易混淆短半轴与短轴、长半轴与长轴的概念,本题中的 $b = 1$,而不是 $b = 2$.

10. A 由已知得 $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \\ |\overrightarrow{AB}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2 = 4 \end{cases}$,
 $\therefore |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 8$,

$$\triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \sin A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 \cdot |\overrightarrow{AC}|^2 \cos^2 A} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - 4}$$

$$\leq \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2}{2}\right)^2 - 4} = \sqrt{3} \text{ (当且仅当 } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 2 \text{ 时,取得等号).}$$

评析 本题有一定难度,结合向量的三角形问题是近年高考的热点问题.

11. C 根据原函数 $y = f(x)$ 与导函数 $y = f'(x)$ 的图象间的关系,并列表得:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, +\infty)$
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

由上表不难得出答案.

评析 本题具有较强的迷惑性,易出现审题失误、原函数与导函数单调区间混淆等错误,可以很好区分层次有利于选拔.

12. A 由幻方的定义可知:十阶幻方是将 $1, 2, 3, \dots, 100$ 填入 10×10 的表格中,每行相等.

$$\text{故 } N_{10} = \frac{100(1+100)}{2 \times 10} = 505.$$

评析 本题以有数千年历史的“幻方”为背景,具有深厚的文化底蕴.本题看似复杂,关键在于抓住有效信息.

13. (理) 1 由 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ 得 $\begin{vmatrix} 1+i & i \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times (1+i) - 2 \times i = 3+i$,即 $\begin{vmatrix} 1+i & i \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ 的虚部为 1.

(文) 5 原式 $= 5lg 2 + 5lg 5 = 5lg 10 = 5$.

评析 本题以二阶行列式为背景,考查复数的相关运算和概念,特别注意复数 $a + bi$ 的虚部为 b ,而不是 bi ,易出错.

14. 25 $y = \frac{4}{x} + \frac{9}{1-x} = \left(\frac{4}{x} + \frac{9}{1-x}\right)[x + (1-x)] = 13 + \frac{4(1-x)}{x} + \frac{9x}{1-x} \geq 13 + 2\sqrt{\frac{4(1-x)}{x} \times \frac{9x}{1-x}} = 25$.

评析 “常数 1 的活用”是中学数学的常用技巧,在三角函数式求值中运用更广泛.

15. 0 由已知 $g(x) = f(x+1) - x$ 得 $g(x) = \ln(x+1) - x$ ($x > -1$),

$$\therefore g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1, \text{ 令 } g'(x) = 0, \text{ 得 } x = 0,$$

当 $-1 < x < 0$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x > 0$ 时, $g'(x) < 0$. 又 $g(0) = 0$,
 $\therefore$ 当且仅当 $x = 0$ 时, $g(x)$ 取得最大值 0.

16. 2 本题可以转化为:在线性约

束条件下 $\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ y-1 \leq 0 \\ x+2y-2 \geq 0 \end{cases}$, 求

线性目标函数 $z = x - y$ 的最大值.

而线性约束条件

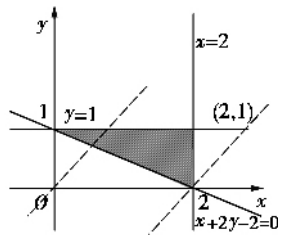
$$\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ y-1 \leq 0 \\ x+2y-2 \geq 0 \end{cases} \text{ 表示的可行}$$

域如右图,不难看出线性目标函数 $z = x - y$ 的最大值为

2.

评析 本题以集合语言为载体,考查线性规划问题.本题能有效考查考生的数学语言转化能力,训练思维的灵活性.

17. (1) $\because f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx - 4, \therefore f'(x) = 3ax^2 + 4x + b$,
 $\therefore$ 函数 $f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx - 4$ 在 $x = -1$ 时有极大值 -4 ,
 $\therefore f'(-1) = 3a \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + b = 0$
 $\therefore f(-1) = a \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) - 4 = -4$
即 $\begin{cases} 3a + b = 4 \\ a + b = 2 \end{cases}$,



$\therefore a=1, b=1$, 故 $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$,
此时 $f'(x) = 3ax^2 + 4x + b = 3x^2 + 4x + 1$, 另 $f'(x) = 0$ 得 $x = -1$
或 $x = -\frac{1}{3}$.

当 x 变化时, $f'(x)$ 、 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	增函数	极大值	减函数	极小值	增函数

故函数 $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$ 的增区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(-\frac{1}{3}, +\infty)$, 减区间为 $(-1, -\frac{1}{3})$.

(2) (理) $\therefore f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$. $\therefore$ 不等式 $f'(x) > -mx - m$ 即为 $3x^2 + 4x + 1 > -mx - m$ 整理得 $(x+1) \cdot [3x + (m+1)] > 0$,

(1) 当 $\frac{m+1}{3} > 1$, 即 $m > 2$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x < -\frac{m+1}{3} \text{ 或 } x > -1\}$;

(2) 当 $\frac{m+1}{3} = 1$, 即 $m = 2$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x > -1 \text{ 或 } x < -1\}$;

(3) 当 $\frac{m+1}{3} < 1$, 即 $m < 2$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > -\frac{m+1}{3}\}$.

(文) $\therefore f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$, $\therefore f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$,
 $\therefore$ 不等式 $f'(x) > x + 1$ 即为不等式 $3x^2 + 4x + 1 > x + 1$,
 $\therefore x > 0$ 或 $x < -1$,
故不等式 $f'(x) > x + 1$ 的解集为 $\{x | x > 0 \text{ 或 } x < -1\}$.

18. (1) $\therefore a = (2\sin x, \cos x)$, $b = (\sin x, 2\sin x)$,
 $\therefore f(x) = a \cdot b = 2\sin^2 x + \sin 2x + 2a = 1 - \cos 2x + \sin 2x + 2a$
 $= \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) + 1 + 2a$,

$\therefore f(x)$ 的最小正周期是 π ,

$\therefore f(x) = a \cdot b$ 的最大值为 $\sqrt{2}$,

$\therefore 1 + 2a = 0$, 即 $a = -\frac{1}{2}$.

(2) 结合“五点作图法”列表得:

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$2x - \frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
$f(x)$	-1	0	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-1

$\therefore y = \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4})$ 的图象如下图所示:

评析 向量与三角函数结合是高考的热点内容之一, 本题将空间向量与三角函数结合, 同时考查“五点作图法”绘制三角函数的图象, 在 06 年考试大纲中明确要求“五点作图法”, 画正弦函数、余弦函数和函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的简图, 在备战 06 年高考时应引起注意.

19. (理) 转化为文科题目, 下同.

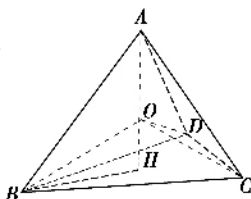
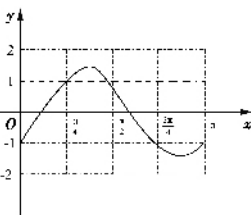
(文) 设正四面体 $A-BCD$ 的棱长为 a , 延长 AO 交面 BCD 于 H , 由正四面体的概念可知, H 为 $\triangle ABC$

的中心, 且 $BH = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

由等体积法得 $V_{A-BCD} = \frac{1}{3} \cdot$

$S_{BCD} \cdot AH = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot OH$, B

$\therefore OH = \frac{1}{4}AH = \frac{\sqrt{6}}{12}a$, $OA = \frac{3}{4}AH$



$$= \frac{\sqrt{6}}{4}a,$$

在 $\triangle AOB$ 中, $OA = OB = \frac{\sqrt{6}}{4}a$, $AB = a$, 则

$$\cos AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{(\frac{\sqrt{6}}{4}a)^2 + (\frac{\sqrt{6}}{4}a)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}a \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}a} = -\frac{1}{3}.$$

(2) 由正四面体 $A-BCD$ 可知直线 OA 与面 ABD 所成角与 OB 与面 BCD 所成角相等, 由 (1) 小问可知 OB 与面 BCD 所成角为 $\angle OBH$, $OB = \frac{\sqrt{6}}{4}a$, 且 H 是正 $\triangle BCD$ 的中心.

在 $Rt\triangle BOH$ 中有 $OB = \frac{\sqrt{6}}{4}a$, $BH = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, $\angle OHB = 90^\circ$,

$$\therefore \cos OBH = \frac{BH}{OB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{\frac{\sqrt{6}}{4}a} = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

评析 以甲烷的分子结构为背景, 题目新颖. 本题涉及的等体积法、变换法在高考中频频出现.

20. (1) $\therefore f(x) = (x - \frac{1}{20}\xi)^2 + 1 - \frac{1}{400}\xi^2$,

$\therefore$ 要使函数 $f(x) = (x - \frac{1}{20}\xi)^2 + 1 - \frac{1}{400}\xi^2$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 当且仅当 $\frac{1}{20}\xi \leq 1$ 即 $\xi \leq 20$,

故 $P(A) = P(\xi \leq 20) = 0.1 + 0.15 + 0.25 + 0.25 = 0.75$.

(2) 每天超过 15 人排队结算的概率为 $0.25 + 0.2 + 0.05 = \frac{1}{2}$.

一周 7 天中, 没有出现超过 15 人排队结算的概率为 $C_7^0 (\frac{1}{2})^7$;

一周 7 天中, 有一天出现超过 15 人排队结算的概率为 $C_7^1 (\frac{1}{2}) (\frac{1}{2})^6$;

一周 7 天中, 有二天出现超过 15 人排队结算的概率为 $C_7^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^5$.

$\therefore$ 有 3 天或 3 天以上出现超过 15 人排队结算的概率为 $1 - C_7^0 (\frac{1}{2})^7 - C_7^1 (\frac{1}{2}) (\frac{1}{2})^6 - C_7^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^5 = \frac{99}{128} > 0.75$, 故该商场需要增加结算窗口.

评析 以常见的生活现象为背景考查概率问题, 富有时代气息, 概率问题综合化是高考对概率考查的新趋势, 在 06 年高考命题中极有可能再度出现.

21. (1) 由题意有 $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 1$,

$\therefore a_n^2 = 1 + (n-1) \times 1 = n$, 即 $a_n = \sqrt{n}$.

(2) $\therefore f(n) = \frac{1}{n+a_1^2} + \frac{1}{n+a_2^2} + \cdots + \frac{1}{n+a_n^2}$,

$\therefore f(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$,

$f(n+1) = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$,

$\therefore f(n+1) - f(n) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$

$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$,

$\therefore f(n+1) > f(n)$, 即函数 $y = f(n)$ 是递增数列,

$\therefore y = f(n)$ 的最小值为 $f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

(3) $\therefore b_n = \frac{1}{a_{n+1} + a_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

$\therefore S_n = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1$,

$\therefore |S_n - 2| \geq 4$ 即为 $|\sqrt{n+1} - 2 - 1| \geq 4$, 解之得 $n \geq 48$ 且 $n \in \mathbb{N}$.

评析 本题以第七届国际数学教育大会的会徽为背景, 综合考查数列、不等式等内容, 要求同学具备一定的分析问题、解决问题的能力, 体现人文精神与理性精神的有机结合.

22. (1) 当 $k = -1$, $k = 0$ 或 $k = \frac{3}{2}$ 时, 曲线 C 表示直线.

当 $k \neq -1$ 且 $k \neq 0$ 且 $k \neq \frac{3}{2}$ 时, 曲线 C 可化为 $\frac{x^2}{\frac{k+1}{2k}} + \frac{y^2}{\frac{k+1}{2k-3}} = 1$

1. ①

方程①表示双曲线的充要条件是 $\frac{k+1}{2k} \cdot \frac{k+1}{2k-3} < 0$, 解之得 $0 < k < \frac{3}{2}$.

(2) $\therefore$ 曲线 C 是焦点在 x 轴上的双曲线且离心率为 $\sqrt{3}$,

$\therefore a^2 = \frac{k+1}{2k}, b^2 = -\frac{k+1}{2k-3}$, 从而有 $e^2 = \frac{\frac{k+1}{2k}}{-\frac{k+1}{2k-3}} = 3$,

$\therefore k = 1$,

故曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{1}{2}y^2 = 1$.

(3) 假设存在直线 l , 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则有

$$\begin{cases} x_1^2 - \frac{1}{2}y_1^2 = 1 \\ x_2^2 - \frac{1}{2}y_2^2 = 1 \end{cases} \quad \text{即} \quad x_1^2 - x_2^2 - \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2) = 0,$$

2006 年全国百校联盟高考《考试大纲》调研卷(十五)

考纲分析与考向预测 本套试卷特别注意了新的考试大纲变化要求, 对三角函数的图象问题、直线与圆的方程与圆锥曲线的参数方程以及理科极限的连续性概念等在命题时作了大胆取舍.

相关事宜	难度系数	平均分	最高分	130 分以上 人数百分比	120 ~ 130 分 人数百分比	110 ~ 120 分 人数百分比	100 ~ 110 分 人数百分比
测试学校							
郑州一中	0.57	114	145	9.8%	8.8%	10.3%	14.8%

测试评价与备考策略 本套试卷覆盖了高中数学的主体知识, 像函数、数列、三角函数、平面向量、解析几何、立体几何、概率、导数等重点内容都得到了重点考查, 并且针对考试大纲新的变化要求, 命题形式力求新颖, 问法也标新立异, 注重思维技巧, 解法灵活多变, 创新意识较强, 难度系数为 0.547.

从测试的结果看, 主要存在以下的问题:

①对于小题不能巧解, 而是“小题大做”如第 7 题可用特殊值方法快速解决, 若通过引参建立目标关系求解则非常麻烦, 影响解题速度. 对于较为新颖, 综合性较强或有一定难度的试题, 如第 6、10、12、13、15、18 题等, 存在畏惧心理, 或主动放弃, 或随便应付, 草率了事. 做试题缺乏转化意识, 加之基础不扎实, 运算能力不过关, 对常用的思想方法和解题方法掌握不好, 如第 18 题不能很好地利用几何关系将问题成功转化为递推型数列关系而只能望题兴叹.

$$\begin{aligned} 1. B \quad \tan 7.5^\circ - \cot 7.5^\circ &= \frac{\sin 7.5^\circ}{\cos 7.5^\circ} - \frac{\cos 7.5^\circ}{\sin 7.5^\circ} \\ &= \frac{\sin^2 7.5^\circ - \cos^2 7.5^\circ}{\sin 7.5^\circ \cos 7.5^\circ} = -\frac{2\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = -\frac{2\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\sin^2 15^\circ} = - \\ &\quad \frac{2\sin 30^\circ}{1 - \cos 30^\circ} = -4 - 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

评析 灵活运用三角公式化非特殊角为特殊角是求解本题的关键. 其中半角及倍角公式又是历年高考考查的重点.

2. C 设等比数列 $\{b_n\}$ 的首项为 a_1 ($a_1 > 0$), 公比为 q . $a_1 < a_3 \Leftrightarrow a_1 < a_1 q^2 \Leftrightarrow q^2 > 1$; $a_7 < a_9 \Leftrightarrow a_1 q^6 < a_1 q^8 \Leftrightarrow q^6 < q^8 \Leftrightarrow q^2 > 1$. 同理 $a_1 < 0$ 时也成立.

评析 本题将等比数列与充要关系结合, 重点考查等价转化思想的运用.

3. (理) D 令 $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{6-x}$, $3 \leq x \leq 6$, 则 $y^2 = (x-3) + (6-x) + 2\sqrt{(x-3)(6-x)} \leq 2[(x-3) + (6-x)] = 6$, $\therefore 0 < y \leq \sqrt{6}$, $\therefore$ 实数 k 的最大值为 $\sqrt{6}$.

评析 本题考查利用均值不等式求解函数最值问题. 在注重“一正二定三相等”的原则下如何构建适当的形式是求解的关键.

(文) A 原不等式变为 $2\sin x + \cos 2x < \sqrt{5a-4} - a + 5$. 要使上式恒成立, 只需 $\sqrt{5a-4} - a + 5$ 大于 $4\sin x + \cos 2x$ 的最大值, 故上述问题转化成求 $f(x) = 4\sin x + \cos 2x$ 的最值问题.

$f(x) = 4\sin x + \cos 2x = -2\sin^2 x + 4\sin x + 1 = -2(\sin x - 1)^2 + 3 \leq 3$, $\therefore \sqrt{5a-4} - a + 5 > 3$ 即 $\sqrt{5a-4} > a - 2$, 上式等价于

$$\begin{cases} a-2 \geq 0 \\ 5a-4 \geq 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a-2 < 0 \\ 5a-4 \geq (a-2)^2 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \frac{4}{5} \leq a < 8.$$

评析 实施参数分离是解决恒成立问题最基本的方法. 只要成功分离参数之后, 问题即可转化为求最值问题. 如“ $a \geq f(x)$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 都成立 $\Leftrightarrow a \geq f(x)_{\max}$ ”“ $a \leq f(x)$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 都成立 $\Leftrightarrow a \leq f(x)_{\min}$ ”.

$\therefore 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2)$,
 $\therefore B$ 是线段 MN 的中点, $\therefore x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = 2$,

$\therefore$ 直线 l 的斜率 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 2$, 即直线 $l: y = 2x - 1$,

又直线 l 与双曲线交于 MN 两点, 由 $\begin{cases} x^2 - \frac{1}{2}y^2 = 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ 得 $2x^2 - 4x + 3 = 0$,

此时 $\Delta = 16 - 4 \times 2 \times 3 = -8 < 0$, 方程无实数根. 即直线 l 与双曲线 $x^2 - \frac{1}{2}y^2 = 1$ 无交点.

故不存在满足条件(3)的直线 l .

评析 在考试大纲中明确提出“注重通性通法, 淡化特殊技巧”, 但不等于不需要数学技巧; “设而不求”技巧是高中数学的常用技巧, 在近年高考中频频出现. 本题易错点: 忽视直线 l 与双曲线交于 MN 两点的隐含条件 $\Delta > 0$, 而得出存在直线 l 为 $y = 2x - 1$ 的错误结论.

4. C 由 $|1 - \frac{x-1}{3}| \leq 2$ 得 $-2 \leq x \leq 10$, 由 $x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0$ ($m > 0$), 得 $1 - m \leq x \leq 1 + m$ ($m > 0$), $\therefore \square$ 即 $x < -2$ 或 $x > 10$, 而 $\square$ 即 $x < 1 - m$ 或 $x > 1 + m$ ($m > 0$);

由 $\square$ 是 $\square$ 的必要不充分条件, 知 $\square \Rightarrow \square$, 设 $A = \{x | x < -2, \text{或 } x > 10\}$, $B = \{x | x < 1 - m, \text{或 } x > 1 + m (m > 0)\}$, 则有 $A \not\subseteq B$, 故 $\begin{cases} 1 - m \geq -2 \\ 1 + m \leq 10 \end{cases}$, 且不等式中的第一、二两个不等式不能同时取等号, 解得 $0 < m \leq 3$.

评析 本题结合简易逻辑的概念和集合的语言来设计有关不等式问题, 以充要关系命题, 是一道集绝对值不等式、二次不等式的求解与充要条件的运用于一体的好试题.

5. C 由条件可得 $|c - t_1 a - t_2 b|^2 = |c|^2 - 6t_1 - 8t_2 + t_1^2 + t_2^2 = 169 + (t_1 - 3)^2 + (t_2 - 4)^2 - 25 = 144 + (t_1 - 3)^2 + (t_2 - 4)^2 \geq 144$, 当 $t_1 = 3, t_2 = 4$ 时, $|c - t_1 a - t_2 b|^2 = 144$.

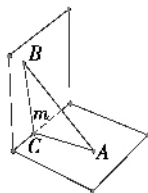
评析 公式“ $z^2 = |z|^2$ ”是实现向量与模相互转化的重要公式, 也是高考求向量与模问题的出发点.

6. B 由题设知 $y/(x)$ 中的各项构成首项为 1, 公比为 $-x$ ($x \neq 0$) 的等比数列, 由等比数列的求和公式, 得 $y(x) = \frac{(-x)^{11} - 1}{-x - 1} =$

$$\frac{x^{11} + 1}{x + 1}. \quad \text{令 } x = y + 1, \text{ 得 } g(y) = \frac{(y+1)^{11} + 1}{y+2}, \text{ 取 } y = 1, \text{ 有 } a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = g(1) = \frac{2^{11} + 1}{3}.$$

评析 本题较灵活地考查了二项式的系数问题, 等量代换与赋值法是求解的关键.

7. C 考查选择支, 不妨设二面角 $\alpha - m - \beta$ 为直二面角, 且 AB 垂直于 m (如图), 易知 $x + y = 90^\circ, z = 90^\circ$, 从而 $\sin^2 x + \sin^2 y +$



$\cos^2 z = 1$, 故选 C.

评析 由于选择支结论的确定性, 利用特殊法是较为理想的解法.

8. (理) C 原式 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{(1+\Delta x) - 1} \right] = \frac{1}{2} f'(1) = -\frac{1}{2}$.

评析 考查导数的定义是高考导数题常见题型之一. 把握导数定义及形式特点是求解关键.

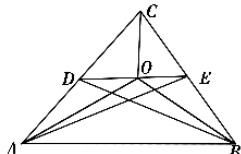
(文) A 曲线方程为 $y = x^3 - 3x$, 点 $A(0, 16)$ 不在曲线上. 设切点为 $M(x_0, y_0)$, 则点 M 的坐标满足 $y_0 = x_0^3 - 3x_0$. 因 $f'(x_0) = 3(x_0^2 - 1)$, 故切线的方程为 $y - y_0 = 3(x_0^2 - 1)(x - x_0)$, 注意到点 $A(0, 16)$ 在切线上, 有 $16 - (x_0^3 - 3x_0) = 3(x_0^2 - 1)(0 - x_0)$ 化简得 $x_0^3 = -8$, 解得 $x_0 = -2$. 所以, 切点为 $M(-2, -2)$, 切线方程为 $9x - y + 16 = 0$.

评析 有关曲线的切线问题是新教材高考必考内容. 利用切线的几何意义结合导数是解题的关键. 本题还要注意“切点既在切线上又在曲线上这一双重意义”是列式的关键.

9. B 由抛物线的光学性质及物理光的反射及反射定律知: $\angle ADC = 90^\circ$, 又 $CD \parallel x$ 轴, D 点纵坐标为 6, 代入直线方程 $x - y - 7 = 0$ 可得 D 点纵坐标为 -1, 又 $AB \parallel x$ 轴, $\therefore y_B = 4, y_C = -1$, 又直线 BC 过焦点, 不妨设其方程为 $x = ky + \frac{p}{2}$ 代入抛物线 $y^2 = 2px$ 消去 x 得 $y^2 - 2kpy - p^2 = 0$, $\therefore y_B y_C = -p^2 = -4$, 即 $p^2 = 4$. 故抛物线方程为: $y^2 = 4x$.

评析 本题属于解析几何创新题, 抓住抛物线的光学性质是求解关键, 同时也考查了直线与圆锥曲线的位置关系及韦达定理的应用.

10. C 如图, 设 D, E 分别是 AC, BC 边的中点, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD} \\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OE} \end{cases}$ ① ② 由 ①② 得, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) = 0$, 即 $\overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OE}$ 共线,



且 $|\overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{OE}|$, $\therefore \frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle AOC}} = \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle DCO}} = 2$, $\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOC}} = \frac{2S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle AOC}} = 4$.

评析 本题属于平面向量创新题, 通过向量性质揭示图形关系, 利用平面几何性质“同底等高的两个几何图形面积相等”及面积比值关系得出结论.

11. D 易知偶函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数. 从而有 $f(x) = f(|x|) < 0 = f(2) \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$. 本题也可画出草图观察得出结论.

评析 化抽象为具体是求解抽象函数的有效方法.

12. A 丙共当裁判 8 局, 所以甲乙之间共有 8 局比赛. 又甲共打了 12 局, 乙共打了 21 局, 所以甲和丙打了 4 局, 乙和丙打了 13 局. 三个人之间总共打了 $(8+4+13) = 25$ 局. 考察甲, 总共打了 12 局, 当了 13 次裁判. 所以他输了 12 次. 所以当 n 是偶数时, 第 n 局比赛的输方为甲, 从而整个比赛的第 10 局的输方必是甲. 故选 A.

评析 本题属于逻辑创新题, 很好地考查简易逻辑与排列组合知识. 其中对逻辑思维的考查要求较高.

13. (理) $\frac{2006! + 1}{2006!}$ 由 $(n+1)x_{n+1} = x_n + n$, 推出 $x_{n+1} - 1 = \frac{x_n - 1}{n+1} \Rightarrow \frac{x_{n+1} - 1}{x_n - 1} = \frac{1}{n+1}$. 因此有 $x_{n+1} - 1 = \frac{x_{n+1} - 1}{x_n - 1} \times \frac{x_n - 1}{x_{n-1} - 1} \times \cdots \times \frac{x_2 - 1}{x_1 - 1} \times (x_1 - 1) = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{(n+1)!}$, $\therefore x_{2006} = \frac{2006! + 1}{2006!}$.

(文) $2006!$ 由 $x_{n+1} = (n+1)x_n$, 推出 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = n+1$. 因此有

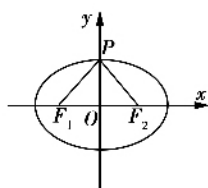
$x_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{x_n} \times \frac{x_n}{x_{n-1}} \times \cdots \times \frac{x_2}{x_1} \times x_1 = (n+1)n(n-1)\cdots 2 \times 1 = (n+1)!$, $\therefore x_{2006} = 2006!$

评析 累乘与累加是求解递推型数列问题最常见的方法之一, 应引起足够的重视.

14. $\frac{\sqrt{7}}{4}$ 不妨设 P 点为椭圆上顶点 (如图). $\therefore |PF_1| = |PF_2| = 4$, $|OP|^2 = m$, $|PF_1| \cdot |PF_2| + |OP|^2 = 16 + m = 25$, $\therefore m = 9$,

从而椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

评析 有关圆锥曲线的离心率问题是常考题型. 求解这类问题除利用“ $a^2 = b^2 + c^2$ 或 $a^2 + b^2 = c^2$ ”这个关系式外, 还应根据题设条件设法建立关于“ a 与 c ”的等式转化成“ e ”的二次方程求解.



15. $\sqrt{3}a^2$ 由 $y = -x^2 + 4ax - 3a^2 = -(x-a)(x-3a) = -(x-2a)^2 + a^2$, 知 $|BC| = 2a$, 顶点 P 坐标为 $(2a, a^2)$. (1) 当 $a^2 \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a$ 即 $a \geq \sqrt{3}$ 时, 抛物线的顶点到 x 轴的距离大于它与 x 轴相交线段 EF 的长. 从而正三角形 ABC 的底边 BC 与 EF 重合, 顶点 A 在抛物线的对称轴上, 即当正三角形的边长为 $2a$ 时, 面积最大, 最大面积 $f(a) = \sqrt{3}a^2$;

(2) 当 $0 < a < \sqrt{3}$ 时, 抛物线的顶点到 x 轴的距离小于它与 x 轴相交线段 EF 的长. 易知正三角形 ABC 的顶点 A 与抛物线的顶点重合, 即当正三角形的高为 a^2 时, 面积最大, 最大面积 $f(a) = \frac{1}{2}a^2 \times \frac{2}{\sqrt{3}}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}a^4$;

综上 $f(a) = \begin{cases} \sqrt{3}a^2 & (a \geq \sqrt{3}) \\ \frac{\sqrt{3}}{3}a^4 & (0 < a < \sqrt{3}) \end{cases}$.

评析 由于参数的存在使得几何图形的形状与位置随参数的变化而变化. 分类讨论结合图形性质特点是求解本题的关键.

16. ①②③④ 本题可设点 $P(x, y)$ 为函数 $f(x)$ 上任意一点, 结合函数的对称性及周期性有关定义, 不难得出正确答案为: ①②③④.

评析 利用定义作为抽象函数周期性判定的依据. 而对称性的常见判定方法是通过点转化点与点对称关系的判定. 有时也可采用化抽象为具体的方法进行验证解决.

17. (1) 由已知, 易得 $A = 2$. $\frac{T}{2} = (x_0 + 3\pi) - x_0 = 3\pi$, 解得 $T = 6\pi$, $\therefore \omega = \frac{1}{3}$.

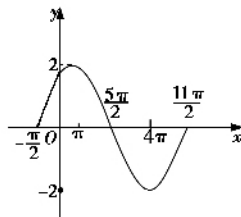
把 $(0, 1)$ 代入解析式 $y = 2\sin(\frac{x}{3} + \varphi)$, 得

$2\sin \varphi = 1$. 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 解得 $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

$\therefore y = 2\sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6})$ 为所求.

(2)

x	$-\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{2}$	4π	$\frac{11\pi}{2}$
$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$2\sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6})$	0	2	0	-2	0



评析 三角函数解析式的求法常按照“ $A \rightarrow \omega \rightarrow \varphi$ ”的求解顺序. “五点法”作图是三角函数最常见考查知识点. 关键是“五点”的确定.

18. (1) 由已知, 第 n 个等边三角形在抛物线上的顶点 B_n 的坐标为 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2}))$.

再从第 n 个等边三角形上,我们可得 B_n 的纵坐标为

$$\sqrt{a_n^2 - \left(\frac{1}{2}a_n\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a_n. \text{ 从而有 } \frac{\sqrt{3}}{2} a_n = \sqrt{\frac{3}{2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2})},$$

$$\text{即有 } \frac{1}{2}a_n^2 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2}. \text{ 由此可得 } a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2}a_n^2 \quad ①,$$

$$\text{以及 } a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{2}a_{n-1}^2 \quad ②,$$

$$① - ② \text{ 即得 } a_n = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) + \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1}).$$

$$\text{变形可得 } (a_n - a_{n-1} - 1)(a_n + a_{n-1}) = 0. \text{ 由于 } a_n + a_{n-1} \neq 0, \text{ 所以 } a_n - a_{n-1} = 1.$$

$$\text{在 } ① \text{ 式中取 } n = 1, \text{ 可得 } \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}a_1^2, \text{ 而 } a_1 \neq 0, \text{ 故 } a_1 = 1. \therefore a_n = n.$$

$$\text{故数列 } \{a_n\} \text{ 为等差数列.}$$

$$(2) \text{ 由 } (1) \text{ 知 } a_n = n, \therefore b_n = \frac{1}{(n+3)n} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right), \text{ 从而知 } S_n = \frac{1}{3} \left[\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) \right] = \frac{1}{3} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) \right],$$

$$(理) \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}.$$

$$(文) S_n = \frac{1}{3} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) \right] = \frac{n(11n^2 + 48n + 49)}{18(n^3 + 6n^2 + 11n + 6)}.$$

评析 本题将数列与解析几何问题结合考查. 利用几何性质建立数列递推关系式, 然后转化为两类特殊数列是求解的关键.

19. (1) 能获得 20 元彩金, 即摸到的 5 个棋子全是白棋子, 其概率为 $P_5 = \frac{C_8^5}{C_{16}^5} \approx 0.0128$.

(2) 能获得 2 元彩金, 即摸到的 5 个棋子必须是 4 个白棋子和 1 个黑棋子, 其概率为 $P_4 = \frac{C_8^4 \cdot C_8^1}{C_{16}^5} \approx 0.1282$.

(3) 易求得获得纪念品的概率为: $P_3 = \frac{C_8^3 \cdot C_8^2}{C_{16}^5} \approx 0.3590$,

按 1 000 次摸彩来计算, 赌徒手续费的收入为 1 000 元. 赌徒要支付彩金(包括纪念品)的人数约为: $1\,000 \times 0.0128 \approx 13$ 人获得 20 元; $1\,000 \times 0.1282 \approx 128$ 人获得 2 元; $1\,000 \times 0.3590 \approx 359$ 人获得纪念品. 所以支付费用共计为 $20 \times 13 + 2 \times 128 + 0.5 \times 359 = 695.5$ (元). 赌徒可以净赚 $1000 - 695.5 = 304.5$ (元).

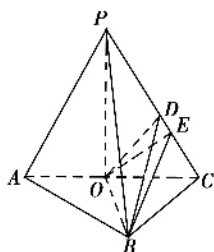
即每 1 000 次摸彩, 赌徒可以净赚 304.5 元.

评析 本题属概率应用题, 考查等可能性事件的概率问题. 关键是弄清事件, 合理分类, 选择恰当的方法求解, 考查分类讨论思想.

20. 解法一 (1) 设 $AB = a$, 由点 O, D 分别是 AC, PC 的中点知: $\angle ODB$ 为所求异面直线 PA 与 BD 所成的角. $\therefore PA = a, \therefore OD = \frac{1}{2}a$, 在等腰 $\text{Rt} \triangle ABC$

$$\text{中 } AB = BC = a, \text{ 从而知 } OB = \frac{\sqrt{2}}{2}a. \text{ 又 } OP \perp \text{底面 } ABC, OP = \sqrt{PA^2 - OA^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \therefore PB = PC = PA = \sqrt{PO^2 + OA^2} = a.$$

$$\text{由 } PC = PB = BC, \therefore BD = \frac{\sqrt{3}}{2}a. \text{ 从而 } \cos \angle ODB =$$



$$\frac{OD^2 + BD^2 - OB^2}{2OD \cdot BD} = \frac{\frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2}{2 \times \frac{1}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

即异面直线 PA 与 BD 所成角的余弦值的大小为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 过 O 作 $OE \perp PC$ 交 PC 于 $E, \therefore OB \perp \text{平面 } POC, OE$ 为 BE 在平面 POC 上的射影, $\therefore BE \perp PC$. 从而 $\angle BEO$ 为所求二面角 $O-PC-B$ 的平面角. 设 $AB = a, PO = h$.

$$\text{在 } \text{Rt} \triangle OBE \text{ 中}, \therefore OE = \frac{PO \cdot OC}{PC} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}ah}{\sqrt{h^2 + \frac{1}{2}a^2}}, OB = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

$$\therefore \tan \angle BEO = \frac{OB}{OE} = \frac{\sqrt{h^2 + \frac{1}{2}a^2}}{h} = \sqrt{3}, \text{ 解得 } h = \frac{1}{2}a.$$

$$\therefore PA = \sqrt{OA^2 + PO^2} = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \therefore k = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 故当}$$

$$k = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 时, 二面角 } O-PC-B \text{ 大小为 } \frac{\pi}{3}.$$

解法二 (向量法)

易证 $OP \perp \text{平面 } ABC$, 又 $OA = OC, AB = BC$, 从而 $OA \perp OB, OA \perp OP, OB \perp OP$, 以 O 为原点, 射线 OP 为非负 z 轴, 建立空间直角坐标系 $O-xyz$ (如图), (1) 设 $AB = a$, 则 $PA = a, PO = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right), B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right), C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right), P\left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right), \text{ 则 } D\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}a, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}a\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right), \overrightarrow{BD} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}a, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a\right),$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{BD} \rangle = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{BD}|} = \frac{-\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ 即异面直线 } PA \text{ 与 } BD \text{ 所成角的余弦值的大小为 } \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(2) 设 $AB = a, OP = h, \therefore OB \perp \text{平面 } POC, \therefore \overrightarrow{OB} = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0)$ 为平面 OPC 的一个法向量. 不妨设平面 PBC 的一个法向量为 $n = (x, y, z), \therefore A(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0), B(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0), C(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0), P(0, 0, h), \therefore \overrightarrow{BC} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}a, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0), \overrightarrow{PC} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, -h).$

$$\text{由 } \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ n \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}ax - hz = 0 \end{cases}, \text{ 不妨令 } x = 1, \text{ 则 } y = -1, z =$$

$$-\frac{\sqrt{2}a}{2h}, \text{ 即 } n = (1, -1, -\frac{\sqrt{2}a}{2h}), \text{ 由 } \cos \frac{\pi}{3} = \left| \frac{\overrightarrow{OB} \cdot n}{|\overrightarrow{OB}| |n|} \right| =$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}a}{2}}{\frac{\sqrt{2}a}{2} \times \sqrt{2 + \frac{a^2}{2h^2}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 + \frac{a^2}{2h^2} = 4 \Rightarrow h = \frac{1}{2}a, \therefore PA =$$

$$\sqrt{AO^2 + PO^2} = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \therefore k = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故当 $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 二面角 $O-PC-B$ 大小为 $\frac{\pi}{3}$.

评析 设计“一题二法”是近几年立体几何考题的基本模式, 考查一题多解. 要关注立体几何与三角函数、解三角形知识之间的联系, 运用分析的方法, 从复杂的空间图形关系中抽象出对应的三角形, 掌握“化空间问题为平面问题, 化复杂问题为简单问题”的化归思想.

21. (1) 设 $C(x, y), C(x_0, y_0), M(x_M, y_M). \therefore |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|, \therefore M$ 点在线段 AB 的中垂线上, 由已知 $A(-1, 0), B(1, 0), \therefore x_M =$

0, 又: $\overrightarrow{GM} \parallel \overrightarrow{AB}$, $\therefore y_M = y_0$, 又 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$, $\therefore (-1 - x_0, -y_0) + (1 - x_0, -y_0) + (x - x_0, y - y_0) = (0, 0)$,
 $\therefore x_0 = \frac{x}{3}, y_0 = \frac{y}{3}, \therefore y_M = \frac{y}{3}, \therefore |\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC}|$,
 $\therefore \sqrt{(0-1)^2 + (-\frac{y}{3}-0)^2} = \sqrt{(0-x)^2 + (-\frac{y}{3}-y)^2}, \therefore x^2 + \frac{y^2}{3} = 1 (y \neq 0)$,
 $\therefore$ 顶点 C 的轨迹方程为 $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1 (y \neq 0)$.
(2) (理) 设直线 l 方程为 $y = k(x-3)$, $E(x_1, y_1), F(x_2, y_2)$,
由 $\begin{cases} y = k(x-3) \\ x^2 + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 消去 y 得: $(k^2+3)x^2 - 6k^2x + 9k^2 - 3 = 0$ ①,
 $\therefore x_1 + x_2 = \frac{6k^2}{k^2+3}, x_1x_2 = \frac{9k^2-3}{k^2+3}$,
而 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF} = |\overrightarrow{PE}| \cdot |\overrightarrow{PF}| \cdot \cos 0^\circ = |\overrightarrow{PE}| \cdot |\overrightarrow{PF}|$
 $= \sqrt{1+k^2} |3-x_1| \cdot \sqrt{1+k^2} |3-x_2| = (1+k^2) |9-3(x_1+x_2) + x_1x_2| = (1+k^2) |\frac{9k^2+27-18k^2+9k^2-3}{k^2+3}| = \frac{24(k^2+1)}{k^2+3}$
 $= 24 - \frac{48}{k^2+3}$,
由方程①知 $\Delta > (6k^2)^2 - 4(k^2+3)(9k^2-3) > 0, \therefore k^2 < \frac{3}{8}$,
 $\therefore k \neq 0$,
 $\therefore 0 < k^2 < \frac{3}{8}, \therefore k^2+3 \in (3, \frac{27}{8}), \therefore \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF} \in (8, \frac{88}{9})$.
(文) 假设存在实数 k 满足题设条件. 不妨设 E, F 两点的坐标分别为 $E(x_1, y_1), F(x_2, y_2)$, 直线方程代入方程 $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1 (y \neq 0)$ 消去 y 得 $(k^2+3)x^2 + 2kx - 2 = 0$. ①
则由①式得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2k}{3+k^2} \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{k^2+3} \end{cases}$ ②, 则由 $FA \perp EA$ 得:
 $(x_1+1)(x_2+1) + y_1y_2 = 0$. 即 $(x_1+1)(x_2+1) + (kx_1+1)(kx_2+1) = 0$.
整理得 $(k^2+1)x_1x_2 + (k+1)(x_1+x_2) + 2 = 0$. ③
把②式代入③式化简得 $k^2 + k - 2 = 0, \therefore k = 1$ 或 $k = -2$, 即存在实数 $k = 1$ 或 $k = -2$ 时满足条件.
评析 本题属平面向量与解析几何综合题. 第一小问运用向量的坐标运算求出轨迹. 第二小问主要考查直线与圆锥曲线的位置关系, 韦达定理与判别式结合是常用的技巧.

22. (理) (1) 当 $x \in (0, \pi)$ 时, $f'(x) = 1 - \cos x > 0, \therefore f(x)$ 为增函数.
又 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上连续所以 $f(0) \leq f(x) \leq f(\pi)$, 求得 $0 \leq f(x) \leq \pi$, 即 $f(x)$ 的值域为 $[0, \pi]$.
(2) 设 $g(x) = \frac{2f(\theta) + f(x)}{3} - f(\frac{2\theta+x}{3})$,
即 $g(x) = \frac{2\theta - 2\sin \theta + x - \sin x}{3} - \frac{2\theta+x}{3} + \sin \frac{2\theta+x}{3} = \sin \frac{2\theta+x}{3}$

$-\frac{1}{3}\sin x - \frac{2}{3}\sin \theta$,
 $g'(x) = -\frac{1}{3}(\cos x - \cos \frac{2\theta+x}{3})$,
 $\therefore x \in [0, \pi], \theta \in (0, \pi), \therefore \frac{2\theta+x}{3} \in (0, \pi)$, 由 $g'(x) = 0$, 得 $x = \theta$.
 $\therefore$ 当 $x \in (0, \theta)$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 为减函数, 当 $x \in (\theta, \pi)$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 为增函数. $\therefore g(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上连续, $\therefore g(\theta)$ 为 $g(x)$ 的最小值. 从而当 $x \in [0, \pi]$ 时,
有 $g(x) \geq g(\theta) = 0$, 因而 $\frac{2f(\theta) + f(x)}{3} \geq f(\frac{2\theta+x}{3})$.
(3) 在题设条件下,
当 k 为偶数时 $\frac{2f(\theta) + f(x)}{3} \geq f(\frac{2\theta+x}{3})$;
当 k 为奇数时 $\frac{2f(\theta) + f(x)}{3} \leq f(\frac{2\theta+x}{3})$.
(文) (1) $\therefore f(x) = x^3 + ax^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}a, \therefore f'(x) = 3x^2 + 2ax + \frac{3}{2}$. $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象上有与 x 轴平行的切线, $\therefore f'(x) = 0$ 有实数解. $\therefore \Delta = 4a^2 - 4 \times 3 \times \frac{3}{2} \geq 0, \therefore a^2 \geq \frac{9}{2}$. 因此, 所求实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{3\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty)$.
(2) (i) $\therefore f'(-1) = 0, \therefore 3 - 2a + \frac{3}{2} = 0$, 即 $a = \frac{9}{4}$. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + \frac{3}{2} = 3(x + \frac{1}{2})(x + 1)$. 由 $f'(x) > 0$, 得 $x < -1$ 或 $x > -\frac{1}{2}$. 由 $f'(x) < 0$, 得 $-1 < x < -\frac{1}{2}$.
因此, 函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, -1], [-\frac{1}{2}, +\infty)$; 单调减区间为 $[-1, -\frac{1}{2}]$.
(ii) 由 (i) 的结论可知, $f(x)$ 在 $[-1, -\frac{1}{2}]$ 上的最大值为 $f(-1) = \frac{25}{8}$, 最小值为 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{49}{16}$; $f(x)$ 在 $[-\frac{1}{2}, 0]$ 上的最大值为 $f(0) = \frac{27}{8}$, 最小值为 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{49}{16}$. $\therefore f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上的最大值为 $f(0) = \frac{27}{8}$, 最小值为 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{49}{16}$. 因此, 任意的 $x_1, x_2 \in [-1, 0]$, 恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{27}{8} - \frac{49}{16} = \frac{5}{16}$.
故 $m_{\min} = \frac{5}{16}$.
评析 本题主要考查函数及导函数相关问题, 利用导数讨论函数单调性及恒成立问题, 考查函数的最大值、最小值以及综合运算能力.

2006 年全国百校联盟高考《考试大纲》调研卷(十六)

清水出芙蓉,天然去雕饰

本套试卷的命制遵循 2006 年全国高考《考试大纲》,在命题范围、试卷总体结构模式等方面与去年全国卷基本保持一致,但是在稳定中也有所变化和创新. 在此我主要发表我个人的看法如下: 传承中折射创新,平和中不乏亮点. 具体体现在以下几点:

一、立意创新,由新出彩

试卷遵循“两纲”,立足教材,强调基础,注重思维,突出能力,特色鲜明. 命题难易适中,贴近教材. 试卷在讲究整体谋篇布局的同时,着意单题立意创新和推陈出新. 如第 20 题,将斜坐标系和向量有机结合,却是源于教材第二册(上)的复习参考题.

二、情境创新,提高数学素养

对新增内容的新思想、新方法的考查力求情境新颖别致,对考查的新旧知识的比例进行一种合理的定位,如理科第 17 题(文科第 17 题),在考查概率的基本知识的基础上,加大了学生对日常生活的基本常识的理解;应用题的背景既源于教材又走近生活、贴近时代,不仅可检测出考生将知识迁移到不同情境中的能力,而且可更有效地甄别考生的数学素养.

三、设计创新,体现交汇原则

试卷在保持去年全国命题风格的基础上,更好地体现了在新旧知识网络的交汇点处和能力层次的交叉区内命题的原则. 文理共用的第 17 题将不等式与函数的有机整合,第 18 题将三角函数,向量与导数的有机整合的设计,集中体现了这一命题导向. 第 9,11,12,

14,15 题的设计则凸现以图助算,精算与估算结合,新旧思想与方法结合的特点;文理第 19 题仍采用“一题两法”理科压轴题体现数列、不等式、极限知识、能力交汇,设问不拘常规,这些设计创新,体现命题的“人文关怀”,考查考生的“个性品质”,体现了课改理念,有利于发挥对中学数学教学的正确导向作用.

四、能力考查,不拘一格

一般能力是指顺利完成各种活动所必需的基本心理能力.高考对数学一般能力的考查主要有符号学习能力、概念学习能力和规则学习能力.符号学习能力是指知道和记忆符号表示名称的能力.概念学习能力是指掌握事物的共同本质属性,并能辨别本质属性和非本质属性的能力.规则学习能力是指揭示几个概念间的关系,掌握规律并能运用的能力.本套数学试题主要是定义一些新的概念,符号或运算规则等来考查学生的能力.例如第 20 题,首先要求考生学习一个新的概念——斜坐标系,并在理解的基础上运用它来解决相关问题,从而考查学生接受新知识,运用新知识以及进一步学习的能力.

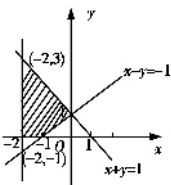
1. B 由函数值域得 $A = [-1, 1], B = (-\infty, 1], \therefore A \cap B = [-1, 1]$, 选 B.

2. D 由奇函数的定义知 $a = b = 0$, 所以选 D.

3. (理) B 用验证法知选 B, 也可以设 $z = a + bi$, 代入题设条件解关于 a, b 的方程组.

(文) B 画出图形可知阴影部分面积为所求. 选 B.

4. C 由函数图象可得: $\frac{T}{4} = \frac{2\pi}{3} - (-\frac{\pi}{3}) = \pi, \therefore T = 4\pi, \omega = \frac{1}{2}$. 又当 $x = -\frac{\pi}{3}$ 时, y



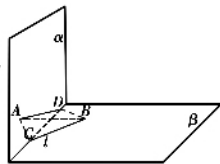
$= 0, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$. 故选 C.

5. D 设 $(2n) * 2006 = a_n$, 则 $(2n+2) * 2006 = 3a_n$, 且 $a_1 = 1, \therefore a_{n+1} = 3a_n, \therefore a_n = 3^{n-1}$, 即 $(2n) * 2006 = 3^{n-1}, \therefore 1000 * 2006 = 3^{499}$. 所以选 D.

6. B 显然①④错误, 所以选 B.

7. C 取特殊值进行验证选 C.

8. B 如图所示, 过 A 作 l 的垂线, 垂足为 C, 易知 $AC \perp \beta$, 过 B 作 l 的垂线, 垂足为 D, 易知 $BD \perp \alpha$. 所以 $\angle ABC = \theta_2, \angle BAD = \theta_1$, 在 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中, $\angle ABD = \frac{\pi}{2} - \angle DAB = \frac{\pi}{2} - \theta_1$, 由最小角定理可知 $\theta_2 < \frac{\pi}{2} - \angle BAD = \frac{\pi}{2} - \theta_1$, 所以 $\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$. 当 D、C 重合时, $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$. 所以最大值为 $\frac{\pi}{2}$. 选 B.



9. A 由三角函数的有界性和对数函数的性质知选 A.

10. (理) D 由函数在 $x = 2$ 处连续得 $a = 2, m = 4$, 故所求极限值为 3, 选 D.

(文) B 特殊值法, 取直线 DE 平行于 BC 可得, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$. 选 B.

11. (理) A 特殊值法, 取平面 $A_1B_1C_1$ 平行于平面 ABC 即可得 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. 选 A.

(文) A 根据组合知识, 概率 $P = \frac{C_{40}^2 + C_{40}^2}{C_{80}^2} = \frac{39}{79}$. 选 A.

12. (理) C 根据组合知识知集合 A 的“孙子集”个数是 26.

(文) A 根据直线斜率的几何意义选 $k_1 + k_2 > 0$, 即 A.

13. 开放性试题, 答案不惟一. 给出符合条件的函数即可, 例如 $y = \frac{1}{x}$.

14. (理) $(-1)^n n!$ $\because f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} [(x-1)(x-2) \cdots (x-n)] = (-1)^n n!,$$

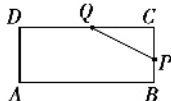
故填 $(-1)^n n!$

(文) π 由球面距离的定义得 $R \times \frac{\pi}{3} = 1, \therefore R = \frac{3}{\pi},$

$$\therefore S_{\text{球}} = 4\pi \left(\frac{3}{\pi}\right)^2 = \frac{36}{\pi}, V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{3}{\pi}\right)^3 = \frac{36}{\pi^2},$$

$$\therefore S_{\text{球}} : V_{\text{球}} = \pi.$$

15. (理) $\frac{22}{3}$ 如图, 设 $CP = x, \angle CQP = \alpha$, 则



$$CQ = x \cot \alpha, PQ = \frac{x}{\sin \alpha}, \text{由题设 } x + x \cot \alpha + \frac{x}{\sin \alpha} = 8,$$

$$\therefore x = \frac{8 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}. \text{于是 } \triangle PCQ \text{ 的面积为 } S = \frac{1}{2} x \cdot x \cot \alpha = \frac{32 \sin \alpha \cos \alpha}{(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)^2},$$

由实际问题的几何意义不难求得定义域为 $0 < \alpha \leq \arctan \frac{3}{4},$

$$\text{所以 } S_{\max} = \frac{8}{3}, \text{因而求得矩形留下部分面积的最小值为 } 2 \times 5 - \frac{8}{3} = \frac{22}{3}, \text{故填 } \frac{22}{3}.$$

评析 学生最容易求错定义域为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 从而出错.

(文) 2 因为对任意 $x \in \mathbf{R}$, 存在 x_1, x_2 使 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ 恒成立, 则 $f(x_1), f(x_2)$ 分别是函数的最小值和最大值, $\therefore \frac{\pi}{2}$

$$x_1 + \frac{\pi}{3} = 2k_1\pi - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}x_2 + \frac{\pi}{3} = 2k_2\pi + \frac{\pi}{2} (k_1 \in \mathbf{Z}, k_2 \in \mathbf{Z}),$$

$$\therefore |x_1 - x_2| = |4(k_1 - k_2) - 2|, \therefore |x_1 - x_2|_{\min} = 2. \text{故填 } 2.$$

16. $S_n = n^3$ 设第 n 个集中最小数为 a_n , 则第 $n-1$ 个集中最小数 a_{n-1} ,

又第 $n-1$ 个集中共有 $n-1$ 个数, 且元素依次增加 2,

$$\therefore a_{n-1} + 2(n-1) = a_n, \text{即 } a_n - a_{n-1} = 2(n-1) (n \geq 2),$$

$$\therefore a_{n-1} - a_{n-2} = 2(n-2), a_{n-2} - a_{n-3} = 2(n-3), \cdots, a_2 - a_1 = 2,$$

$$\text{相加得 } a_n - a_1 = 2 \times \frac{(n-1)(1+n-1)}{2} = n^2 - n, \text{即得 } a_n = n^2 - n + a_1.$$

$$\text{又 } a_1 = 1, \therefore a_n = n^2 - n + 1.$$

$$\text{从而得 } S_n = n(n^2 - n + 1) + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^3.$$

17. (理) (1) 有两个小孩的家庭的基本事件为:

{(男, 男)、(男, 女)、(女, 男)、(女, 女)}, 共有 4 个, 它们是等可能的.

而 $A = \{(男, 女)、(女, 男)\}, B = \{(男, 男)、(男, 女)、(女, 女)\}$

男)}}

$$A \cdot B = \{\text{男,女}\} \cup \{\text{女,男}\}.$$

$$\text{于是 } P(A) = 1/2, P(B) = 3/4, P(A \cdot B) = 1/2,$$

由此可知 $P(A \cdot B) \neq P(A)P(B)$, 所以事件 A, B 不相互独立.

(2) 有三个小孩的家庭的基本事件为:

$\{\text{男,男,男}\}, \{\text{男,男,女}\}, \{\text{男,女,男}\}, \{\text{女,男,男}\}, \{\text{男,女,女}\}, \{\text{女,男,女}\}, \{\text{女,女,男}\}, \{\text{女,女,女}\}$, 共有 8 个, 它们是等可能的.

而 A 中含有 6 个基本事件, B 中含有 4 个基本事件, $A \cdot B$ 中含有 3 个基本事件.

$$\text{于是 } P(A) = 6/8 = 3/4, P(B) = 4/8 = 1/2, P(A \cdot B) = 3/8,$$

显然有 $P(A \cdot B) = P(A)P(B)$, 从而事件 A, B 是相互独立的.

评析 本题考查概率的基本概念, 相互独立事件, 互斥事件的计算, 而能力方面考查了学生思维的灵活性.

(文) (1) 甲乙两队各五名球员, 一个间隔一个排序, 出场序的种数是 $2A_5^5 A_5^5 = 28\ 800$.

(2) 甲队五名球员, 取连续两名的方法数为 4. 若不考虑乙队, 甲队有且只有连续两名队员射中的概率为 $P = 4 \times 0.5^2 (1 - 0.5)^3 = \frac{1}{8}$.

(3) 甲、乙两队点球罚完, 再次出现平局, 可能的情况有以下 6 种, 即均未中球, 均中 1 球, ..., 均中 5 球, 故所求概率为 $P = [C_5^0 (1 - 0.5)^5]^2 + [C_5^1 0.5 (1 - 0.5)^4]^2 + \dots + [C_5^5 0.5^5]^2 = \frac{1}{2^{10}} (1^2 + 5^2 + 10^2 + 10^2 + 5^2 + 1^2) = \frac{63}{256}$.

$$18. (1) \because 4 \sin B \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) + \cos 2B = 1 + \sqrt{3},$$

$$\therefore 4 \sin B \cdot \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} + B \right)}{2} + (1 - 2 \sin^2 B) = 1 + \sqrt{3},$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\because 0 < B < \pi, \therefore B = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{2\pi}{3}.$$

$$(2) \because a = 4, S = 5\sqrt{3}, \therefore \text{由 } S = \frac{1}{2} ac \sin B \text{ 得 } 5\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot c \cdot$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore c = 5,$$

$$\text{又 } B \text{ 为锐角, } \therefore B = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \frac{1}{2} = 21,$$

$$\therefore b = \sqrt{21}.$$

评析 本题考查三角公式的正用、逆用、变用以及诱导公式的应用. 充分考查了学生所掌握知识的熟练程度和灵活性.

19. 解法一 (几何法)

(1) 正方形 $ABCD \Rightarrow CB \perp AB$,

$\therefore$ 二面角 $C-AB-F$ 是直二面角, $CB \perp BE$, $\therefore CB \perp$ 面 $ABEF$.

$\therefore AG, GB \subset$ 面 $ABEF$, $\therefore CB \perp AG, CB \perp BG$,

又 $AD = 2a, AF = a, ABEF$ 是矩形, G 是 EF 的中点,

$$\therefore AG = BG = \sqrt{2}a, AB = 2a, AB^2 = AG^2 + BG^2, \therefore AG \perp BG.$$

$\therefore CG \cap BG = B$, $\therefore AG \perp$ 平面 BGC .

而 $AG \subset$ 面 AGC , 故平面 $AGC \perp$ 平面 BGC .

(2) 如图, 由 (1) 知面 $AGC \perp$ 面 BGC , 且交于 GC ,

在平面 BGC 内作 $BH \perp GC$, 垂足为 H , 则 $BH \perp$ 平面 AGC ,

$\therefore \angle BGH$ 是 GB 与平面 AGC 所成的角,

$\therefore$ 在 $Rt \triangle CBG$ 中,

$$BH = \frac{BC \cdot BG}{CG} = \frac{BC \cdot BG}{\sqrt{BC^2 + BG^2}} =$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}a,$$

$$\text{又 } BG = \sqrt{2}a, \therefore \sin BGH = \frac{BH}{BG} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(3) 由 (2) 知, $BH \perp$ 面 AGC ,

作 $BO \perp AC$, 垂足为 O , 连结 HO , 则 $HO \perp AC$,

$\therefore \angle BOH$ 为二面角 $B-AC-G$ 的平面角.

在 $Rt \triangle ABC$ 中, $BO = \sqrt{2}a$,

$$\text{在 } Rt \triangle BOH \text{ 中, } \sin BOH = \frac{BH}{BO} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \angle BOH = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3},$$

即二面角 $B-AC-G$ 的大小为 $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$.

解法二 (向量法)

如图, 以 A 为原点建立直角坐标系,

则 $A(0, 0, 0), B(0, 2a, 0), C(0, 2a, 2a), G(a, a, 0), F(a, 0, 0)$.

$$(1) \vec{AG} = (a, a, 0), \vec{BG} = (a, -a, 0), \vec{BC} = (0, 0, 2a), \therefore \vec{AG} \cdot \vec{BG} = (a, a, 0) \cdot (a, -a, 0) = 0,$$

$\therefore AG \perp BG$, 又 $AG \perp BC$, 而 BG 与 BC

是平面 BGC 内两相交直线,

$\therefore AG \perp$ 平面 BGC , 又 $AG \subset$ 平面 ACG , 故平面 $ACG \perp$ 平面 BGC .

(2) 由题意可得 $\vec{AG} = (a, a, 0), \vec{AC} = (0, 2a, 2a), \vec{BG} = (a, -a, 0), \vec{BC} = (0, 0, 2a)$.

设平面 ACG 的一个法向量为 $n_1 = (x_1, y_1, 1)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{AG} \cdot n_1 = 0 \\ \vec{AC} \cdot n_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax_1 + ay_1 = 0 \\ 2ay_1 + 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow n_1 = (1, -1, 1),$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{|\vec{BG} \cdot n_1|}{|\vec{BG}| \cdot |n_1|} = \frac{2a}{\sqrt{2}a \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 即为所求.}$$

(Ⅲ) 因 $n_1 = (x_1, y_1, 1)$ 是平面 ACG 的一个法向量,

又 $AF \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ABCD$ 的法向量 $\vec{AF} = (a, 0, 0)$, 得

$$|\cos \theta| = \frac{n_1 \cdot \vec{AF}}{|n_1| \cdot |\vec{AF}|} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore$ 二面角 $B-AC-G$ 的大小为 $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.

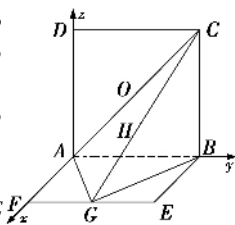
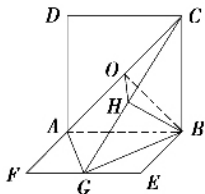
$$20. (1) f(x) \cdot f(y) = [-x + 2(x \cdot a)a] \cdot [-y + 2(y \cdot a)a] = x \cdot y - 4(x \cdot a)(y \cdot a) + 4(x \cdot a)(y \cdot a)a^2 = x \cdot y.$$

$$(2) \because f[f(x)] = f[-x + 2(x \cdot a)a] = -[-x + 2(x \cdot a)a] + 2[[-x + 2(x \cdot a)a] \cdot a]a = x - 2(x \cdot a)a + 2[-x \cdot a + 2(x \cdot a)a^2]a = x - 2(x \cdot a)a + 2(x \cdot a)a = x, \therefore f[f(x)] = x.$$

$$(3) \text{ 由 } f(u) = v, \text{ 得 } \begin{cases} 2a_1^2 - 1 = 0, \\ 2a_1a_2 = 1, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases},$$

$$\therefore a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ 或 } a = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$



21. (1) 设动圆圆心 $N(x, y)$, 由垂径定理得 $|MN|^2 = 2^2 + x^2$,

$$\therefore (x-2)^2 + y^2 = 4 + x^2, \text{曲线 } C \text{ 的方程为 } y^2 = 4x.$$

(2) $\because$ 直线 AB 过点 $P(a, 0) (a > 0)$,

$\therefore$ 设直线 AB 的方程为 $x = my + a$,

$$\text{由方程组 } \begin{cases} x = my + a \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{ 消 } x \text{ 得 } y^2 - 4my - 4a = 0,$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4a$,

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} |OA| |OB| \sin AOB,$$

$$\text{即 } S = t \cdot \tan AOB = \frac{1}{2} |OA| |OB| \sin AOB,$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} (x_1 x_2 + y_1 y_2),$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} [(my_1 + a)(my_2 + a) + y_1 y_2]$$

$$= \frac{1}{2} [-4a(m^2 + 1) + 4m^2 a + a^2] = \frac{1}{2} (a^2 - 4a),$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} [(a-2)^2 - 4] = \frac{1}{2} (a-2)^2 - 2 (a > 0), \text{故当 } a = 2$$

时, $t_{\min} = -2$.

22. (理) (1) 依题可知 $a_1 = a, S_n = \frac{n(a_n - a_1)}{2}$,

$$\therefore a_1 = S_1 = \frac{1 \cdot (a_1 - a_1)}{2} = 0,$$

$$\therefore a = 0.$$

$$(2) \because a_1 = 0, S_n = \frac{n}{2} a_n, \text{则 } S_{n+1} = \frac{n+1}{2} a_{n+1},$$

$$\text{两式相减得 } 2(S_{n+1} - S_n) = (n+1)a_{n+1} - na_n,$$

$$\therefore (n-1)a_{n+1} = na_n,$$

$$\text{以及 } na_{n+2} = (n+1)a_{n+1},$$

$$\therefore n(a_{n+2} - a_{n+1}) = n(a_{n+1} - a_n),$$

于是对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$,

故数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 公差 $d = p$,

通项公式 $a_n = (n-1)p$.

$$(3) \because S_n = \frac{n(n-1)}{2} p,$$

$$\therefore p_n = \frac{\frac{1}{2}(n+2)(n+1)p}{\frac{1}{2}(n+1) \cdot np} + \frac{\frac{1}{2}(n+1) \cdot np}{\frac{1}{2}(n+2)(n+1)p} = \frac{n+2}{n} + \frac{n}{n+2}$$

$$= 2 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+2},$$

$$\therefore p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n - 2n$$

$$= (2 + \frac{2}{1} - \frac{2}{3}) + (2 + \frac{2}{2} - \frac{2}{4}) + \cdots + (2 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+2}) -$$

$$2n = 3 - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} < 3 \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

$$\text{且 } \lim_{n \rightarrow \infty} (p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n - 2n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (3 - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}) = 3,$$

$\therefore \{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n - 2n\}$ 的“上渐近值”为 3.

(文) (1) 依题可知 $a_1^2 + a_1 - 2a_1 = 0$ 且 $a_1 \neq 0$, $\therefore a_1 = 1$,

当 $n \geq 2$ 时, 有 $\begin{cases} a_n^2 + a_n - 2S_n = 0, \text{①} \\ a_{n-1}^2 + a_{n-1} - 2S_{n-1} = 0, \text{②} \end{cases}$

$$\text{①} - \text{②} \text{得 } a_n^2 - a_{n-1}^2 + a_n - a_{n-1} - 2(S_n - S_{n-1}) = 0,$$

$$\therefore (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 1) = 0.$$

$\because a_n > 0, \therefore a_n - a_{n-1} = 1, \therefore \{a_n\}$ 是以 $a_1 = 1$ 为首项, $d = 1$ 为公差的等差数列, $a_n = n$.

$$(2) b_1 = 1, \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{2}, \therefore b_n = (\frac{1}{2})^{n-1}.$$

$$\therefore c_n = a_n b_n = n (\frac{1}{2})^{n-1},$$

$$\therefore T_n = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \cdots + n (\frac{1}{2})^{n-1}, \text{③}$$

$$\frac{1}{2} T_n = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \cdots + (n-1) \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} +$$

$$n (\frac{1}{2})^n, \text{④}$$

$$\text{③} - \text{④} \text{并整理得 } T_n = 4 [1 - (\frac{1}{2})^n] - n (\frac{1}{2})^{n-1} = 4 - 4 \cdot$$

$$(\frac{1}{2})^n - n (\frac{1}{2})^{n-1} < 4.$$